М. Я. Лихтциндер

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ВХОДАХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

В настоящее время нашли большое применение методы определения параметров элементов и систем по их переходным процессам. При этом в качестве возмущающей функции на входе обычно используется единичный скачок, а искомый параметр (например, постоянная времени) определяется по характерным точкам. В большинстве случаев отыскание таких характерных точек затруднительно. Например, при определении постоянной времени апериодических звеньев или систем автоматического регулирования по переходному процессу при воздействии единичного скачка требуется найти такую точку кривой выходной величины, которая составляет 63,2% своего установившегося значения. Ей соответствует время, равное искомой постоянной времени.

В статье рассмотрены способы, упрощающие определение характерных точек, по которым определяются параметры апериодических звеньев по переходному процессу при воздействии экспоненциальной функции на входе.

1. Рассмотрим случай, когда на входе последовательной RL-цепочки действует экспоненциальная ЭДС $e(t) = EmE^{-kt}$ (рис. 1).

Переходный ток в цепи имеет выражение:

$$i(t) = I_m \frac{1}{1-k\tau}\left(e^{-kt} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad (1)$$

где: $I_m = \frac{E_m}{R}$:

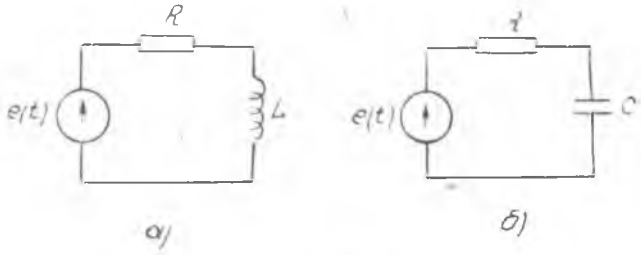
$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Введем обозначения:

$\xi = k \cdot \tau$ — безразмерная постоянная времени;

$\varkappa = \frac{i(t)}{I_m}$ — безразмерный ток;

$$\eta = \frac{t}{\tau} \text{ — безразмерное время.} \tag{1a}$$



$$e(t) = E_m e^{-\varkappa t}$$

Рис. 1.

Выражение (1) перепишется в безразмерной форме

$$\varkappa_L(\eta) = \frac{1}{1-\xi}\left(e^{-\xi\eta} - e^{-\eta}\right); \tag{2}$$

(2) не определено в точке $\xi=1$.

Обозначим $\varkappa_{Lp} = \varkappa_{Lp}$ при $\xi = 1$. Применяя правило Лопиталя (2), получим:

$$\varkappa_{LP} = e^{-\eta} \cdot \eta. \tag{2a}$$

Исследование (2) и (2а) на максимум по η приводит к выражениям:

$$\varkappa_{Lmax} = \xi^{\frac{\xi}{1-\xi}} \tag{3}$$

при $\eta_{max} = \frac{\ln\xi}{\xi - 1}$ и

$$\varkappa_{Lmax} = e^{-1}$$

при $\eta_{pmax} = 1$ и $\xi = 1$.

Исследование (3) приводит к выводу, что значение K_L при $\xi=1$ является точкой перегиба.

Таким образом, максимальное значение безразмерного тока при изменении постоянной времени источника падающей экспоненциальной ЭДС определяется выражением [3], которое при $\xi = 1$ имеет точку перегиба.

Как известно, напряжение на индуктивности равно:

$$U_L = L\frac{di}{dt}.$$

Введя обозначение

$$\nu_L = \frac{U_L}{E_m}$$

безразмерное напряжение на индуктивности и с учетом (1а) и (2), напряжение на индуктивности примет вид:

$$\nu_L = \frac{\partial \alpha_L}{\partial \eta} = \frac{1}{1-\xi}\left(e^{-\eta} - \xi e^{-\xi\eta}\right). \tag{4}$$

(4) не определено в точке $\xi = 1$.

Обозначив $\nu_L = \nu_{Lp}$ при $\xi = 1$, с учетом (2а), запишем:

$$\nu_{Lp} = e^{-\eta}(1-\eta). \tag{5}$$

Исследование (5) и (4) на минимум приводит к выражениям:

$$\nu_{Lmin} = -\xi^{\frac{1-\xi}{1-\xi}} \tag{6}$$

при $\eta_{imin} = \frac{2}{\xi - 1}\ln\xi$ и

$$\nu_{Lpmin} = -e^{-2}$$

при $\eta_{ipmin} = 2$ и $\xi = 1$.

Исследование [6] на минимум по ξ приводит к выражению:

$$\nu_{Lminmin} = \nu_{Lpmin} = -e^{-2}. \tag{7}$$

Таким образом, минимальное значение безразмерного напряжения на индуктивности в последовательной RL-цепочке при изменении постоянной времени источника экспоненциальной ЭДС определяется выражение (7) и достигает своего наименьшего значения при равенстве постоянных времени источника питания и RL-цепочки ($\xi=1$ или $\frac{1}{k} = \tau$).

2. В случае последовательной RC-цепочки, на входе которой действует ЭДС: $e(t) = E_m \cdot e^{-kt}$ (рис. 1б), выражение для переходного тока имеет вид:

$$i_c = \frac{I_m}{1 - k\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - k\tau \cdot e^{-kt}\right), \tag{8}$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{R};$$

$$\tau = RC,$$

С учетом обозначений (1а) выражение (8) перепишется в безразмерной форме:

$$\varkappa_c = \frac{1}{1 - \xi}\left(e^{-\eta} - \xi \cdot e^{-\xi\eta}\right). \tag{9}$$

Как известно, напряжение на конденсаторе равно:

$$U_c = \frac{1}{C}\int_0^t i_c \cdot dt.$$

Введя обозначение $\nu_c = \frac{U_c}{E_m}$ (безразмерное напряжение на конденсаторе) и с учетом (1а) и (9) напряжение на конденсаторе в безразмерной форме примет вид:

$$\nu_c = \int_0^\eta \varkappa_c \cdot d\eta = \frac{1}{1 - \xi}\left(e^{-\xi\eta} - e^{-\eta}\right). \tag{10}$$

Сравнивая [4] с [9] и [2] с [10], замечаем их полное совпадение:

$$\varkappa_L = \nu_c \text{ и } \nu_L = \varkappa_c \tag{11}$$

Следовательно, все полученные выше соотношения, справедливые для $\varkappa_L$ и ν_L, имеют место соответственно для ν_c и $\varkappa_c$.

Заряд, протекающий по электрической цепи, равен

$$Q = \int_0^\infty i \cdot dt.$$

Введя обозначение $q = \frac{Q}{I_m \cdot \tau}$ (безразмерный заряд) и с учетом (1а) получим выражение

$$q = \int_0^\infty \varkappa \cdot d\eta. \tag{12}$$

Для RL-цепочки (12) с учетом (2) примет вид:

$$q_L = \frac{1}{\xi}. \tag{13}$$

Для RC-цепочки определим величину заряда одного знака ($|Q| = -Q$). Приравнивая (9) нулю, определим τ_{lo}, при котором кривая безразмерного тока пересекает ось абсцисс.

$$\tau_{lo} = \frac{\ln \xi}{\xi - 1}. \tag{19}$$

С учетом (9) (12) перепишется

$$q_c = \int_0^{\tau_{lo}} \varkappa_c \cdot d\tau_l = \xi \frac{\xi}{1 - \xi}.$$

Полученное выражение совпадает с (3)

$$\varkappa_{Lmax} = \nu_{cmax} = q_c.$$

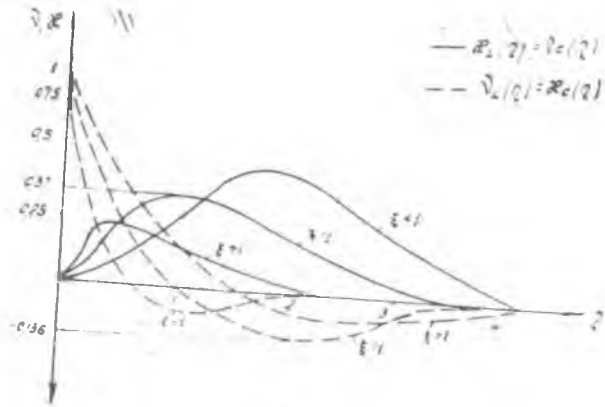


Рис. 2.

На рис. 2 представлены кривые $\varkappa_L(\tau_l) = \nu_c(\tau_l)$; $\nu_L(\tau_l) = \varkappa_c(\tau_l)$ для различных значений ξ

Зависимости:

$$\varkappa_{L\,max}(\xi) = \nu_{cmax}(\xi) = q_c(\xi) \text{ — выражение (3)}$$

$$|\nu_{L\,min}(\xi)| = |\varkappa_{cmin}\xi|; \text{ — выражение (6)}$$

$$q_L = \frac{1}{\xi}; \text{ — выражение (13)}$$

в логарифмическом масштабе показаны на рис. 3.

Из графиков рис. 2, 3 следуют практические выводы для схем рис. 1 при ЭДС: $e(t) = E_m \cdot e^{-kt}$.

а) кривые тока в RC-цепочке и напряжения на конденсаторе в RC-цепочке имеют максимум по времени (рис. 2).

б) кривые тока в RC-цепочке и напряжение на индуктивности в RL-цепочке имеют минимум по времени (рис. 2).

в) при изменении постоянной времени источника экспоненциальной ЭДС значения тока в RC-цепочке и напряжения на индуктивности в RL-цепочке достигают минимального отрицательного значения при равенстве указанных постоянных времени (рис. 3).

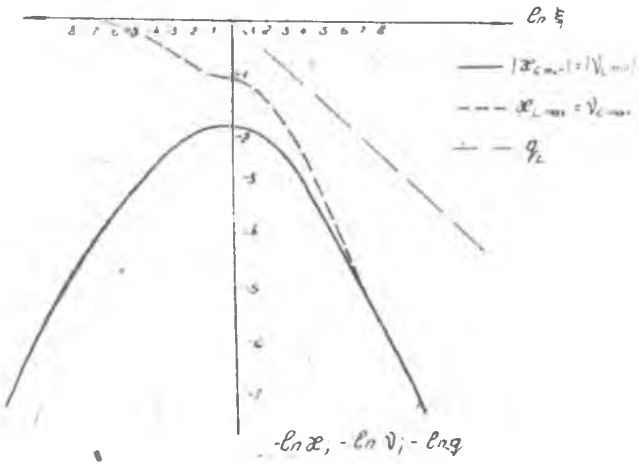


Рис. 3.

Эти положения могут быть использованы для измерения постоянной времени RL и RC-цепей:

а) изменяя постоянную времени источника ЭДС до получения максимального отрицательного тока в случае RC-цепи или максимального отрицательного напряжения на индуктивности в случае RL-цепи, можно добиться условия равенства постоянных времени источника и измеряемой цепи.

б) задавшись произвольной постоянной времени источника ЭДС и зная полученные при этом максимальные (или минимальные) значения соответственно для токов или напряжений, можно, пользуясь рис. 3, определить постоянную времени измеряемых RL- или RC-цепочек.

в) в случае RL-цепи для произвольной постоянной времени источника ЭДС можно измерить величину заряда одного знака, протекающего по цепи (например баллистическим способом) и определить постоянную времени RL-цепи согласно (13) или рис. 3. Заметим, что при ступенчатом воздействии на входе RL-цепочки этого нельзя было сделать.

В качестве источника экспоненциальной ЭДС используется высокоточная разрядка RC-цепочка, напряжение конденсатора которой подключено к входу балансного катодного повторителя или операционного усилителя.

Из сказанного следует вывод, что в ряде случаев при определении параметров систем автоматического регулирования и других измерениях целесообразно в качестве типовой возмущающей функции вместо единичной, линейно-изменяющейся или синусоидальной использовать экспоненциальную функцию:

$$y = Ae^{-kt}.$$