С. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

ПОСТРОЕНИЕ ТИПОВЫХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Пороговые функции (ПФ) привлекают к себе пристальное внимание ученых, объясняемое широким классом физических элементов, реализующих эти функции [1]. Различного рода исследования класса ПФ требуют рассмотрения всех пороговых функций, зависящих от n-переменных. Однако при возрастании числа n число пороговых функций m очень быстро увеличивается. Так, уже для $n=4$ число $m=1880$ [1]. Это обстоятельство значительно усложняет исследования. Поэтому естественно стремление разбить весь класс пороговых функций P_n на группы с адэкватными свойствами входящих в них функций. Тогда при исследованиях достаточно было бы рассмотреть только по одному представителю из каждой группы так называемых типовых пороговых функций. При этом возникает задача разработки алгоритма построения класса типовых пороговых функций P_{nm}, который бы позволил избежать полного перебора функций от n-переменных. Указанным вопросам и посвящена данная работа.

Основные понятия

Функция $f(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_k;\ldots;\ x_n)$ называется пороговой, если она может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_\kappa;\ \ldots\ ;\ x_n) = Sg\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_\kappa x_\kappa - \Theta\right),$$

где

$$Sg\ Z = \begin{cases} 0, & \text{если } z < 0 \\ 1, & \text{если } z \geqslant 0 \end{cases}$$

$x_\kappa = 0;\ 1;\ \kappa = 1;\ 2\ ;\ldots;\ n;$

$_\kappa$ — $(\kappa = 1;\ 2;\ \ldots\ ;\ n)$ — любые действительные числа.

Введем векторы

$$x = (x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_\kappa;\ \dots\ ;\ x_n)$$

$$\xi = (\xi_1;\ \xi_2;\ \dots\ ;\ \xi_\kappa;\ \dots\ ;\ \xi_n).$$

Тогда пороговую функцию можно представить так:

$$f(x) = Sg\,(\xi x - \Theta). \tag{1}$$

Обозначим через A_f множество всех векторов, на которых функция $f(x)$ принимает значение 1. Если $f(x)$ — пороговая функция, то A_f назовем пороговым множеством. Вектор ξ, удовлетворяющий равенству (1), назовем реализующим вектором. Введем понятие центрального вектора множества A_f. Обозначим радиус-вектор центра полного множества N векторов x через $r = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \dots;\frac{1}{2};\dots;\ \frac{1}{2}\right)$.

Вектор δ назовем центральным вектором множества A_f, если

$$\delta = 2\sum_{x \in A_f}(x - r). \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что вектор δ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} \delta_\kappa &= S^1_{kf} - S^0_{kf} \\ S_f &= S'_{kf} + S^0_{kf} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где δ_κ — k-ая координата центрального вектора;

S'_{kf} — число векторов $x \in A_f$, у которых $x_\kappa = 1$.

S^0_{kf} — число векторов $x \in A_f$, у которых $x_\kappa = 0$.

S_f — общее число векторов в множестве A_f.

Из системы уравнений (3) по значениям δ_κ и S_f нетрудно определить $S^1_{\kappa f}$ и $S^0_{\kappa f}$.

Очевидно, что если у центрального вектора некоторого порогового множества A_f,

то

$$\left.\begin{aligned} &\delta_i = \delta_j \\ &S^1_{if} = S^1_{jf};\ S^0_{if} = S^0_{jf} \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Построим группу функций, представляемых в виде

$$f^{\sigma_0}\left(x^{\sigma_{i(1)}}_{i(1)};\ x^{\sigma_{i(2)}}_{i(2)};\ \dots\ ;\ x^{\sigma_{i(n)}}_{i(n)}\right), \tag{5}$$

где $(n+1)$ — мерный вектор

$$\sigma = (\sigma_0;\ \sigma_{i(1)};\ \sigma_{i(2)};\ \dots\ ;\ \sigma_{i(n)}), \tag{6}$$

приобретает все возможные значения из полного $(n+1)$ — мерного множества N.

Последовательность i(1); i(2) ...; i(n) приобретает все возможные значения, удовлетворяющие равенству

$$L = \begin{pmatrix} 1;\ \dots\ 2;\ \dots\ ;\ n \\ i(1);\dots i\,(2);\ \dots\ ;\ i(n) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь L — оператор взаимно-однозначного отображения множества первых n натуральных чисел на самого себя, то есть L есть n-мерная подстановка.

$\sigma_e=0$; 1, причем $x^0=x$; $x^1=x$; $l=0$; 1; 2; ...; n. Можно показать, что эта группа функций обладает следующими свойствами.

1. Если хотя бы одна функция из группы пороговая, то все функции этой группы пороговые.

2. Реализующие векторы функций, входящих в одну группу могут быть такими, что отличие их друг от друга будет заключаться только в изменении знака одного или нескольких разрядов и в перестановке разрядов местами.

Более точно эти свойства выражаются следующим образом:

Если функция $f(x_1; x_2; \ldots; x_k; \ldots; x_n)$ пороговая и для нее реализующим вектором является вектор $\xi=(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_k; \ldots; \xi_n)$, а центральным вектором: $\delta=(\delta_1; \delta_2; \ldots; \delta_k; \ldots; \delta_n)$ то функция

$$f^{\sigma_0}\left(x_{i(1)}^{\sigma_{i(1)}}; x_{i(2)}^{\sigma_{i(2)}}; \ldots; x_{i(k)}^{\sigma_{i(k)}}; \ldots; x_{i(n)}^{\sigma_{i(n)}}\right),$$

тоже пороговая и векторы

$$\eta=((-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(1)}}\xi_{i(1)};\ldots;(-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(k)}}\xi_{i(k)}; \ldots; (-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(n)}}\xi_{i(n)}) \quad (8)$$

$$\gamma=\left((-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(1)}}\delta_{i(1)}; \ldots; (-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(k)}}\delta_{i(k)}; \ldots; (-1)^{\sigma_0+\sigma_{i(n)}}\delta_{i(n)}\right) \quad (9)$$

являются соответственно реализующими и центральными векторами для этой функции.

Выделим из такой группы функцию, у которой центральный вектор δ имеет неотрицательные разряды, удовлетворяющие неравенствам

$$\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_n \geqslant 0.$$

и у которой пороговое множество A_f содержит S_f элементов, причем $S_f \leqslant 2^{n-1}$. Эту функцию назовем типовой пороговой функцией.

Следует отметить, что выбор типовой функции является произвольным и диктуется только удобством записи условий.

Подобные определения типовой функции были выведены во многих работах, в частности в [2] и [3].

Таким образом, мы определили класс типовых пороговых функций P_{nm}. Рассмотрим свойства этих функций.

Свойства типовых пороговых функций

Теорема 1. В группе функций, определяемых выражением (5), существует только одна типовая функция.

Доказательство. Предположим, что кроме типовой функции $f(x_1; x_2;\ldots; x_n)$ существует типовая функция φ. Так как она по

определению принадлежит к этой же группе, то, следовательно, ее можно выразить в виде

$$\varphi = f^{\sigma_0}\left(x_{i(1)}^{\sigma_{i(1)}};\ x_{i(2)}^{\sigma_{i(2)}};\ \ldots\ ;\ x_{i(n)}^{\sigma_{i(n)}}\right),$$

где σ и $i(1)$; $i(2)$; ... ; $i(n)$ определяются из (6) и (7).

Пусть $\xi = (\xi_1;\ \xi_2;\ <\xi_n)$ — реализующий вектор функции f. Из определения типовой пороговой функции заключаем (так как функция φ типовая) следующее:

1) $\sigma_0 = 1$ только в том случае, когда $S_f = 2^{n-1}$, потому что если бы $S_f < 2^{n-1}$ и $\sigma_0 = 1$, то $S_\varphi = 2^n - S_f > 2^{n-1}$, что противоречило бы условию $\varphi \in P_{nm}$;

2) если $\sigma_0 = 0$, то $\sigma_{i(\kappa)} = 1$ только в том случае, когда в центральном векторе δ функции f $\delta_\kappa = 0$; в противном случае для одной из функций f или φ *к-ый* разряд центрального вектора был бы отрицательным, что противоречит условию $f \in P_{nm}$; $\varphi \in P_{nm}$; по тем же причинам, если $\sigma_0 = 1$, то $\sigma_{i(\kappa)} = 0$, только в том случае, если в центральном векторе δ $\delta_\kappa = 0$;

3) $\kappa \neq i(\kappa)$ только в том случае, если существует такое значение j, при котором в центральном векторе δ функции f $\delta_j = \delta_\kappa$, так как, в противном случае в центральном векторе одной из функций f или φ *к-ый* разряд был бы или меньше некоторого l-го разряда при $l > \kappa$ или больше некоторого i-го разряда при $i < \kappa$, а то и другое противоречит условию $f \in P_{nm}$; $\varphi \in P_{nm}$.

Из формулы (8) заключаем, что реализующим вектором функции φ может быть вектор

$$\eta = \left((-1)^{\sigma_0 + \sigma_{i(1)}}\xi_{i(1)};\ \ldots\ ;\ (-1)^{\sigma_0 + \sigma_{i(k)}}\xi_{i(k)};\ \ldots\ ;\ (-1)^{\sigma_0 + \sigma_{i(n)}}\xi_{i(n)}\right)$$

Но на основании изложенного в пунктах 1, 2 и 3 имеем

$$(-1)^{\sigma_0 + \sigma_{i(k)}}\xi_{i(k)} = \xi_\kappa \quad (k = 1;\ 2;\ \ldots\ ;\ n),$$

то есть $\eta = \xi$ — реализующий вектор функции f.

Если учесть, кроме того, что $S = S_\varphi$, то получим, что

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n) \equiv \varphi(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Группы с различными типовыми функциями образуют непересекающиеся множества. Действительно, предположим, что существует такая функция, $f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, которая входит одновременно в две группы: в группу с типовой функцией $\varphi_1(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ и в группу с типовой функцией $\varphi_2(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n)$.

Тогда имеют место тождества:

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n) \equiv \varphi_1^{\sigma_0}\left(x_{i(1)}^{\sigma_{i(1)}};\ x_{i(2)}^{\sigma_{i(2)}};\ \ldots\ ;\ x_{i(n)}^{\sigma_{i(n)}}\right);$$

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots\ ;\ x_n) \equiv \varphi_2^{\sigma_0'}\left(x_{j(2)}^{\sigma'_{j(2)}};\ \ldots\ ;\ x_{j(n)}^{\sigma'_{j(n)}}\right)$$

Откуда

$$\varphi_1^{\sigma_0}(x_{i(1)}^{\sigma_{i(1)}};\ x_{i(2)}^{\sigma_{i(2)}};\ \dots\ ;\ x_{i(n)}^{\sigma_{i(n)}}) \equiv \varphi_2^{\sigma_0}\,(x_{j(1)}^{\sigma'_{j(1)}};\ x_{j(2)}^{\sigma'_{j(2)}};\ \dots\ ;\ x_{j(n)}^{\sigma'_{j(n)}})$$

Учитывая что $(z^{\sigma_l})_e^{\sigma_l} = z$ получаем:

$$\varphi_1(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n) \equiv (\varphi_2^{\sigma_0})^{\sigma_0}\left[(x_{j(1)}^{\sigma'_{j(1)}});\sigma_{j(1)}^{\sigma_{i(i)}}(x_{j(2)}^{\sigma'_{j(2)}})^{\sigma_{i(2)}};\ \dots\ ;\ (x_{j(n)}^{\sigma'_{j(n)}})^{\sigma_{i(n)}}\right] \equiv$$

$$\equiv \varphi_2^{\sigma_0}(x_{j(1)}^{\sigma''_{j(1)}};\ x_{j(2)}^{\sigma''_{j(2)}};\ \dots\ ;\ x_{j(n)}^{\sigma''_{j(n)}})$$

здесь: $z^{\sigma''_{j(k)}} = (z^{\sigma_{j(k)}})^{\sigma_{l(k)}}$ для любого $k = 0;\ 1;\ 2;\ \dots\ ;\ n$.
Произведем перестановки

$$L = \begin{pmatrix} i(1);\ i(2);\ \dots\ ;\ i(n) \\ j(1);\ j(2);\ \dots\ ;\ j(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1; & 2; & \dots\ ; & n \\ k(1); & k(2); & \dots\ ; & k(n) \end{pmatrix}$$

Получим

$$\varphi_1(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n) \equiv \varphi_2^{\sigma_0}\,(x_{k(1)}^{\sigma''_{k(1)}};\ x_{k(2)}^{\sigma''_{k(2)}};\ \dots\ ;\ x_{k(n)}^{\sigma''_{k(n)}})$$

Следовательно, функция $\varphi_2(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$ — принадлежит к той же группе, что и $\varphi_1(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$. Так как $\varphi_2(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$ должна быть типовой функцией, то по теореме 1

$$\varphi_2(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n) \equiv \varphi_1(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$$

Следовательно, функции $f(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_n)$ может соответствовать только одна типовая функция.

Утверждение доказано.

Из вышеизложенного видно, что класс P_{nm} значительно меньше класса P_n. Количественно это можно выразить следующим образом. Пусть в классе типовых пороговых функций P_{nm} от n-переменных содержится t функций, существенно [4] зависящих от n-переменных, а класс всех пороговых функций P_n содержит p функций, существенно зависящих от n-переменных. Тогда получим

$$2^n \cdot t < p < n \cdot 2^n \cdot t.$$

Теперь перейдем к рассмотрению основного свойства класса типовых пороговых функций. Для этого предварительно докажем некоторые положения.

Лемма 1. Если в реализующем векторе ξ $\xi_i = \xi_j$, то и $\delta_i = \delta_j$.

Лемма 2. Если в центральном векторе δ пороговой функции f $\delta_i > \delta_j$, то в реализующем векторе $\xi_i > \xi_j$.

Лемма 3. Если в центральном векторе δ пороговой функции f $\delta_i = \delta_j$, то существует реализующий вектор, в котором $\xi_i = \xi_j$.

Доказательства аналогичных утверждений можно найти в [5] (стр. 210—212).

Лемма 4. Если в любом реализующем векторе ξ

$$\xi_к = 0, \text{ то и } \delta_к = 0 \tag{10}$$

Действительно, на основании условия (10) заключаем, что любому вектору $a \in A_j$, у которого $a_к = 1$ можно привести в соответствие вектор $b \in A_f$, у которого $b_i = a_i$ при любом $i \neq k$, $b_к = 0$ и обратно. Это значит, что:

$$S^1_{kf} = S^0_{kf} \text{ и } \delta_к = S^1_{kf} - S^0_{kf} = 0.$$

Лемма 5. Если в реализующем векторе $\xi_i > \xi_j$, то

$$\delta_i \geqslant \delta_j.$$

Действительно, т. к. $\xi_i > \xi_j$, то любому вектору $a \in A_j$, у которого $a_j = 1$, можно привести в соответствие вектор $b \in A_f$, у которого также $b_i = 1$.

Следовательно $S^1_i \geqslant S^1_j$, что означает из выражения (3): $\delta_i \geqslant \delta_j$.

Лемма 6. Если в реализующем векторе ξ:

$$\xi_к > 0\,(\xi_к < 0), \text{ то } \delta_к \geqslant 0\,(\delta_к \leqslant 0)$$

Действительно, т. к. $\xi_к > 0\,(\xi_к < 0)$, то любому вектору $a \in A_f$, у которого $a_к = 0\,(a_к = 1)$, можно привести в соответствие такой вектор $b \in A_f$, у которого $b_к = 1\,(b_к = 0)$. Следовательно,

$$S^0_{kf} \leqslant S^1_{kf}\,(S^0_{kf} \geqslant S^1_{kf}) \text{ или } \delta_к \geqslant 0\,(\delta_к \leqslant 0).$$

Лемма 7. Если в центральном векторе δ пороговой функции f: $\delta_к = 0$, то существует такой реализующий вектор ξ, в котором: $\xi_к = 0$.

Доказательство. Пусть одним из реализующих векторов функции f будет вектор:

$$\eta = (\eta_1,\ \eta_2;\ \ldots\ ;\ \eta_{к-1};\ \eta_к;\ \eta_{к+1};\ \ldots\ ;\ \eta_n)$$

в котором $\eta_к \geqslant 0\,(\eta_к \leqslant 0)$. Тогда любому вектору $a \in A_f$, у которого $b_к = 1\,(b_к = 0)$ можно привести в соответствие вектор $b \in A_f$, у которого $b_к = 1\,(b_к = 0)$ $1\ b_i = a_i$ для любого $i \neq k$.

По условию леммы $\delta_к = 0$ и из равенства (3) имеем:

$$S^1_{kf} = S^0_{kf}$$

Отсюда заключаем, что указанное соответствие векторов a и b может быть только взаимооднозначным. То же самое можно сказать и о векторах из множества $\overline{A}_f$.

Следовательно:

$$f\,(x_1;\ \ldots\ ;\ x_{к-1};\ 0;\ x_{к+1};\ \ldots\ ;\ x_n) = f\,(x_1;\ \ldots\ ;\ x_{к-1};\ 1;\ x_{к+1};\ \ldots\ ;\ x_n)$$

при любых значениях $x_1;\ \ldots\ ;\ x_{к-1};\ x_{к+1}\ ;\ \ldots\ ;\ x_n$

Далее имеем:

$$f\,(x_1;\ \ldots\ ;\ x_{к-1};\ 0;\ x_{к+1};\ \ldots\ ;\ x_n) \equiv S_g\,(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \eta_i x_i - \Theta) \equiv$$

$$\equiv f\,(x_1;\ \ldots\ :\ x_{к-1};\ 1;\ x_{к+1};\ \ldots\ ;\ x_n) \equiv S_g\,(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \eta_i x_i + \eta_i - \Theta).$$

Отсюда получаем:

$$f(x_1;\ \dots\ ;\ x_{\kappa-1};\ 0\ x_{\kappa+1};\ \dots\ ;\ x_n) \equiv S_g\ \Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \eta_i x_i - \Theta\Big).$$

$$f\,(x_1;\ \dots\ x_{k-1};\ 1;\ x_{k+1};\ \dots;\quad x_n) \equiv S_g\,\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq \kappa}}^{n} \eta_i x_i - \Theta\Big),$$

Нетрудно видеть, что два указанные тождества охватывают все значения x_κ N. Поэтому можно записать:

$$f\,(x_1;\ \dots\ ;\ x_{k-1};\ x_k\ ;\ x_{k+1};\ \dots\ ;\ x_n) \equiv S_g\,\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n} \eta_i x_i - \Theta\Big).$$

Таким образом, существует такой реализующий вектор ξ, в котором:

$$\xi_i = \eta_i \text{ для всех } i \neq k$$

и:

$$\xi_\kappa = 0$$

Лемма 8. Если функция от n-переменных

$$f\,(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_k;\ \dots\ ;\ x_n) \in P_n, \tag{11}$$

т. е. если f — пороговая функция, то функции от $(n-1)$-ой переменной

$$\begin{gathered} f\,(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ 0;\ \dots\ ;\ x_n) \in P_n \\ f\,(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ 1;\ \dots\ x_n) \in P_n. \end{gathered} \tag{12}$$

также пороговые функции.

Другими словами, (12) является необходимым условием того, чтобы f была пороговой функцией.

Действительно, так как функция (11) — пороговая, то у нее существует реализующий вектор

$$\xi^n = (\xi_1;\ \dots\ ;\ \xi_{k-1};\ \xi_k;\ \xi_{k+1};\ \dots\ ;\ \xi_n)$$

Очевидно, для функций (12) реализующим вектором будет вектор

$$\xi^{n-1} = (\xi_1;\ \dots;\ \xi_{k-1};\ \xi_{k+1};\ \dots\ ;\ \xi_n)\ ,$$

А это означает, что функции (12) — пороговые.

Введем понятие расширенно-типовой функции. Класс таких функций обозначим через $P_{nрт}$.

Расширенно-типовой функцией будем называть любую функцию, у которой в центральном векторе

$$\delta = (\delta_1;\ \delta_2;\ \dots\ ;\ \delta_n)$$

$$\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \delta_3 \geqslant \dots \geqslant \delta_n \geqslant 0.$$

Очевидно $P_{nm} \in P_{mрп}$.

Помимо типовых пороговых функций в класс $P_{прт}$. входят функции, у которых $S_f > 2^{n-1}$. Нетрудно заметить, что каждая такая функция $\tau(x_1 : x_2; \ldots; x_n)$ получена из некоторой типовой $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ с помощью следующих операций:

$$\tau(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}; \overline{x_2}; \ldots; \overline{x_n}).$$

Отметим, что функция

$$\omega_0(x_1; x_2; \ldots; x_n) \equiv 0.$$

принадлежит к классу $P_{пт}$ и, следовательно, к $P_{прт}$. А функция $\omega_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \equiv 1$ принадлежит к классу $P_{прт}$.

Теорема 3. Для того, чтобы пороговая функция

$$f(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$$

была типовой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) функции $f(0; x_2; x_3; \ldots; x_n)$ и $f(1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$ были расширенно-типовыми; 2) $S_f \leqslant 2^{n-1}$; 3) $\delta_1 \geqslant \delta_2$, где $\delta = (\delta_1; \delta_2; \delta_3; \ldots, \delta_н)$ — центральный вектор функции f.

Достаточность: Пусть функции от $(n-1)$-ой переменной $\varphi(x_2; x_3; \ldots; x_n)$ и $\eta(x_2; x_3; \ldots; x_n)$ — расширенно-типовые функции, у которых:

$$S_\varphi + S_\eta \geqslant 2^{n-1}$$

имеют центральные векторы соответственно: $\alpha = (\alpha_2; \alpha_3; \ldots \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_2; \beta_3 \ldots \beta_n)$.
Построим функции:

$$f(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n) = x_1 \,\&\, \varphi(x_2 : x_3; \ldots; \ldots; x_n) \vee$$
$$\vee\, x_1 \,\&\, \eta(x_2; x_3; \ldots; x_n)$$

Если функция f — пороговая и если $S_\varphi \geqslant \alpha_2 + \beta_2$, то f — типовая функция.
Действительно, найдем центральный вектор функции f:

$$\delta = (\delta_1; \delta_2; \delta_3; \ldots; \delta_n)$$

Имеем:

$$\delta_1 = S_\varphi \geqslant \delta_2 = \alpha_2 + \beta_2 \geqslant \delta_3 = \alpha_3 + \beta_3 \geqslant \ldots \geqslant \delta_n = \alpha_n + \beta_n \geqslant 0,$$

т. к. по условию

$$\alpha_k \geqslant 0;\ \beta_k \geqslant 0;\ \alpha_k \geqslant \alpha_{k+1};\ \beta_k \geqslant \beta_{k+1},$$

а отсюда следует:

$$\alpha_k + \beta_k = \delta_k \geqslant \alpha_{k+1} + \beta_k = \delta_{k+1}$$

при $k = 2; 3; \ldots; n-1$.

Следовательно пороговая функция f — типовая. Отметим, что имеют место равенства:

$$f(1;\ x_2;\ x_3, .,.\ ;\ x_n) = \tau(x_2;\ x_3;\ \dots\ ;\ x_n)$$

и

$$f(0;\ x_2;\ x_3;\ \dots\ ;\ x_n) = \eta(x_2;\ x_3 \dots ;\ x_n).$$

Таким образом, достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f(x_1;\ x_2.\ x_3 .., ;\ x_n)$ — типовая пороговая функция, у которой центральный вектор

$$\delta = (\delta_1;\ \delta_2;\ \delta_3; .,.\ ;\ \delta_n)$$

Очевидно имеет место:

$$S_f \leqslant 2^{n-1} \text{ и } \delta_1 \geqslant \delta_2.$$

Покажем, что функции $f(0;\ x_2;\ x_3;\ \dots\ ;\ x_n)$ и $f(1;\ x_2 : x_3; \dots ;\ x_n)$ — расширенно-типовые функции.

Так как f — типовая пороговая функция, то существует такой реализующий вектор (лемма 2, 3 и 7) в котором:

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \xi_3 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant 0.$$

Как следует из леммы 8 для функций $f(0;\ x_2;\ x_3; \dots ;\ x_n)$ и $f(1;\ x_2;\ x_3;\ \dots ;\ x_n)$ реализующим вектором будет $(n-1)$ — мерный вектор:

$$v = (\xi_2;\ \xi_3; \dots ;\ \xi_n).$$

Так как $\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant 0$, то, как следует из леммы 1, 4, 5 и 6, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n \geqslant 0 \\ \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \dots \geqslant \beta_n \geqslant 0 \end{array}\right|, \qquad (12)$$

где

$$\alpha = (\alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots\ ;\ \alpha_n)$$

и

$$\beta = (\beta_2;\ \beta_3;\ \dots ;\ \beta_n).$$

Центральные векторы функций соответственно:

$$f(1;\ x_2;\ x_3;\ \dots\ ;\ x_n) \text{ и } f(0;\ x_2;\ x_3;\ \dots\ ;\ x_n).$$

Так как эти функции пороговые и для них имеют место неравенства (12), то они расширенно-типовые функции, что и требовалось доказать.

Составление таблицы типовых пороговых функций

Алгоритм составления таблицы типовых пороговых функций, основанный на теореме 3, проиллюстрируем на примере составления ее для функций от четырех переменных по таблице типовых пороговых функций от трех переменных.

Предположим, что нам известен класс P_{nm} — функций, зависящих от 3-х переменных (см. таблицу 1, функции $f_0 \div f_5$).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Дополним этот класс до $P_{\text{прт}}(f_0 \div f_9)$. Все функции в таблице расположены в порядке неубывания числа конституент. Проводим горизонтальную черту, делящую нашу таблицу пополам. Обозначим q_{ib} — число единиц в верхней (над чертой) части таблицы для функции f;

q_{in} — число единиц в нижней части таблицы для этой же функции;

q_i — общее число единиц для функции f_i.

Отсюда

$$q_i = q_{ib} + q_{in}.$$

Сгруппируем функции во всевозможные пары вида $(f_i;\ f_j)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $i < j$.
2. $q_{ij} + q_j \leqslant 2^n$ (в нашем случае $q_i + q_j \leqslant 8$)
3. $q_{in} \leqslant q_{jb}$.

Получим:

$$(f_0;\ f_1),\ (f_0;\ f_2),\ (f_0;\ f_3),\ (f_0;\ f_4),\ (f_0;\ f_5);\ (f_0;\ f_6),\ (f_0;\ f_7),$$
$$(f_0;\ f_8),\ (f_0;\ f_9)$$

и: $(f_1;\ f_5)$, $(f_1;\ f_6)$, $(f_1;\ f_7)$, $(f_1;\ f_8)$, и $(f_2;\ f_8)$.

Затем составим таблицу 2, располагая функцию f_i, взятую из найденных пар, в верхней половине таблицы, а f_j — в нижней. Получаем новые функции, зависящие от четырех переменных. Расположим их в порядке неубывания конституент единица и пронумеруем. Далее проверим все эти функции на реализуемость ПЭ. В результате получаем, что все функции пороговые. Итак, имеем таблицу (таблица 2) всех типовых пороговых функций от четырех переменных.

Таблица 2

x_1	x_2	x_3	x_4	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_1	f_{13}	f_{14}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Варшавский. Некоторые вопросы теории логических сетей, построенных из пороговых элементов. Вопросы теории математических машин. Сб. 2. Госиздат, физ-мат лит. М., 1962.

2. Е. А. Бутаков. К систематике пороговых функций. Семинар. Вопросы теории математических машин. Общество «Знание» УССР, Киев, 1965.

3. В. С. Ланцев. О табулировании пороговых функций. Семинар «Вопросы теории математических машин». Общество «Знание» УССР. Киев, 1965.

4. С. В. Яблонский. Функциональные построения в К-значной логике. Труды матем. ин-та им.Стеклова, т. 51, Изд-во АНСССР, 1958.

5. Е. Н. Вавилов, Г. П. Портной. Синтез схем электронных цифровых машин. Изд-во «Советское радио», М., 1963.