Варианты дискретной фазовой проблемы

А.А. Кулешова[a]

[a]АО «РКЦ «Прогресс», 443000, ул. Земеца, 18, Самара, Россия

Аннотация

Восстановление информации, скрытой в фазах вектора-сигнала, не теряет актуальности. Наборы векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, называемые фреймами, в пространстве $C^{\mathrm{m}}(R^{\mathrm{m}})$ могут использоваться для теоретического исследования восстановления фаз. В статье показывается, что восстановление фаз эквивалентно восстановлению без фаз. Рассмотрены примеры в R^{m} и C^{m}, для которых построены наборы векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$, которые одновременно осуществляют восстановление фаз и восстановление без фаз.

Ключевые слова: восстановление фаз; восстановление без фаз; фрейм; ортопроектор

1. Введение

В 2006 году Balan/Casazza/Edidin [3,4] определили один из вариантов дискретной фазовой проблемы, который они назвали «Phaseless reconstruction» или "восстановление без фаз". Было показано, что в действительном случае фрейм общего положения, состоящий из (2m-1)-векторов может при определенных условиях восстанавливать сигнал без фаз. Аналогичный результат в комплексном пространстве был получен для (4m-2) векторов.

В работе [2] наряду с вариантом "восстановление без фаз" рассматривается другой вариант постановки дискретной фазовой проблемы - "восстановление фаз". Поставлен и частично решен вопрос об эквивалентности этих вариантов.

В данной работе продолжены исследования в этом направлении и построены примеры восстановления сигнала в пространствах малой размерности. Некоторое внимание уделено восстановлению сигнала по нормам проекций на подпространства.

Пусть H^{m} – это пространство R^{m} или C^{m}.

2. Эквивалентность восстановления фаз и восстановлении без фаз

Пусть $x = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $y = (b_1, b_2, ..., b_m)$ - векторы в пространстве H^{m}.

Определение 1: *Фазой числа* $z \in C^{\mathrm{m}}$ *будем называть значение угла* $\varphi = ph\ z_i + 2\pi k,\ \ k \in Z$, *определяющее отклонение радиус-вектора точки на плоскости, соответствующей числу* $z \in C^{\mathrm{m}}$ *от вещественной оси в* C^{m}. *В вещественном случае фаза в* R^{m} *равна 0 или* π.

Будем говорить, что x, y – имеют одинаковые фазы, если:

$$ph\ a_i = ph\ b_i,\ i = 1,2,..., m$$

Определение 2: *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *- набор векторов в* H^{m} *(соответственно* $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ *- набор ортопроекторов в* H^{m}*), удовлетворяющих следующему свойству: для каждого* x, y *выполняется:*

$$\left|\langle x, \varphi_i\rangle\right| = \left|\langle y, \varphi_i\rangle\right|,\ i = 1,2,..., n$$

(соответственно

$$\| P_i x \| = \| P_i y \|,\ i = 1,2,..., n).$$

Тогда,

1) Если существует $|\theta| = 1$ *такое, что* x *и* $\theta\, y$ *имеют одинаковые фазы, то говорят что* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *осуществляет восстановление фаз (соответственно* $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ *осуществляет восстановление фаз).*

2) Если существует $|\theta| = 1$ *такое, что* $x = \theta\ y$, *то говорят что* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *осуществляет восстановление без фаз (соответственно* $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ *осуществляет восстановление без фаз).*

Определение 3: *Набор векторов* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ *в* H^{m} *назовем альтернативно полным (АП), если для любого* $I \subseteq \{1, \dots, \mathrm{n}\}$, *либо* $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, *либо* $\{\varphi_i\}_{i \in I^C}$ *полно в* H^{m}.

Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ восстанавливает фазы в H^{m}, то $span\{\varphi_i\}_{i=1}^{n} = \mathrm{H}^{\mathrm{m}}$. Это означает, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ является фреймом в пространстве H^{m}. В противном случае найдется $0 \neq x \in \mathrm{H}^{\mathrm{m}}$, такой что $\langle x, \varphi_i\rangle = \langle y, \varphi_i\rangle = 0$, $i = 1,2,..., n,$ в то время как фазы векторов x и 0 не совпадают.

Если $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$ имеют одинаковые фазы, то $a_i=0$ тогда и только тогда, когда $b_i=0$, так как фаза числа 0 не определена.

Теорема 1: *Пусть* $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *- набор векторов в* R^{m}. *Отображение* $A: R^m/\{\pm1\}\to R^n$ $(n>m)$ *определено равенствами:* $(A(x))(i):=\left|\langle x,\varphi_i\rangle\right|^2$, $i=1,..,n$. *Если* $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *восстанавливает без фазы, то он обладает свойством АП. В вещественном случае эти понятия эквивалентны.*

Доказательство: $(\Rightarrow)$ Предположим, что Φ - не АП. Следовательно, найдется $I\subseteq\{1,..,n\}$ такое, что ни $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, ни $\{\varphi_i\}_{i\in I^C}$ не полно в R^m.

Выбираем ненулевые векторы $u,v\in R^m$ так, что $\langle u,\varphi_i\rangle=0$ для всех $i\in I$ и $\langle v,\varphi_i\rangle=0$ для всех $i\in I^C$. Для каждого i имеем:

$$\left|\langle u\pm v,\varphi_i\rangle\right|^2=\left|\langle u,\varphi_i\rangle\right|^2\pm2\langle u,\varphi_i\rangle\overline{\langle v,\varphi_i\rangle}+\left|\langle v,\varphi_i\rangle\right|^2=\left|\langle u,\varphi_i\rangle\right|^2+\left|\langle v,\varphi_i\rangle\right|^2.$$

Отсюда следует, что $\left|\langle u+v,\varphi_i\rangle\right|^2=\left|\langle u-v,\varphi_i\rangle\right|^2$ для каждого i, и $A(u+v)=A(u-v)$. Более того, так как u и v ненулевые, по предположению, то и $u+v\neq\pm(u-v)$. Таким образом, восстановления без фаз нет.

$(\Leftarrow)$ Предположим, что $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ не восстанавливает без фаз. Это означает, что существуют векторы $x,y\in R^m$ такие, что $x\neq\pm y$ и $A(x)=A(y)$. Обозначим $I:=\{i:\langle x,\varphi_i\rangle=-\langle y,\varphi_i\rangle\}$.

Имеем: $\langle x+y,\varphi_i\rangle=0$ для каждого $i\in I$. Иначе, если $i\in I^C$, тогда $\langle x,\varphi_i\rangle=\langle y,\varphi_i\rangle$ и тогда $\langle x-y,\varphi_i\rangle=0$. По предположению, $x\neq\pm y$, поэтому $x+y\neq0$ и $x-y\neq0$. Таким образом, и $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ и $\{\varphi_i\}_{i\in I^C}$ не полны в R^m.

В R^{m} фаза вектора может быть равна 0 или π. Координаты векторов имеют одинаковые фазы, если знаки координат вектора x совпадают со знаками соответствующих координат y. При этом фаза 0 не определена. То есть, если $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$, то x,y – имеют одинаковую фазу, если:

1) Если $a_i\neq0\neq b_i$, то $a_ib_i>0$.
2) Если $a_i=0$, то соответствующее ему $b_i=0$ (симметрично: Если $b_i=0$, то соответствующее ему $a_i=0$).

В противном случае векторы имеют разные фазы.

Тогда, если даны два вектора, для того чтобы определить одинаковые у них фазы или нет необходимо:

1) Проверить равенство всех индексов у нулевых координат векторов. Если все индексы нулевых координат первого вектора соответствуют индексам второго вектора (и наоборот), то проверка условия 2), иначе – векторы имеют разные фазы.

2) Для ненулевых координат проверить выполнение: если $a_ib_i>0\Rightarrow$ векторы имеют одинаковые фазы, если $a_ib_i<0$, то векторы имеют разные фазы.

Определение 1 в вещественном случае будет означать:

Пусть $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ - набор векторов в R^{m}, удовлетворяющих следующему свойству: для каждого x,y выполняется:

$$\left|\langle x,\varphi_i\rangle\right|=\left|\langle y,\varphi_i\rangle\right|,\ i=1,2,...,n$$

Тогда,

1) $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление фаз, если существует $\theta=\pm1$ такое, что
   a) Для $\theta=1$ векторы x и y имеют одинаковые фазы.
   b) Для $\theta=-1$ векторы x и $-y$ имеют одинаковые фазы.
2) $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ осуществляет восстановление без фаз, если существует $\theta=\pm1$ такое, что
   c) Для $\theta=1\Rightarrow x=y$.
   d) Для $\theta=-1\Rightarrow x=-y$.

Рассмотрим пример в R^2. Пусть $x=(a_1,a_2)\neq(0,0)$ и $y=(b_1,b_2)\neq(0,0)$.

В качестве $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^3$ возьмем фрейм Мерседес-Бенц в R^2, состоящий из 3-х векторов единичной длины, расположенных под углом 120º (Рисунок 1).

$$\varphi_1=(0,1),\ \ \varphi_2=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}),\ \ \varphi_3=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\ .$$

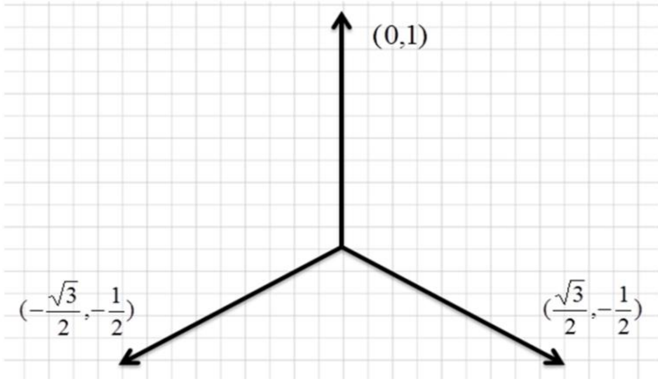

Рис. 1 Фрейм Мерседес-Бенц в R^2, состоящий из 3-х векторов единичной длины, расположенных под углом 120º.

Тогда выполнение условие $\left|\langle x,\varphi_i\rangle\right| = \left|\langle y,\varphi_i\rangle\right|_{i=1}^{3}$ значит, что

$$\begin{cases} \left|\langle (a_1,a_2),(0,1)\rangle\right| = \left|\langle (b_1,b_2),(0,1)\rangle\right| \\ \left|\left\langle (a_1,a_2),(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (b_1,b_2),(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (a_1,a_2),(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (b_1,b_2),(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\right\rangle\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_2| = |b_2| \\ \left|\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2\right| \\ \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2\right| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a_2| = |b_2| \\ \left|\sqrt{3}a_1 - a_2\right| = \left|\sqrt{3}b_1 - b_2\right| \\ \left|\sqrt{3}a_1 + a_2\right| = \left|\sqrt{3}b_1 + b_2\right| \end{cases}$$

Возводя в квадрат уравнения последней системы получим, что

$$a_1a_2 = b_1b_2 \text{ и } a_1^2 = b_1^2$$

Отсюда следует, что первое равенство дает совпадение знаков (с точностью до сомножителя θ), а второе – совпадение модулей координат. Более того, из этих равенств получается и совпадение нулевых координат, если они есть.

Получаем, что либо вектор $x = y$, либо $x = -y$. Тогда, действительно, существует такое $\theta = \pm 1$ такое, что если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{3}$ – Фрейм Мерседес-Бенц , то он осуществляет восстановление фаз (т.к. имеют одинаковые знаки, а значит и фазы) и восстановление без фаз (так как $x = \theta y$) одновременно.

Если мы знаем модули координат векторов $x = (a_1, a_2)$ и $y = (b_1, b_2)$, то x и y могут быть одним из 4 векторов (Рис.2):

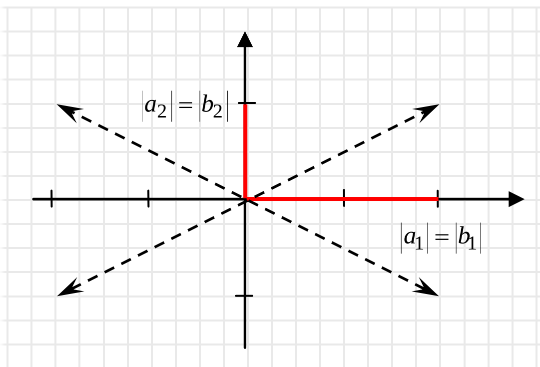

Рис. 2 Варианты векторов при известных модулей координат векторов x, y .

После скалярного умножения на координаты фрейма, условие $a_1a_2 = b_1b_2$ дает ограничения на знаки координат (Рис. 3):

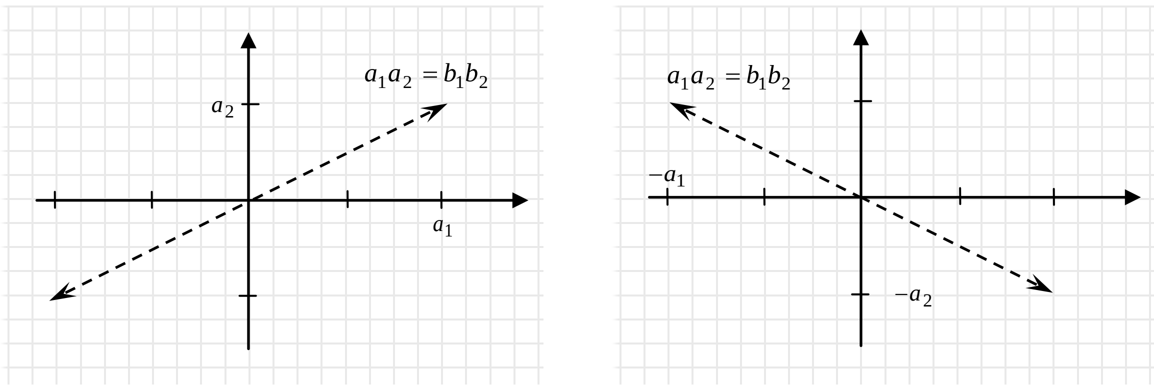

Рис. 3 Варианты векторов при известных $\left|\left\langle x,\varphi_i\right\rangle\right|,\left|\left\langle y,\varphi_i\right\rangle\right|$.

Рассмотрим пример в C^2. В комплексном случае

$$x=(x_1,x_2)=(a+ib,c+id) \text{ и } y=(y_1,y_2)=(e+if,g+ih).$$

В качестве $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^5$ возьмем фрейм следующего вида:

$$\varphi_1=(1,0),\quad \varphi_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \varphi_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \varphi_4=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}i),\ \varphi_5=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}i)\ (*)$$

Тогда выполнение условие $\left|\left\langle x,\varphi_i\right\rangle\right|=\left|\left\langle y,\varphi_i\right\rangle\right|_{i=1}^5$ значит, что

$$\begin{cases}
\left|\left\langle (x_1,x_2),(1,0)\right\rangle\right|=\left|\left\langle (y_1,y_2),(1,0)\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right|=\left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right|=\left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right|=\left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| \\
\left|\left\langle (x_1,x_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right|=\left|\left\langle (y_1,y_2),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right|
\end{cases}$$

Умножим скалярно векторы $\left(x,\varphi_i\right)=\left\langle (x_1,x_2),(\varphi_{i1},\varphi_{i2})\right\rangle=\sum\limits_{\substack{j=\overline{1,2}\\ i=\overline{1,5}}} x_j\overline{\varphi_{ij}}$ и запишем условие $\left|\left\langle x,\varphi_i\right\rangle\right|=\left|\left\langle y,\varphi_i\right\rangle\right|_{i=1}^5$ системой:

$$\begin{cases}
|x_1|=|y_1| \\
|x_1-x_2|=|x_1-x_2| \\
|x_1+x_2|=|x_1+x_2| \\
|x_1+x_2\overline{i}|=|x_1+x_2\overline{i}| \\
|x_1-x_2\overline{i}|=|x_1-x_2\overline{i}|
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
|x_1|=|x_1| \\
|x_1-x_2|=|y_1-y_2| \\
|x_1+x_2|=|y_1+y_2| \\
|x_1-x_2 i|=|y_1-y_2 i| \\
|y_1+y_2 i|=|y_1+y_2 i|
\end{cases}$$

Подставим комплексные координаты:

$$x_1=a+ib$$
$$x_2=c+id$$
$$x_1=e+if$$
$$x_2=g+ih$$

Тогда получим:

$$\begin{cases}
|a+ib|=|e+if| \\
|(a+ib)-(c+id)|=|(e+if)-(g+ih)| \\
|(a+ib)+(c+id)|=|(e+if)+(g+ih)| \\
|(a+ib)-i(c+id)|=|(e+if)-i(g+ih)| \\
|(a+ib)+i(c+id)|=|(e+if)+i(g+ih)|
\end{cases}$$

Скомпонуем вещественные и комплексные части:

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ \|a-c+i(b-d)\| = |e-g+i(f-h)| \\ |a+c+i(b+d)| = |e+g+i(f+h)| \\ |a+d+i(b-c)| = |e+h+i(f-g)| \\ |a-d+i(b+c)| = |e-h+i(f+g)| \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ (a-c)^2+(b-d)^2=(e-g)^2+(f-h)^2 \\ (a+c)^2+(b+d)^2=(e+g)^2+(f+h)^2 \\ (a+d)^2+(b-c)^2=(e+h)^2+(f-g)^2 \\ (a-d)^2+(b+c)^2=(e-h)^2+(f+g)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=e^2-2eg+g^2+f^2-2fh+h^2 \quad (1) \\ a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=e^2+2eg+g^2+f^2+2fh+h^2 \quad (2) \\ a^2+2ad+d^2+b^2-2bc+c^2=e^2+2eh+h^2+f^2-2fg+g^2 \quad (3) \\ a^2-2ad+d^2+b^2+2bc+c^2=e^2-2eh+h^2+f^2+2fg+g^2 \quad (4) \end{cases}$$

Вычтем из (1)-(2), и из (3)-(4):

$$\begin{cases} a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2-a^2-2ac-c^2-b^2-2bd-d^2=e^2-2eg+g^2+f^2-2fh+h^2-e^2-2eg-g^2-f^2-2fh-h^2 \\ a^2+2ad+d^2+b^2-2bc+c^2-a^2+2ad-d^2-b^2-2bc-c^2=e^2+2eh+h^2+f^2-2fg+g^2-e^2+2eh-h^2-f^2-2fg-g^2 \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} ad-bc=eh-fg \\ ac+bd=eg+fh \end{cases}$$

Сложим (1)+(2), (3)+(4):

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ (a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2+a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2)=(e^2-2eg+g^2+f^2-2fh+h^2+e^2+2eg+g^2+f^2+2fh+h^2) \\ (a^2+2ad+d^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ad+d^2+b^2+2bc+c^2)=(e^2+2eh+h^2+f^2-2fg+g^2+e^2-2eh+h^2+f^2+2fg+g^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ 2a^2+2c^2+2b^2+2d^2=2e^2+2g^2+2f^2+2h^2 \\ 2a^2+2d^2+2b^2+2c^2=2e^2+2h^2+2f^2+2g^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=e^2+f^2 \\ a^2+c^2+b^2+d^2=e^2+g^2+f^2+h^2 \\ || \\ a^2+d^2+b^2+c^2=e^2+h^2+f^2+g^2 \end{cases}$$

Подставим $a^2+b^2=e^2+f^2$ в $a^2+c^2+b^2+d^2=e^2+g^2+f^2+h^2$, получим:

$$c^2+d^2=g^2+h^2$$

А это значит, что модули вторых комплексных координат векторов x и y равны, т.к.

$$c^2+d^2=|x_2|=g^2+h^2=|y_2|$$

Итак, если брать фрейм вида (*), то модули комплексных соответствующих координат векторов x и y равны, т.е.:

$$|x_1|=|y_1|=r_1 \text{ и } |x_2|=|y_2|=r_2$$

Теперь, запишем координаты векторов в полярной форме, с учетов равенства модулей координат:

$$x=(x_1,x_2)=(r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}) \text{ и } y=(y_1,y_2)=(r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4})).$$

Тогда $|\langle x,\varphi_i\rangle| = |\langle y,\varphi_i\rangle|\Big|_{i=1}^{5}$ будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}), (1,0)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4}), (1,0)\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| \\ \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph1}, r_2e^{i\cdot ph2}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| = \left|\left\langle (r_1e^{i\cdot ph3}, r_2e^{i\cdot ph4}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}i)\right\rangle\right| \end{cases}$$

Тогда из первого равенства

$$r_1e^{i\cdot ph1} = r_1e^{i\cdot ph3}$$

Отсюда следует, что

$$ph1 = ph3$$

Из второго равенства получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}r_1e^{i\cdot ph1} - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2e^{i\cdot ph2} = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1e^{i\cdot ph1} - \frac{1}{\sqrt{2}}r_2e^{i\cdot ph4}$$

$$r_2e^{i\cdot ph2} = r_2e^{i\cdot ph4}$$

Отсюда следует, что

$$ph2 = ph4$$

Получаем, что фазы векторов x и y равны с точностью до $2\pi k,\ k \in Z$.

Теорема 2: *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *- набор векторов в* R^m. *Отображение* $A: R^m / \{\pm 1\} \to R^n$ $(n > m)$ *определено равенствами:* $(A(x))(i) := \left|\langle x, \varphi_i \rangle\right|^2$, $i = 1,..,n$. *Если* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *восстанавливает фазы, то он обладает свойством АП. В вещественном случае понятия эквивалентны.*

Доказательство: Предположим, что Φ - восстанавливает фазы, но не восстанавливает без фаз. Предположим что набор $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ не обладает свойством АП, то есть найдется $I \subseteq \{1,..,n\}$ такое, что ни $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, ни $\{\varphi_i\}_{i\in I^C}$ не полно в R^m.

Выбираем ненулевые векторы $x = (a_1, a_2, ..., a_m), y = (b_1, b_2, ..., b_m) \in R^m$ такие, что $\langle x, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I$ и $\langle y, \varphi_i \rangle = 0$ для всех $i \in I^C$. Тогда для некоторого i либо $\langle x, \varphi_i \rangle = 0$, либо $\langle y, \varphi_i \rangle = 0$. Зафиксируем $c \neq 0$, такую что для каждого $1 \le i \le n$

$$\left|\langle x + cy, \varphi_i \rangle\right| = \left|\langle x - cy, \varphi_i \rangle\right|$$

Тогда

$$\left|\langle x + cy, \varphi_i \rangle\right|^2 = \left|\langle x - cy, \varphi_i \rangle\right|^2$$

По предположению, Φ - восстанавливает фазы, а это значит что существует $|\theta| = 1$ такое, что $(x + cy)$ и $\theta(x - cy)$ имеют одинаковые фазы. Предположим, что существует $1 \le i_0 \le m$, такое что $a_{i0} \neq 0 \neq b_{i0}$ и пусть $c = \frac{-a_{i0}}{b_{i0}}$. Тогда

$$(x + cy)_{i0} = a_{i0} + cb_{i0} = a_{i0} + \frac{-a_{i0}}{b_{i0}} b_{i0} = 0$$

и

$$(x - cy)_{i0} = a_{i0} - cb_{i0} = a_{i0} - \frac{-a_{i0}}{b_{i0}} b_{i0} = 2a_{i0} \neq 0$$

Но этого не может быть, т.к. если x и y имеют одинаковые фазы, то $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$.

Т.к. векторы x и y ненулевые, то последние два равенства возможны только и только тогда, когда либо $a_i = 0$, либо $b_i = 0$, $1 \le i \le m$. Пусть $I = \{1 \le i \le m : b_i = 0\}$ и $\{e_i\}_{i=1}^m$ - ортонормированный базис в R^m. Тогда

$$x + y = \sum_{i\in I} a_i e_i + \sum_{i\in I^C} b_i e_i \text{ и } x - y = \sum_{i\in I} a_i e_i + \sum_{i\in I^C} (-b_i) e_i$$

Тогда, существует $|\theta|=1$ такое, что $(x+y)$ и $\theta(x-y)$ имеют одинаковые фазы и они равны. Пришли к противоречию.

□

Следствие 1: В вещественном пространстве восстановление фаз и восстановление без фаз эквивалентны.

3. Слабое восстановление фаз

Определение 4: Говорят, что два вектора $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$ слабо восстанавливают фазы, если существует $|\theta|=1$ такое, что

$$phase\ a_i = \theta\ phase\ b_i,\ \text{для всех}\ i=1,2,...,m,\ \text{таких что}\ a_i \neq 0 \neq b_i.$$

В вещественном случае, если $\theta=1$, мы говорим, что x, y имеет слабо одинаковые знаки, и если $\theta=-1$ – слабо противоположные знаки.

Определение 5: Набор векторов $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в H^m слабо восстанавливает фазы, если из равенств

$$|\langle x,\varphi_i\rangle| = |\langle y,\varphi_i\rangle|,\ i=1,2,...,n$$

следует существование $|\theta|=1$, такого, что

$$phase\ x_i = \theta\ phase\ y_i,\ \text{для всех}\ i=1,2,...,m,\ \text{таких что}\ a_i \neq 0 \neq b_i.$$

Отличие слабого восстановления фаз от восстановления, данного в Определении 2 в том, что здесь может быть одновременно: $a_i=0$ и $b_i \neq 0$.

Приведем пример, который слабо восстанавливает фазы и не восстанавливает фазы в смысле Определения 2. В пространстве R^m рассмотрим набор векторов $\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{m+1}$, координаты которого записаны в столбцы матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m\times(m+1)}$$

Тогда для каждого $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$, если $|\langle x,\varphi_i\rangle|^2 = |\langle y,\varphi_i\rangle|^2$, следует, что $a_ia_j=b_ib_j$ для всех $i \neq j$.

Этот набор $(m+1)$-векторов в R^m будет слабо восстанавливать фазы.

Теорема 7: Пусть $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$ - два вектора в R^m.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathrm{sgn}(a_ia_j)=\mathrm{sgn}(b_ib_j)$, для всех $1 \le i \neq j \le m$.
2) x,y имеют либо слабо одинаковые, либо слабо противоположные знаки.

Доказательство: $1)\Rightarrow 2)$ Пусть $I=\{1\le i\le m : a_i=0\}$ и $J=\{1\le i\le m : b_i=0\}$. Определим множество индексов K, в котором $a_i \neq 0 \neq b_i$: $K=[m]\setminus(I\cup J)$. То есть $i\in K$ тогда и только тогда, когда $a_i\neq 0\neq b_i$. Пусть $i_0=\min K$. Рассмотрим два случая:

Случай 1: $\mathrm{sgn}a_{i0}=\mathrm{sgn}b_{i0}$.

Для каждого $i_0\neq k\in K$, $a_{i0}a_k=b_{i0}b_k$, здесь $\mathrm{sgn}a_k=\mathrm{sgn}b_k$. Так как остальные координаты x или y равны 0, то отсюда следует, что x,y имеют слабо одинаковые знаки.

Случай 2: $\mathrm{sgn}a_{i0}=-\mathrm{sgn}b_{i0}$.

Для каждого $i_0\neq k\in K$, $a_{i0}a_k=b_{i0}b_k$, здесь $\mathrm{sgn}a_k=-\mathrm{sgn}b_k$. Снова, так как остальные координаты x или y равны 0, то отсюда следует, что x,y имеют слабо противоположные знаки.

$2)\Rightarrow 1)$ Очевидно.

Теорема 8: Пусть $x=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $y=(b_1,b_2,...,b_m)$ - два вектора в R^m и пусть $a_ia_j=b_ib_j$ для всех $1\le i\neq j\le m$. Тогда:

1) x,y имеют либо слабо одинаковые, либо слабо противоположные знаки.
2) Выполняется одно из условий:
   a) Для $1\le i\le m$ имеем, что $a_i=0$ и $b_j=0$ для всех $i\neq j$.
   b) Для $1\le i\le m$ имеем, что $b_i=0$ и $a_j=0$ для всех $j\neq i$.
   c) Если a) и b) не выполняются, и если

$$I = \{1 \le i \le m : a_i \ne 0 \ne b_i\},$$

то выполняется следующее:

d) Если $i \in I^C$, тогда $a_i = b_i = 0$.

f) Если $i \in I$, то $|a_i| = |b_i|$.

Доказательство: 1) следует из Теоремы 7.

2a) Пусть $a_i = 0$, но $b_j \ne 0$. Тогда для каждого $j \ne i$ мы имеем, что $a_i a_j = 0 = b_i b_j$, и тогда $b_j = 0$.

2b) Симметрия по i.

c) Если a) и b) не выполняются, то по определению для каждого i либо a_i и b_i равны нулю, либо – не равны, что доказывает d).

Зафиксируем $i \in I$. Выберем $j \ne k \in I \setminus \{i\}$. Тогда

$$a_i a_j = b_i b_j \text{ и } a_i a_k = b_i b_k.$$

Умножим правую и левую часть первого из последних двух выражений на соответствующие у второго, тогда получим:

$$a_i^2 a_j a_k = b_i^2 b_j b_k.$$

Если a_j, a_k, b_j, b_k - не равны нулю, и $a_j a_k = b_j b_k$, то $a_i^2 = b_i^2$.

4. Заключение

Восстановление фаз эквивалентно восстановлению без фаз. Ведется поиск и теоретическое обоснование новых методов восстановления информации, скрытой в фазах передаваемых сигналов и недоступной для измерений общедоступными физическими приборами. В основе методики лежат последние достижения в исследовании полных линейнозависимых систем, называемых фреймами пространств.

Благодарности

Автор благодарен С. Я. Новикову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Новиков, С.Я. Полные системы в задачах восстановления сигнала / Новиков, С.Я., Федина, М.Е. // Труды Международной научно-технической конференции, Том 1 «Перспективные информационные технологии» – 2015. – С. 280–283.

[2] Botelho-Andrade, S. Phase retrieval verses phaseless reconstruction / Botelho-Andrade, S., Casazza, P., Van Nguyen, H., Tremain, J. // [Electronic resource] arXiv:1507.05815 [math.FA] – 21 Jul 2015

[3] Balan, R. Fast algorithems for signal reconstruction without phase / Balan, R., Bodmann, B. G., Casazza, P. G., Edidin, D. // Proceedings of SPIE-Wavelets XII, San Diego 6701 (2007) 670111920-670111932

[4] Balan, R.. On signal reconstruction without phase / Balan, R., Casazza, P., Edidin, D. // Appl.Comput.Harmon.Anal. 20 –2006 – P. 345–356.