КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 66, 1973 г.

В.Г.Фокин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНОМ ОРТОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

Общеизвестный метод Г.Закса [1] был разработан для определения остаточных напряжений в однородном цилиндре из изотропного материала. В дальнейшем этот метод применялся для биметаллических [2], а затем и для многослойных цилиндров с изотропными слоями [3]. В настоящей статье рассматривается применение метода Г.Закса для определения остаточных напряжений многослойного цилиндра с цилиндрически ортотропными слоями. Ось ортотропии упругих свойств совпадает с осью цилиндра z. Предполагается, что цилиндр испытывает характерное для практики остаточное напряженное состояние [4]:

$$\sigma_r = \sigma_r(r), \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta(r), \quad \sigma_z = \sigma_z(r), \quad \tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0.$$

Для получения расчетных соотношений используется основная идея работы [3].

Определение напряжений в наружных слоях.

Цилиндр обтачивается, и в процессе этой операции на внутренней поверхности измеряются окружная $\varepsilon_{\theta\theta}(r)$ и осевая $\varepsilon_{zz}(r)$ деформации, а также сдвиг $\gamma_{\theta z\theta}(r)$. На рис. 1 показано нагружение цилиндра, эквивалентное обтачиванию до радиуса r. Эквивалентные нагрузки выражаются через остаточ-

ные напряжения по следующим формулам:

$$P(r)=\sigma_r(r),\quad N(r)=2\pi\int_r^{R_{n+1}}\rho\,\sigma_z(\rho)\,d\rho,\quad M(r)=2\pi\int_r^{R_{n+1}}\rho^2\tau_{\theta z}(\rho)\,d\rho. \qquad (\mathrm{I})$$

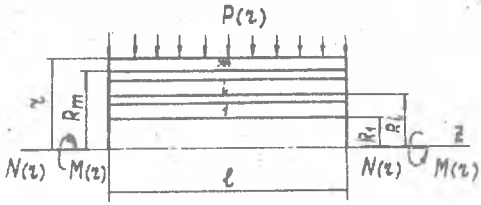

Рис. I

Эти нагрузки вызывают перемещения, которые, принимая во внимание известное решение для однородного анизотропного цилиндриндра [5], будем искать в форме

$$u_i=c_{1i}\varphi_{1i}\rho+c_{2i}\varphi_{2i}\rho^{K_i}+c_{3i}\varphi_{3i}\rho^{-K_i},\quad v=\theta\rho r,\quad w_i=c_{1i}a_{33i}z. \qquad (2)$$

Здесь обозначено: $i=1, 2, \ldots, n$ - номер слоя (рис. I); $c_{ji}=c_{ji}(r)$, ($j=1, 2, 3$)-коэффициенты, зависящие от нагрузки и размеров; θ - относительный угол закручивания цилиндра

$$\varphi_{1i}=\frac{\chi_i}{a_{33i}}(a_{12i}a_{33i}-a_{13i}a_{23i}+a_{22i}a_{33i}-a_{23i}^2)+a_{23i};$$

$$\varphi_{2i}=a_{12i}-\frac{a_{13i}a_{23i}}{a_{33i}}+K_i\left(a_{22i}-\frac{a_{23i}^2}{a_{33i}}\right);\quad \varphi_{3i}=a_{12i}-\frac{a_{13i}a_{23i}}{a_{33i}}-K_i\left(a_{22i}-\frac{a_{23i}^2}{a_{33i}}\right)$$

$$K_i=\sqrt{\frac{a_{11i}a_{33i}-a_{13i}^2}{a_{22i}a_{33i}-a_{23i}^2}};\qquad \chi_i=\frac{(a_{13i}-a_{23i})a_{33i}}{a_{22i}a_{33i}-a_{23i}^2-a_{11i}a_{33i}+a_{13i}^2},$$

a_{kti} $(k,t=1,2,3)$, a_{44} - упругие постоянные материала i-ого слоя. С помощью зависимостей (2) определяются выражения для дополнительных деформаций и напряжений в слое i:

$$\varepsilon_{ri}=\frac{\partial u_i}{\partial\rho}=C_{1i}\varphi_{1i}+K_iC_{2i}\varphi_{2i}\rho^{K_i-1}-K_iC_{3i}\varphi_{3i}\rho^{-K_i-1},$$

$$\varepsilon_{\theta i}=\frac{u_i}{\rho}=C_{1i}\varphi_{1i}+C_{2i}\varphi_{2i}\rho^{K_i-1}+C_{3i}\varphi_{3i}\rho^{-K_i-1},$$

$$\varepsilon_{zi}=\frac{\partial w_i}{\partial z}=C_{1i}a_{33i},\quad \gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\theta\rho,\quad \gamma_{r\theta}=\gamma_{rz}=0 \qquad (3)$$

$$\sigma_{r\partial i}=C_{1i}\chi_i+C_{2i}\rho^{K_i-1}+C_{3i}\rho^{-K_i-1},$$

$$\sigma_{\theta\partial i}=C_{1i}\chi_i+K_iC_{2i}\rho^{K_i-1}-K_iC_{3i}\rho^{-K_i-1},$$

$$\sigma_{z\partial i}=C_{1i}\left(1-\frac{a_{31i}}{a_{33i}}\chi_i-\frac{a_{32i}}{a_{33i}}\chi_i\right)-\left(\frac{a_{31i}}{a_{33i}}+\frac{a_{32i}}{a_{33i}}K_i\right)C_{2i}\rho^{K_i-1}-$$

$$-\left(\frac{a_{31i}}{a_{33i}}-\frac{a_{32i}}{a_{33i}}K_i\right)C_{3i}\rho^{-K_i-1},\quad \tau_{\theta z\partial i}=\frac{1}{a_{44i}}\theta\rho. \qquad (4)$$

Подставив (3),(4) в условия

$$\varepsilon_{\theta 1}\Big|_{\rho=R_1}=\varepsilon_{\theta b},\quad \varepsilon_{z1}\Big|_{\rho=R_1}=\varepsilon_{zb},\quad \gamma_{\theta z1}\Big|_{\rho=R_1}=\gamma_{\theta zb},\quad \sigma_{r\partial 1}\Big|_{\rho=R_1}=0, \qquad (5)$$

найдём

$$C_{11}=\frac{\varepsilon_{zb}}{a_{331}},\quad \theta=\frac{\gamma_{\theta zb}}{R_1},\quad C_{21}=\frac{R_1^{1-K_1}}{\varphi_{21}-\varphi_{31}}\left[\varepsilon_{\theta b}+\varepsilon_{zb}\left(\frac{\chi_1\varphi_{31}}{a_{331}}-\frac{\varphi_{11}}{a_{331}}\right)\right],$$

$$C_{31}=\frac{R_1^{1+K_1}}{\varphi_{31}-\varphi_{21}}\left[\varepsilon_{zb}\left(\frac{\chi_1\varphi_{21}}{a_{331}}-\frac{\varphi_{11}}{a_{331}}\right)+\varepsilon_{\theta b}\right]. \qquad (6)$$

Выполняя условия на стыках слоёв

$$u_i\Big|_{\rho=R_{i+1}}=u_{i+1}\Big|_{\rho=R_{i+1}},\quad w_i\Big|_{\rho=R_{i+1}}=w_{i+1}\Big|_{\rho=R_{i+1}},\quad \sigma_{r\partial i}\Big|_{\rho=R_{i+1}}=\sigma_{r\partial i+1}\Big|_{\rho=R_{i+1}}, \qquad (7)$$

найдём остальные коэффициенты

$$C_{1i+1}=C_{1i}\frac{a_{33i}}{a_{33i+1}},\quad C_{2i+1}=\frac{R_{i+1}^{-K_{i+1}}}{\varphi_{2i+1}-\varphi_{3i+1}}\left\{C_{1i}\left(\varphi_{1i}-\frac{a_{33i}}{a_{33i+1}}\varphi_{1i+1}\right)R_{i+1}+C_{2i}\varphi_{2i}R_{i+1}^{K_i}+\right.$$

$$\left.+C_{3i}\varphi_{3i}R_{i+1}^{-K_i}-\varphi_{3i+1}R_{i+1}C_{1i}\left(\chi_i-\chi_{i+1}\frac{a_{33i}}{a_{33i+1}}\right)-\varphi_{3i+1}C_{2i}R_{i+1}^{K_i}-\varphi_{3i+1}C_{3i}R_{i+1}^{-K_i}\right\},$$

$$C_{3i+1}=\frac{R_{i+1}^{K_{i+1}}}{\psi_{2i+1}-\psi_{3i+1}}\Big\{\psi_{2i+1}R_{i+1}C_{1i}\Big(\chi_i-\chi_{i+1}\frac{a_{33i}}{a_{33i+1}}\Big)+\psi_{2i+1}C_{2i}R_{i+1}^{K_i}+\psi_{2i+1}C_{3i}R_{i+1}^{-K_i}-$$

$$-C_{1i}R_{i+1}\Big(\varphi_{1i}-\frac{a_{33i}}{a_{33i+1}}\varphi_{1i+1}\Big)-C_{2i}\varphi_{2i}R_{i+1}^{K_i}-C_{3i}\varphi_{3i}R_{i+1}^{-K_i}\Big\}. \quad (8)$$

Учитывая, что $\sigma_{r\partial m}\big|_{\rho=r}=-\sigma_r$, получим формулу для расчёта радиального остаточного напряжения по измеренным деформациям:

$$\sigma_r(r)=-C_{1m}\chi_m-C_{2m}r^{K_m-1}-C_{3m}r^{-K_m-1} \quad (9)$$

С целью определения осевого напряжения, выразим силу $N(r)$ через дополнительные напряжения, взятые по формулам (4):

$$N(r)=2\pi\int_{R_1}^{r}\rho\sigma_{z\partial}(\rho)d\rho=2\pi\Big\{\sum_{i=1}^{m-1}\Big[\frac{R_{i+1}^2-R_i^2}{2}C_{1i}\psi_{1i}+\frac{R_{i+1}^{1+K_i}-R_i^{1+K_i}}{1+K_i}\psi_{2i}C_{2i}+$$

$$+\frac{R_{i+1}^{1-K_i}-R_i^{1-K_i}}{1-K_i}\psi_{3i}C_{3i}\Big]+\frac{r^2-R_m^2}{2}C_{1m}\psi_{1m}+\frac{r^{1+K_m}-R_m^{1+K_m}}{1+K_m}\psi_{2m}C_{2m}+\frac{r^{1-K_m}-R_m^{1-K_m}}{1-K_m}\psi_{3m}C_{3m}\Big\} \quad (10)$$

$$\psi_{1i}=\Big(1-\frac{a_{31i}}{a_{33i}}\chi_i-\frac{a_{32i}}{a_{33i}}\chi_i\Big),\quad \psi_{2i}=-\Big(\frac{a_{31i}}{a_{33i}}+\frac{a_{32i}}{a_{33i}}K_i\Big),\quad \psi_{3i}=\Big(\frac{a_{32i}}{a_{33i}}K_i-\frac{a_{31i}}{a_{33i}}\Big).$$

Взяв левую часть соотношения (10) по формуле (1) и дифференцируя (10) по r, получим следующую зависимость:

$$\sigma_z(r)=-\frac{1}{r}\Big\{\sum_{i=1}^{m-1}\Big[\frac{R_{i+1}^2-R_i^2}{2}\psi_{1i}\frac{dc_{1i}}{dr}+\frac{R_{i+1}^{1+K_i}-R_i^{1+K_i}}{1+K_i}\psi_{2i}\frac{dc_{2i}}{dr}+\frac{R_{i+1}^{1-K_i}-R_i^{1-K_i}}{1-K_i}\psi_{3i}\frac{dc_{3i}}{dr}\Big]+$$

$$+C_{1m}\psi_{1m}r+\frac{r^2-R_m^2}{2}\psi_{1m}\frac{dc_{1m}}{dr}+\psi_{2m}C_{2m}r^{K_m}+\frac{r^{1+K_m}-R_m^{1+K_m}}{1+K_m}\psi_{2m}\frac{dc_{2m}}{dr}+$$

$$+\psi_{3m}C_{3m}r^{-K_m}+\frac{r^{1-K_m}-R_m^{1-K_m}}{1-K_m}\psi_{3m}\frac{dc_{3m}}{dr}\Big\}. \quad (11)$$

Окружное напряжение определяется из уравнения равновесия:

$$\sigma_\theta(r)=\frac{d}{dr}(r\sigma_r)=-\chi_m\frac{d}{dr}(r\cdot C_{1m})-\frac{d}{dr}(r^{K_m}C_{2m})-\frac{d}{dr}(r^{-K_m}C_{3m}). \quad (12)$$

Выразим далее момент $M(r)$ через дополнительные напряжения и учтём соотношения (4), (6):

$$M(r)=2\pi\int_{R_1}^{r}\rho^2\tau_{\theta z\partial}(\rho)d\rho=2\pi\frac{\gamma_{\theta zв}}{R_1}\left[\frac{r^4-R_m^4}{4a_{44m}}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{R_{i+1}^4-R_i^4}{4a_{44i}}\right]. \qquad (13)$$

Из (1) и (13) можно найти

$$\tau_{\theta z}(r)=\frac{-1}{2\pi r^2}\frac{dM}{dr}=\frac{-1}{r^2R_1}\left[\frac{r^4-R_m^4}{4a_{44m}}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{R_{i+1}^4-R_i^4}{4a_{44i}}\right]\frac{d\gamma_{\theta zв}}{dr}-\frac{r}{R_1}\frac{\gamma_{\theta zв}}{a_{44m}}. \qquad (14)$$

Угловая деформация обычно определяется с помощью розетки из трёх датчиков (рис. 2)

$$\gamma_{\theta zв}(r)=2\varepsilon_{uв}(r)-\varepsilon_{zв}(r)-\varepsilon_{\theta в}(r). \qquad (15)$$

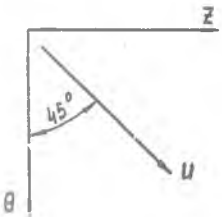

Рис. 2

Вместо деформаций можно измерять приращение внутреннего радиуса ΔR_1 , длины $\Delta\ell$ и относительный угол закручивания θ .

Деформации, используемые в формулах (9), (11), (12), (14), пропорциональны этим перемещениям:

$$\varepsilon_{\theta в}=\frac{\Delta R_1}{R_1},\quad \varepsilon_{zв}=\frac{\Delta\ell}{\ell},\quad \theta=\frac{\gamma_{\theta zв}}{R_1}. \qquad (16)$$

Определение напряжений во внутренних слоях

Производится расточка цилиндра с измерением окружной $\varepsilon_{\theta н}(r)$, осевой $\varepsilon_{zн}(r)$ и угловой $\gamma_{\theta zн}(r)$ деформаций на наружной поверхности цилиндра. Эквивалентное расточке нагружение показано на рис. 3:

$$p(r)=\sigma_r(r),\quad N(r)=2\pi\int_{R_1}^{r}\rho\sigma_z(\rho)d\rho,\quad M(r)=2\pi\int_{R_1}^{r}\rho^2\tau_{\theta z}(\rho)d\rho. \qquad (17)$$

Дополнительные перемещения ищем в виде (2). Тогда дополнительные деформации и напряжения выразятся формулами (3), (4). Из условий

$$\varepsilon_{\theta n}\Big|_{\rho=R_{n+1}}=\varepsilon_{\theta н},\quad \varepsilon_{zn}\Big|_{\rho=R_{n+1}}=\varepsilon_{zн},\quad \gamma_{\theta zn}\Big|_{\rho=R_{n+1}}=\gamma_{\theta zн},\quad \sigma_{r\partial n}\Big|_{\rho=R_{n+1}}=0 \qquad (18)$$

определяются коэффициенты

$$C_{1n}=\frac{\varepsilon_{zн}}{a_{33н}},\quad \theta=\frac{\gamma_{\theta zн}}{R_{n+1}},\quad C_{2n}=\frac{R_{n+1}^{1-K_n}}{\varphi_{2n}-\varphi_{3n}}\left[\varepsilon_{\theta н}+\varepsilon_{zн}\left(\frac{\chi_n\varphi_{3n}}{a_{33n}}-\frac{\varphi_{1n}}{a_{33n}}\right)\right],$$

$$C_{3n}=\frac{R_{n+1}^{1+K_n}}{\varphi_{3n}-\varphi_{2n}}\left[\varepsilon_{\theta н}+\varepsilon_{zн}\left(\frac{\chi_n\varphi_{2n}}{a_{33n}}-\frac{\varphi_{1n}}{a_{33n}}\right)\right]. \qquad (19)$$

Остальные коэффициенты можно найти из условий (7). При

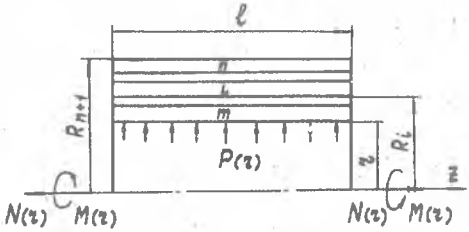

Рис. 3.

этом получим формулы (8), но у всех величин, кроме R_{i+1} нужно поменять местами индексы $i+1$ и i. Расчётные зависимости выводятся тем же способом, что и в случае обточки цилиндра:

$$\sigma_r(r)=-C_{1m}\chi_m-C_{2m}r^{K_m-1}-C_{3m}r^{-K_m-1},$$

$$\sigma_\theta(r)=-\chi_m\frac{d}{dr}(r\cdot C_{1m})-\frac{d}{dr}(C_{2m}r^{K_m})-\frac{d}{dr}(C_{3m}r^{-K_m}),$$

$$\sigma_z(r)=\frac{1}{r}\Big\{\sum_{i=m+1}^{n}\Big[\psi_{1i}\frac{R_{i+1}^2-R_i^2}{2}\frac{dc_{1i}}{dr}+\psi_{2i}\frac{R_{i+1}^{1+K_i}-R_i^{1+K_i}}{(1+K_i)}\frac{dc_{2i}}{dr}+\psi_{3i}\frac{R_{i+1}^{1-K_i}-R_i^{1-K_i}}{(1-K_i)}\frac{dc_{3i}}{dr}\Big]-$$

$$+\psi_{1m}\frac{R_{m+1}^2-r^2}{2}\frac{dc_{1m}}{dr}-\psi_{1m}c_{1m}r+\psi_{2m}\frac{R_{m+1}^{1+K_m}-r^{1+K_m}}{(1+K_m)}\frac{dc_{m2}}{dr}+\psi_{3m}\frac{R_{m+1}^{1-K_m}-r^{1-K_m}}{(1-K_m)}\frac{dc_{3m}}{dr}-$$

$$-\psi_{2m}c_{2m}r^{K_m}-\psi_{3m}c_{3m}r^{-K_m}$$

$$\tau_{\theta z}(r)=\frac{1}{r^2R_{n+1}}\Big[\frac{R_{m+1}^4-r^4}{4a_{44m}}+\sum_{i=m+}^{n}\qquad\frac{d\gamma_{\theta zн}}{dr}-\frac{r}{R_{n+1}}\frac{\gamma_{\theta zн}}{a_{44m}}. \qquad (20)$$

Как и выше, угловая деформация определяется с помощью розетки датчиков (рис. 2):

$$\gamma_{\theta z H}(r) = 2\varepsilon_{uH}(r) - \varepsilon_{zH}(r) - \varepsilon_{\theta H}(r). \qquad (2I)$$

Вместо деформаций можно измерить приращение наружного радиуса ΔR_{n+1}, длины $\Delta \ell$ и относительный угол закручивания θ, а по ним найти

$$\varepsilon_{\theta H} = \frac{\Delta R_{n+1}}{R_{n+1}}, \quad \varepsilon_{zH} = \frac{\Delta \ell}{\ell}, \quad \theta = \frac{\gamma_{\theta z H}}{R_{n+1}}. \qquad (22)$$

Определение напряжений в наружных и внутренних слоях на одном образце.

Сначала цилиндр растачивается до $r = R_\ell$ и определяются остаточные напряжения во внутренних слоях по формулам (20) - (22). Для $r = R_\ell$ находятся также дополнительные напряжения по формулам (4). Затем цилиндр обтачивается и из соотношений (9), (II), (I2), (I4) определяется сумма исходных и дополнительных остаточных напряжений в наружных слоях. Вычитая известные дополнительные напряжения, получим искомые остаточные напряжения в наружных слоях.

В частном случае, когда слои изотропны, полученные соотношения совпадают с формулами работы [3].

Литература

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. Машгиз, 1963.
2. Дехтярь Л.И. "Заводская лаборатория", 1968, № 4.
3. Иванов С.И., Глазырин В.Н. Труды КуАИ, вып. 53, 1971.
4. Иванов С.И. Определение остаточных напряжений в цилиндре. Труды КуАИ, вып.39, 1968.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.