

ДИНАМИКА АГРЕГАТОВ И УЗЛОВ ДЛА С ПОДВЕСКОЙ В ВИДЕ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА, ИМЕЮЩЕЙ РАЗНООПОРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Шакиров Ф.М.

Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара

Классические схемы упруго-вязких моделей колебательных систем (КС) подразумевают, что составляющие подвески инерционного элемента, имеющей также функции виброзащитного устройства (ВЗУ), опираются на одно основание. Однако, эти схемы требуют коррекции при рассмотрении динамики узлов и агрегатов ДЛА, конструктивно расположенных между роторной и статорной частями двигателя.

Рассмотрим динамику КС, ВЗУ которых по составу идентичны модели Кельвина (рис.1.а), но на активный фундамент опирается один из элементов ВЗУ, а второй связан с неподвижным основанием. Будем называть такие ВЗУ "с"- и "d"-квaziмоделями Кельвина, в зависимости от того, какой из элементов подвески – упругий ("с") (рис.1.б) или демпфирующий ("d") (рис.1.в) – опирается на активный фундамент. При составлении математических моделей сделаны следующие допущения: масса каждого основания значительно превосходит массу защищаемого объекта и все они недеформируемые; объект обладает свойствами точечной массы, а КС имеет сосредоточенные параметры; элементы связи объекта с основаниями обладают пренебрежимо малой массой; упругий и диссипативный элементы имеют линейные характеристики; колебания являются установившимися однонаправленными.

При силовом нагружении динамика представленных на рис.1.б,в КС идентична динамике КС по рис.1.а. При кинематическом возмущении их состояние описывается следующими уравнениями:

- "с"-квaziмодель Кельвина (рис.1.б):

$$m\ddot{x}_2(t) + d\dot{x}_2(t) + c[x_2(t) - x_1(t)] = 0, \quad (1)$$

- "d"-квaziмодель Кельвина (рис.1.в):

$$m\ddot{x}_2(t) + d[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + c x_2(t) = 0, \quad (2)$$

где m - масса защищаемого объекта; c - жесткость упругого элемента; d - коэффициент демпфирования диссипативного элемента; $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ - абсолютное перемещение подвижного основания и его скорость; $x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $\ddot{x}_2(t)$ - абсолютное перемещение, скорость и ускорение объекта.

Рассмотрим передаточные функции (ПФ) и частотные характеристики, которые получаются на основании уравнений (1) и (2) и наиболее часто используются для оценки прочности и структурной целост-

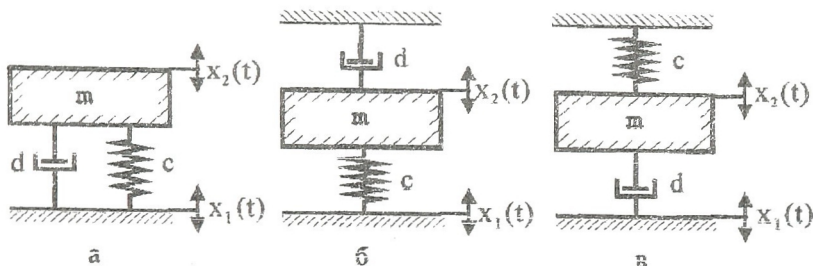


Рисунок 1 - Схемы колебательных систем с ВЗУ в виде модели Кельвина (а), "с"-квазимодели Кельвина (б) и "d"-квазимодели Кельвина (в)

ности объекта, оснований и их связей [1]. При кинематическом возмущении это ПФ: $\bar{W}_A(s)$ - по абсолютному и $\bar{W}_R(s)$ - по относительному параметру (перемещение, скорость, ускорение); где s - комплексная величина, отражающая применение процедуры преобразования Лапласа [2]. Указанные ПФ, модули и аргументы частотных ПФ приведены в табл.1 для КС по рис.1.б и в табл.2 - для КС по рис.1.в. Здесь μ - коэффициент передачи, φ - угол сдвига фаз между входной и выходной координатами, $\eta = \omega/\omega_0$ - безразмерная частота возмущения, ω , $\omega_0 = (c/m)^{0.5}$ - возмущающая и собственная частоты, $\xi = 0.5d/(c/m)^{0.5}$ - безразмерный коэффициент демпфирования; индексы частотных функций соответствуют индексам ПФ. Графики годографов, модулей и аргументов частотных ПФ даны на рис.2...4.

Динамика КС с ВЗУ в виде "с"- квазимодели Кельвина (рис.1.б)

Частотные характеристики по абсолютному параметру. Передаточная функция по абсолютному параметру $\bar{W}_A(s)$ и связанные с ней частотные характеристики совпадают соответственно с передаточной функцией по перемещению $\bar{W}_T(s)$ и связанными с ней частотными характеристиками для КС по рис.1.а при ее силовом возмущении.

Частотные характеристики по относительному параметру. Графики представлены на рис.2. Анализ частотных характеристик показывает, что виброизоляция в данном случае осуществляется в низкочастотной зоне при $\eta < 1.41$, а в диапазоне частот $1.41 < \eta < \infty$ происходит усиление колебаний. Снижение уровня демпфирования в КС сопровождается уменьшением ее резонансной частоты, стремящейся к $\eta = 1$, и ростом резонансного значения коэффициента передачи μ_{Rp} (рис.2). Причем при малых величинах демпфирования ($0 < \xi \leq 0.2$) в пределах ошибки в 10% можно пользоваться приближенной формулой:

$$\mu_{Rp} \approx 0.5\xi. \quad (3)$$

Передающая функция: $W(s)$	Модуль частотной передаточной функции: $\mu(\eta)$	Аргумент частотной передаточной функции (ФЧХ): $\varphi(\eta)$
$W_A(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1}$	$\mu_A(\eta) = \sqrt{\frac{1}{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$	$\varphi_A(\eta) = \begin{cases} -\arctg[2\xi\eta/(1-\eta^2)], & \text{при } \eta \leq 1 \\ -\pi - \arctg[2\xi\eta/(1-\eta^2)], & \text{при } \eta > 1 \end{cases}$
$W_R(s) = \frac{-\frac{s^2}{\omega_0^2} - 2\xi \frac{s}{\omega_0}}{s^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1}$	$\mu_R(\eta) = \sqrt{\frac{\eta^4 + 4\xi^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$	$\varphi_R(\eta) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi}{\eta(1-\eta^2 - 4\xi^2)}, & \text{при } \eta^2 + 4\xi^2 \leq 1 \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi}{\eta(1-\eta^2 - 4\xi^2)}, & \text{при } \eta^2 + 4\xi^2 > 1 \end{cases}$

Передающая функция: $W(s)$	Модуль частотной передаточной функции (АЧХ): $\mu(\eta)$	Аргумент частотной передаточной функции (ФЧХ): $\varphi(\eta)$
$W_A(s) = \frac{2\xi \frac{s}{\omega_0}}{s^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1}$	$\mu_A(\eta) = \sqrt{\frac{4\xi^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$	$\varphi_A(\eta) = -2\pi + \arctg \frac{1-\eta^2}{2\xi\eta}$
$W_R(s) = \frac{-\frac{s^2}{\omega_0^2} - 1}{s^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1}$	$\mu_R(\eta) = \sqrt{\frac{(\eta^2-1)^2}{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$	$\varphi_R(\eta) = \begin{cases} -\pi - \arctg \frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}, & \text{при } \eta \leq 1 \\ -3\pi - \arctg \frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}, & \text{при } \eta > 1 \end{cases}$

Высокочастотный относительный коэффициент передачи равен единице, а низкочастотный имеет вид:

$$\mu_R(0) = 2\xi\eta, \quad (4)$$

что соответствует показателю темпа затухания низкочастотных колебаний $\theta(0) = 20$ дБ/дек (рис. 2.а). Из выражения (4) видно, что с ростом параметра ξ виброизолирующие свойства ВЗУ на низких частотах ухудшаются. Поэтому выбор величины демпфирования по функции $\mu_R(\eta)$ означает нахождение компромисса между ограничением колебаний на резонансе и качеством низкочастотной виброизоляции.

ФЧХ изменяется от $-\pi/2$ при $\eta \rightarrow 0$ до $-\pi$ при $\eta \rightarrow \infty$ (рис.2.б,д). В околорезонансной области проявляются колебательные свойства системы, причем тем ярче, чем меньше параметр ξ (рис. 2.б).

Аналитические выражения модулей частотных ПФ на резонансе и резонансных частот в функции параметра ξ при кинематическом возмущении КС по рис.1.б представлены в табл. 3.

Таблица 3

Резонансные коэффициенты передачи $\mu_p(\xi)$	Резонансные частоты $\eta_p(\xi)$
$\mu_{lp}(\xi) = 1/2\xi(1-\xi^2)^{0,5}$	$(1-2\xi^2)^{0,5}$
$\mu_{rp}(\xi) = \left[\frac{4\xi^2 + 1 + (8\xi^2 + 1)^{0,5}}{4\xi^2 - 1 + (8\xi^2 + 1)^{0,5}} \right]^{0,5}$	$[0,5 + 0,5(8\xi^2 + 1)^{0,5}]^{0,5}$

Резонансный коэффициент передачи по абсолютному параметру и связанная с ним резонансная частота (табл.3) совпадают соответственно с резонансным коэффициентом динамического усиления по перемещению и связанной с ним резонансной частотой для КС с ВЗУ- моделью Кельвина при силовом нагружении. Графики относительного коэффициента передачи на резонансе и соответствующей безразмерной частоты приведены на рис. 2.е.

Для всех резонансных пиков АЧХ характерно их снижение с ростом демпфирования в КС. Функция $\mu_{rp}(\xi)$ асимптотически стремится к единице при $\xi \rightarrow \infty$ (в отличие от КС по рис.1.а, у которой аналогичная функция имеет ограничение). Поведение функции $\eta_p(\xi)$ также своеобразно: она монотонно возрастает с ростом демпфирования и одновременно с аргументом ξ устремляется к бесконечности (рис. 2.е).

Таким образом, для большинства АЧХ (за исключением функции $\mu_R(\eta)$) КС по рис.1.б характерно следующее:

1) снижение величин модулей частотных ПФ на резонансе при росте уровня демпфирования в системе;

2) инвариантность к уровню демпфирования низкочастотных и высокочастотных модулей частотных передаточных функций;

3) равенство показателей темпа затухания низко- и высокочастотных колебаний соответствующим показателям консервативной КС.

ВЗУ в виде “с”-квазимодели Кельвина при кинематическом возмущении КС позволяет контролировать резонансные значения функции $\mu_R(\eta)$ варьированием уровня диссипации энергии колебаний. Однако качество виброизоляции при этом не самое высокое:

- темп снижения низкочастотных колебаний равен 20 дБ/дек в сравнении с 40 дБ/дек у консервативной системы;
- рост демпфирования в системе приводит к росту коэффициента передачи во всей зоне виброизоляции $\eta < 1.41$.

Определяющим обстоятельством в выборе величины демпфирования для КС по рис.1.б является достижение компромисса между ограничением размаха колебаний на резонансе и качеством низкочастотной виброизоляции по относительному коэффициенту передачи при кинематическом возмущении.

Разница в динамике КС с ВЗУ в виде модели Кельвина и “с”-квазимодели Кельвина определяется частотными функциями при кинематическом возмущении. В сравнении с консервативной КС первая имеет более низкие показатели виброизоляции по абсолютному коэффициенту передачи, а вторая – по относительному.

Динамика КС с ВЗУ в виде “d”-квазимодели Кельвина (рис.1.в)

Частотные характеристики по абсолютному параметру (рис.3). Виброизоляция в данном случае осуществляется во всем частотном диапазоне $\eta > 0$, за исключением точки $\mu_A(1) = 1$ (рис.3.а,в,д). Изменение уровня демпфирования в КС не сказывается на резонансных величинах абсолютного коэффициента передачи и безразмерной частоты, которые неизменны при любых величинах параметра ξ : $\mu_{Ap} = 1$, $\eta_p = 1$.

Высокочастотный коэффициент передачи равен нулю, а низкочастотный зависит от демпфирования и частоты возмущения:

$$\mu_A(0) = 2\xi\eta, \quad (5)$$

что соответствует показателю темпа затухания низкочастотных колебаний $\theta(0) = 20$ дБ/дек (рис.3.а). Из выражения (5) также следует, что с ростом демпфирования виброизолирующие свойства подвески на низких частотах ухудшаются.

Стабильность резонансного пика АЧХ при изменении демпфирования обуславливает выбор величины параметра ξ по функции $\mu_A(\eta)$ в соответствии с потребным уровнем низкочастотной виброизоляции.

ФЧХ рассматриваемой КС (рис.3.б) идентична функции $\varphi_{CK}(\eta)$ для КС с ВЗУ – моделью Кельвина. АФЧХ (рис.3.г) инвариантна к параметру ξ , означая постоянство резонансной величины АЧХ и изменение аргумента частотной ПФ от $-1,5\pi$ до $-2,5\pi$.

Частотные характеристики по относительному параметру (рис.4).

Условие виброизоляции $\mu_R(\eta) < 1$ выполняется во всем частотном диапазоне $\eta > 0$ при любом значении параметра $\xi > 0$, однако при этом качество виброизоляции значительно ухудшается по мере отдаления от окрестности точки $\eta = 1$ (рис.4.а,в,д). Функция $\mu_R(\eta)$ имеет антирезонанс при $\eta = 1$, положение и величина экстремума которого $\mu_R(1) = 0$ не зависит от уровня демпфирования в системе. Вместе с тем, рост параметра ξ снижает величину относительного коэффициента передачи.

Низко- и высокочастотный коэффициенты передачи равны единице (рис.4.а), что свидетельствует о низких виброизолирующих свойствах подвески в этом случае. Поэтому выбор параметра ξ определяется требуемым качеством виброизоляции на средних частотах.

АФЧХ (рис.4.г) инвариантна к параметру ξ и показывает, что аргумент частотной ПФ (рис.4.б) изменяется в пределах от $-\pi$ до -3π .

Общим обстоятельством для абсолютного и относительного коэффициентов передачи на резонансе является их инвариантность к уровню демпфирования в КС (параметру ξ). Безразмерные резонансные частоты для обоих коэффициентов передачи при кинематическом возмущении независимы от демпфирования в системе и равны единице.

Таким образом, для частотных характеристик КС по рис.1.в характерны следующие особенности:

- на АЧХ отсутствуют резонансные пики, а $\max \mu_A(\eta) = \max \mu_R(\eta)$;
- функция $\mu_R(\eta)$ имеет антирезонанс при $\eta = 1$, экстремум которого равен нулю;
- зонами виброизоляции фактически является весь частотный диапазон $\eta > 0$ (за исключением точки $\eta = 1$ для функции $\mu_A(\eta)$);
- рост параметра ξ ухудшает виброизоляцию по абсолютному и улучшает по относительному коэффициентам передачи.

Выбор величины демпфирования (параметра ξ) для КС по рис.1.в означает достижение компромисса между качеством виброизоляции по абсолютному и относительному коэффициентам передачи при кинематическом виброн нагружении системы.

Список литературы

1. Динамические свойства линейных виброзащитных систем. – М.: Наука, 1982. – 208 с.
2. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1966. – 922 с.

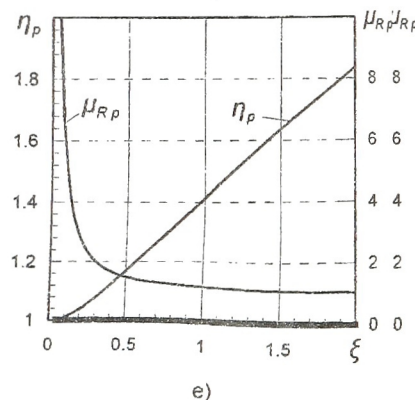
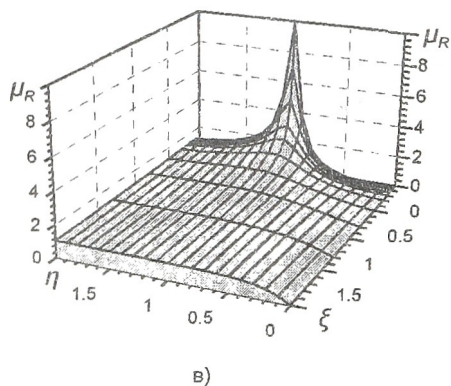
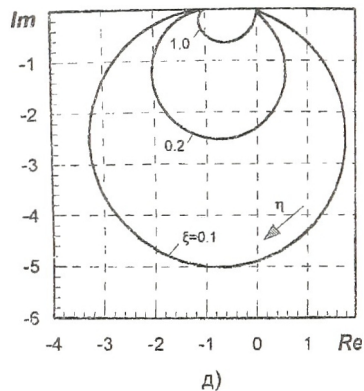
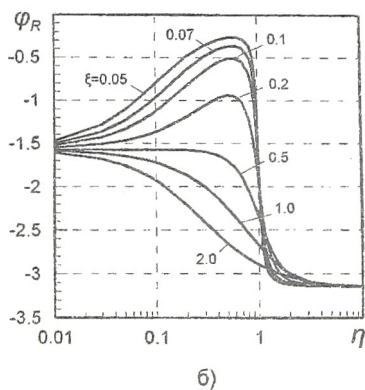
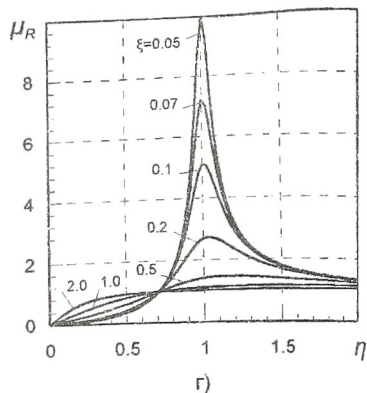
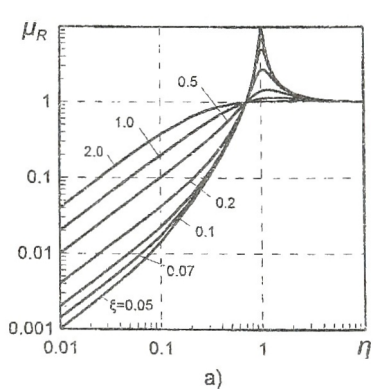


Рис.2. Частотные и резонансные характеристики по относительному параметру КС с ВЗУ - "с"-квaziэлементом Кельвина (кинематическое возмущение): а,в,г - ЛЧХ; б - ФЧХ; д - АФЧХ; е - частоты и коэффициент передачи на резонансе в зависимости от параметра ξ

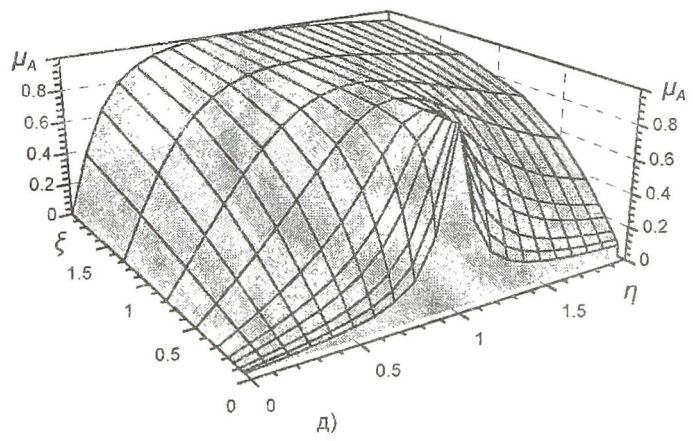
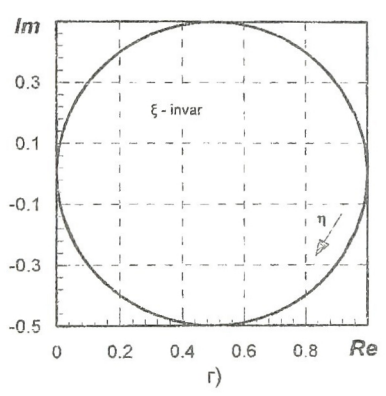
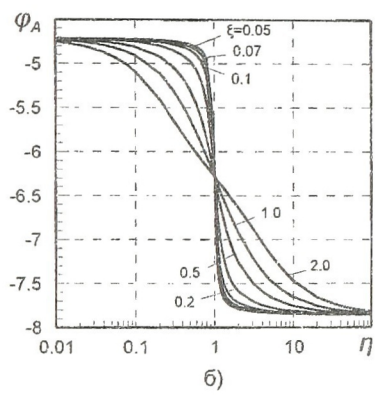
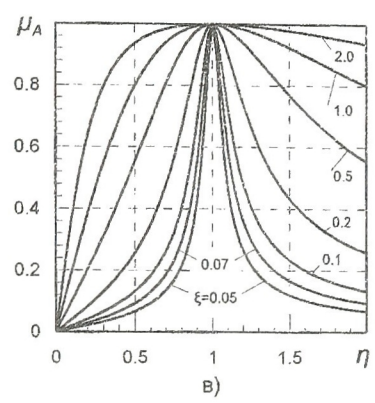
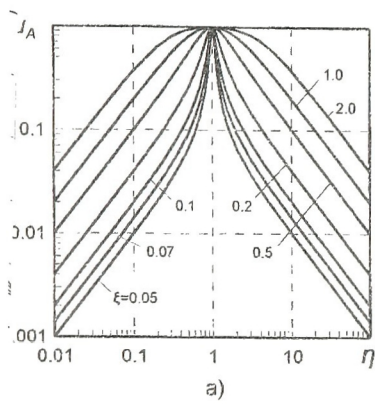
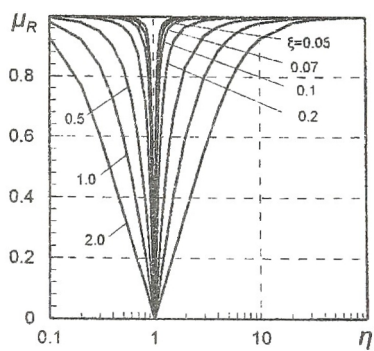
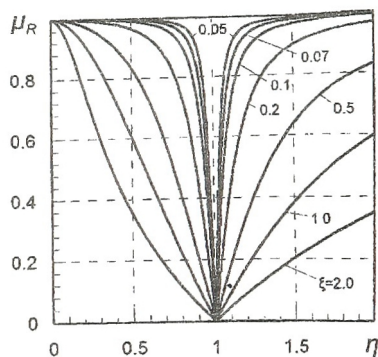


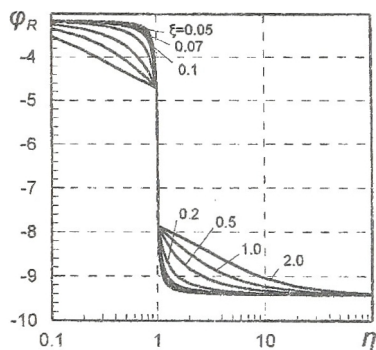
Рис.3. Частотные характеристики по абсолютному параметру для КС с ВЗУ - "d"-квазиэлементом Кельвина при кинематическом возмущении: а,в,д - АЧХ; б - ФЧХ; г - АФЧХ



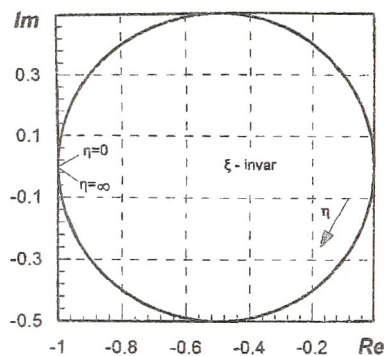
а)



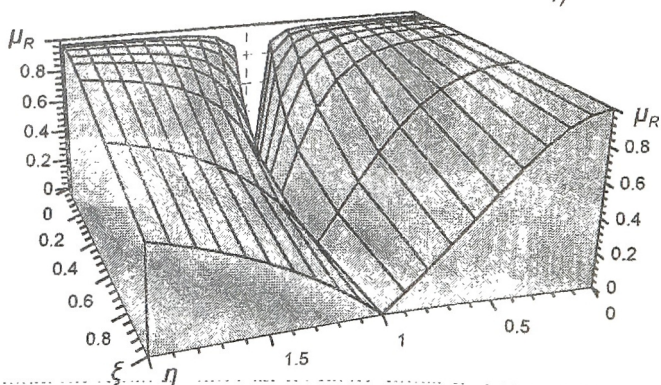
б)



в)



г)



д)

Рис.4. Частотные характеристики по относительному параметру для КС с ВЗУ - "d"-квазиэлементом Кельвина при кинематическом возмущении: а,в,д - АЧХ; б - ФЧХ; г - АФЧХ