Конструирование системы оптимального управления квадрокоптером

Р.М. Ибрагимов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443080, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

Аннотация

В данной работе рассматриваются линейно-квадратичные задачи управления квадрокоптером. Сначала находится положительно-определенное решение матричного уравнения Риккати и решается задача оптимальной стабилизации. Затем находится решение матричного дифференциального уравнения Риккати для решения задачи управления на конечном промежутке времени.

Ключевые слова: задача управления; уравнение Риккати; критерий оптимальности; задача стабилизации.

1. Введение

Рассматривается задача управления квадрокоптером (летательным аппаратом с четырьмя бесколлекторными электродвигателями) при следующих допущениях:

- Раму квадрокоптера будем считать абсолютно жесткой.
- Детали, из которых изготовлен аппарат одинаковы по плотности и массе, таким образом квадрокоптер имеет идеальную симметричную конструкцию.

Схематическое изображение квадрокоптера представлено на рисунке 1, где F_1, F_2, F_3, F_4 - подъемные силы первого, второго, третьего и четвертого двигателей соответственно; F_M - сила тяжести, которая действует на квадрокоптер; M - центр масс аппарата; θ, γ, ψ - углы поворота относительно осей X, Y, Z соответственно.

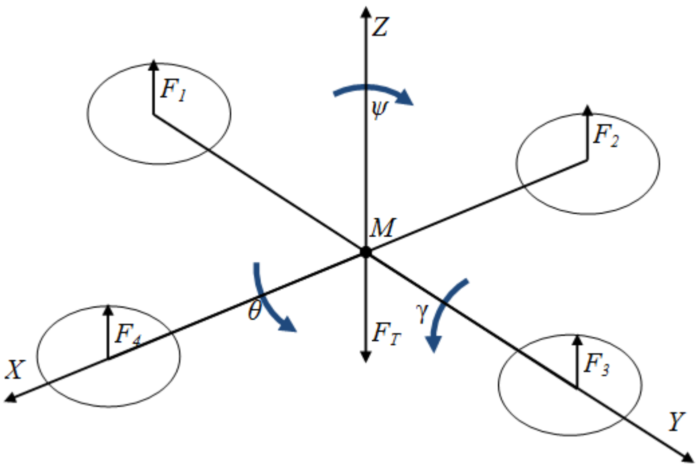

Рис. 1. Упрощенное представление квадрокоптера в пространстве.

Рассмотрим задачу синтеза управления, используя линейно-квадратичный регулятор (LQR) для следующей системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{1}$$

с критерием оптимальности $\boldsymbol{J} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\infty}(\boldsymbol{x^TQx} + \boldsymbol{u^TRu})\boldsymbol{dt}$ Данная модель описывается при помощи матриц с постоянными коэффициентами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & -0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.42 & -0.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.42 & -0.42 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix},$$

где A и B $-$ соответствующие матрицы из линеаризованной модели, матрица Q определяет степень отклонения от начала координат, матрица R определяет затраты энергии на управление.

2. Задача оптимальной стабилизации

Построим закон оптимальной стабилизации в виде управления с отрицательной обратной связью, найденный по LQR-алгоритму, который должен минимизировать указанный критерий оптимальности. Этот закон управления имеет вид $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{P}$ $-$ матрица, найденная из матричного алгебраического уравнения Риккати [1, 2]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \tag{2}$$

Матрица P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 193.04 & 0 & 0 & 37.62 & 0 & 0 \\ 0 & 95.94 & 0 & 0 & 3.14 & 0 \\ 0 & 0 & 95.94 & 0 & 0 & 3.14 \\ 37.62 & 0 & 0 & 14.38 & 0 & 0 \\ 0 & 3.14 & 0 & 0 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 3.14 & 0 & 0 & 0.86 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матрицу (3) следует проверить по критерию Сильвестра на предмет положительной определенности. В данном случае матрица P является положительно-определенной.

Собственные числа матрицы (3) имеют вид:

$$L_{j=1..6} = \begin{pmatrix} 200.5109 \\ 6.9267 \\ 96.0458 \\ 96.0458 \\ 0.7591 \\ 0.7591 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Следующим действием нужно определить закон управления $u = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$:

$$u = \begin{pmatrix} -111.80 & 132.28 & 0 & -43.16 & 36.26 & 0 \\ -111.80 & -132.28 & 0 & -43.16 & -36.26 & 0 \\ 111.80 & 0 & 132.28 & 43.16 & 0 & 36.26 \\ 111.80 & 0 & -132.28 & 43.16 & 0 & -36.26 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Собственные числа системы (1) имеют следующий вид:

$$\lambda_{i=1..6} = \begin{pmatrix} -2.59 + 2.59 * I \\ -2.59 - 2.59 * I \\ -26.22 \\ -26.22 \\ -4.24 \\ -4.24 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Найдём решение системы (1) на промежутке $t = 0..10$ для граничных условий вида:

$$x_1(0) = \frac{\pi}{3}, x_2(0) = \frac{\pi}{4}, x_3(0) = \frac{\pi}{6}, x_4(0) = \frac{1}{2}, x_5(0) = \frac{1}{3}, x_6(0) = \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Из графиков (3) – (8) видно, что система (1) действительно асимптотически устойчива, то есть компоненты решения $x_i(t) \to 0$ при $i = \overline{1,6}$.

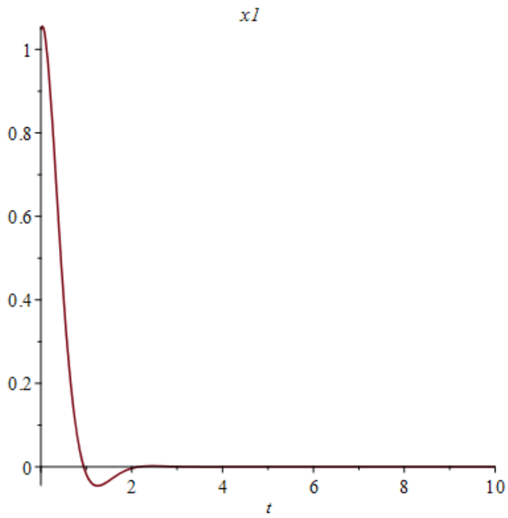

Рис. 2. График оптимального решения для $x_1(t)$.

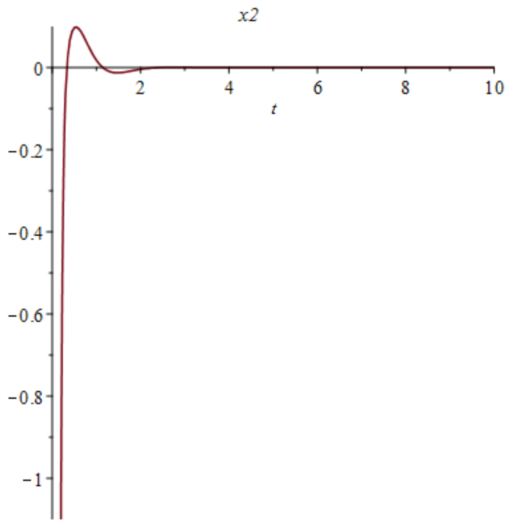

Рис. 3. График оптимального решения для $x_2(t)$.

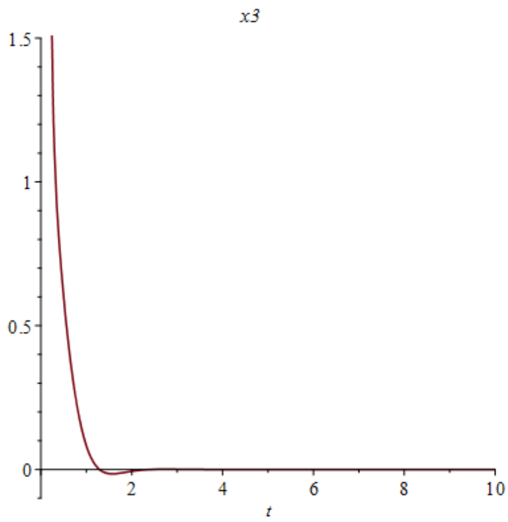

Рис. 4. График оптимального решения для $x_3(t)$.

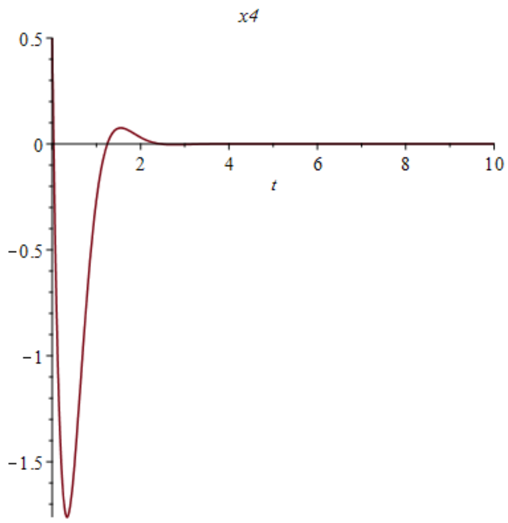

Рис. 5. График оптимального решения для $x_4(t)$.

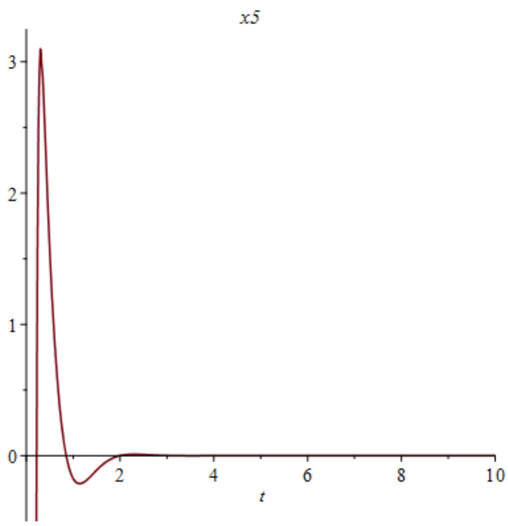

Рис. 6. График оптимального решения для $x_5(t)$.

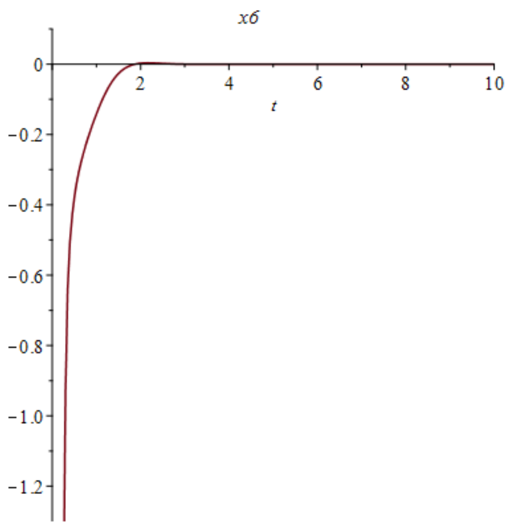

Рис. 7. График оптимального решения для $x_6(t)$.

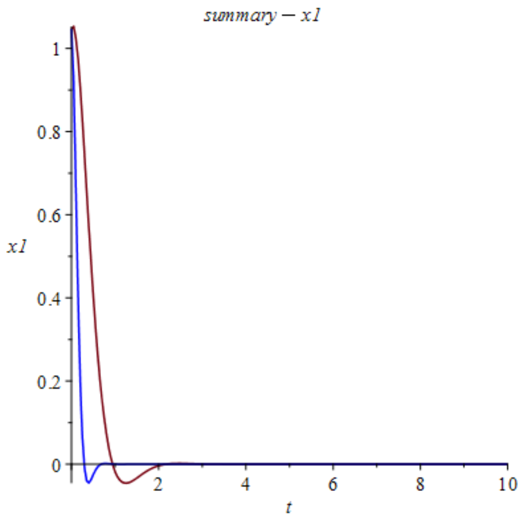

Рис. 8. График зависимости оптимального решения для $x_1(t)$.

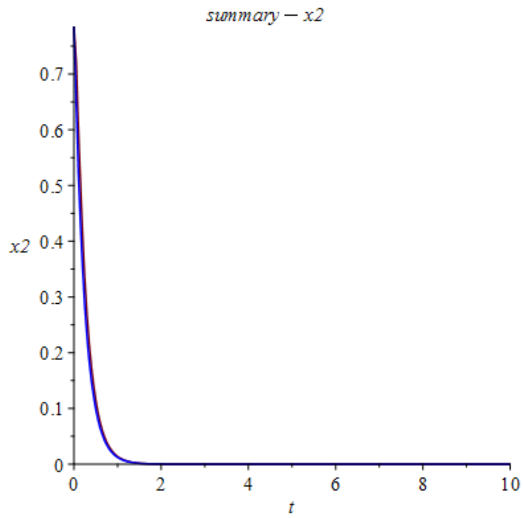

Рис. 9. График зависимости оптимального решения для $x_2(t)$.

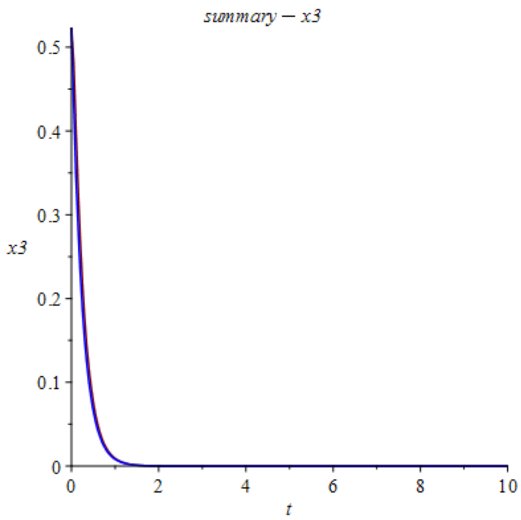

Рис. 10. График зависимости оптимального решения для $x_3(t)$.

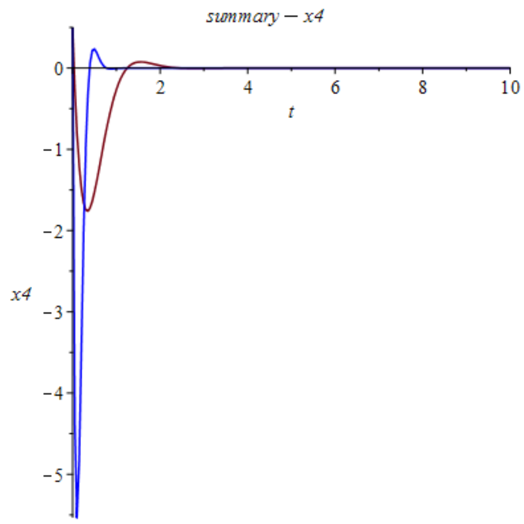

Рис. 11. График зависимости оптимального решения для $x_4(t)$.

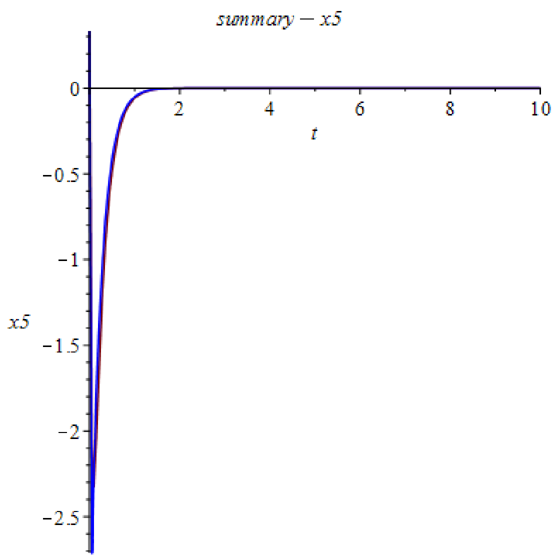

Рис. 12. График зависимости оптимального решения для $x_5(t)$.

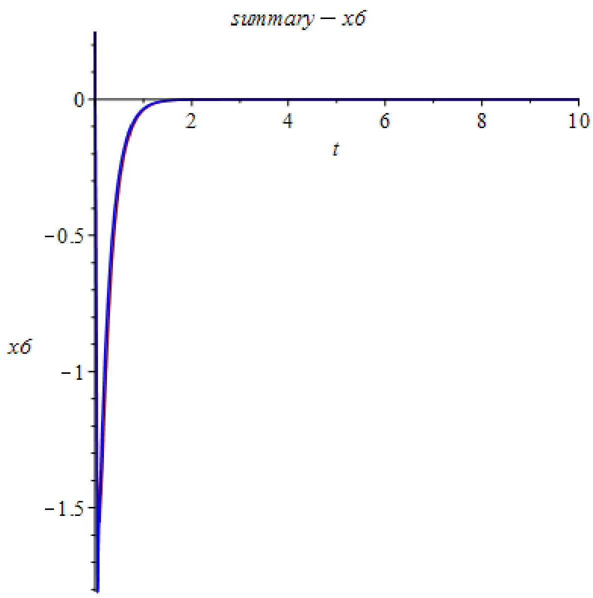

Рис. 13. График зависимости оптимального решения для $x_6(t)$.

Решая систему (1) с помощью метода Лапласа, при $R_{ii} = 0.01$ и $R_{ii} = 0.0001$, получим

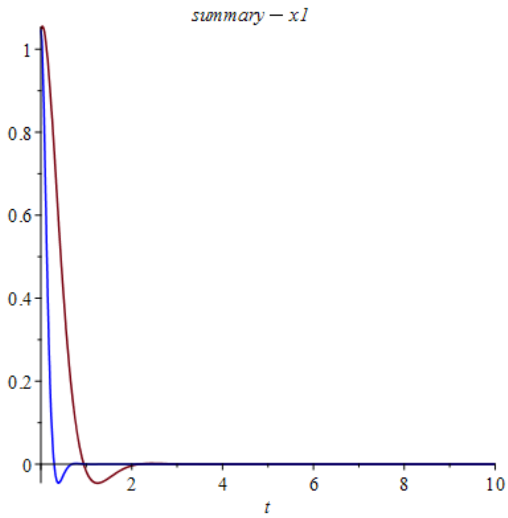

Рис. 14. График зависимости оптимального решения для $x_1(t)$.

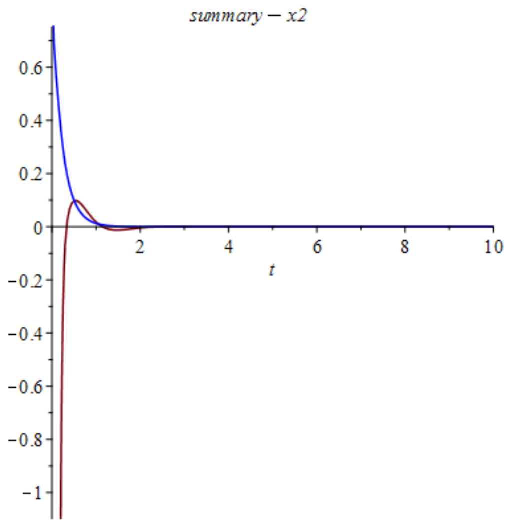

Рис. 15. График зависимости оптимального решения для $x_2(t)$.

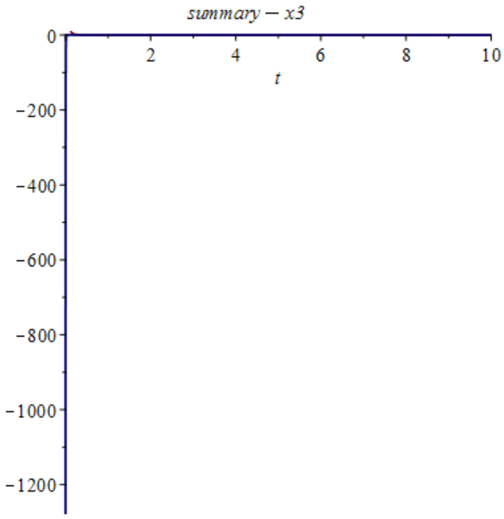

Рис. 16. График зависимости оптимального решения для $x_3(t)$.

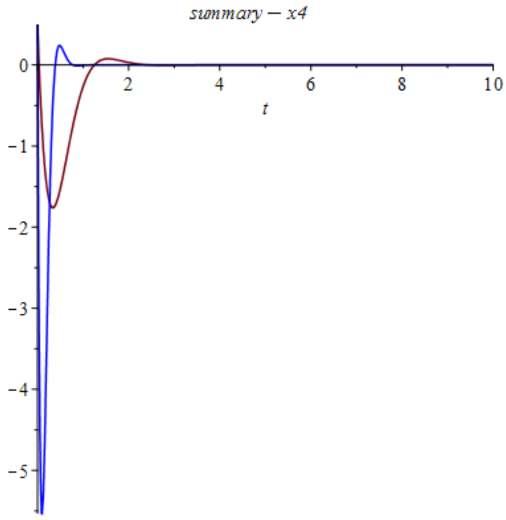

Рис. 17. График зависимости оптимального решения для $x_4(t)$.

3. Задача оптимального управления на конечном промежутке времени

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном промежутке времени.

Пусть функционал качества имеет вид:

$$J = \frac{1}{2}x^T(1)Fx(1) + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}(x^TQx + \varepsilon^2 u^T Ru)dt.$$

Уравнение Риккати примет вид [1, 2]:

$$\dot{P} + A^TP + PA - PBE\varepsilon^{-2}B^TP + Q = 0. \tag{8}$$

Следует отметить, что это уравнение является сингулярно возмущенным и для его анализа может быть применен метод интегральных многообразий [3–5], а рассматриваемая задача относится к задачам оптимального управления с дешевым управлением [6].

Определим блочные матрицы для уравнения (8):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Получим дифференциальное уравнение Риккати с малым параметром в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1} & \varepsilon\dot{p_2} \\ \varepsilon\dot{p}_2^T & \varepsilon\dot{p_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & \varepsilon p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & \varepsilon p_2^T \end{pmatrix} - \varepsilon^{-4} \begin{pmatrix} \varepsilon^4 p_2 s p_2^T & \varepsilon^4 p_2 s p_3 \\ \varepsilon^4 p_3 s p_2^T & \varepsilon^4 p_3 s p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{10}$$

где $s = B_1 B_1^T$, далее упростим выражение (10) в виде уравнений для блоков (9):

$$\dot{p_1} - p_2 s p_2^T + q_1 = 0, \tag{11}$$

$$\varepsilon\dot{p_2} + p_1 - p_2 s p_3 = 0, \tag{12}$$

$$\varepsilon\dot{p_2}^T + p_1 - p_3 s p_2^T = 0, \tag{13}$$

$$\varepsilon\dot{p_3} + \varepsilon p_2 + \varepsilon p_2^T - p_3 s p_3 + q_2 = 0. \tag{14}$$

Далее произведем замену:

$$p_1 = \overline{p_1}, p_2 = \overline{p_2}, p_3 = \overline{p_3}.$$

Получим уравнения следующего вида:

$$\overline{p_3} s \overline{p_3} = q_{2,} \tag{15}$$

$$\overline{p_2} s \overline{p_2}^T = q_1, \tag{16}$$

$$p_1 = \overline{p_2} s \overline{p_3}. \tag{17}$$

Убедимся, что матрица S диагональная.

$$S = B_1 B_1^T = \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3528 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3528 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Найдем решения уравнений (15,16,17):

$$\overline{p_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.529232524 & 0 \\ 0 & 0 & 7.529232524 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 372.6779 & 0 & 0 \\ 0 & 31.49703 & 0 \\ 0 & 0 & 31.49703 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\overline{p_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 83.666002651 & 0 \\ 0 & 0 & 83.666002651 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Далее выполним замену и подставим в (11,12,13,14):

$$p_1 = X + \overline{p_1}, p_2 = Y_1 + \overline{p_2}, p_3 = Y_2 + \overline{p_3}.$$

Получим

$$(X + \dot{\overline{p_1}}) - (Y_1 + \overline{p_2}) s (Y_1 + \overline{p_2})^T + q_1 = 0 \tag{22}$$

$$\varepsilon(Y_1 \dot{+} \overline{p_2}) + (X + \overline{p_1}) - (Y_1 + \overline{p_2}) s (Y_2 + \overline{p_3}) = 0 \tag{23}$$

$$\varepsilon(Y_1 \dot{+} \overline{p_2})^T + (X + \overline{p_1}) - (Y_2 + \overline{p_3}) s (Y_1 + \overline{p_2})^T = 0 \tag{24}$$

$$\varepsilon(Y_2 \dot{+} \overline{p_3}) + \varepsilon(Y_1 + \overline{p_2}) + \varepsilon(Y_1 + \overline{p_2})^T - (Y_2 + \overline{p_3}) s (Y_2 + \overline{p_3}) + q_2 = 0. \tag{25}$$

Упростим (22) – (25):

$$\dot{X} - (Y_1 + \overline{p_2}) s (Y_1 + \overline{p_2})^T + q_1 = 0 \tag{26}$$

$$\varepsilon\dot{Y_1} + (X + \overline{p_1}) - (Y_1 + \overline{p_2}) s (Y_2 + \overline{p_3}) = 0 \tag{27}$$

$$\varepsilon\dot{Y_1}^T + (X + \overline{p_1}) - (Y_2 + \overline{p_3}) s (Y_1 + \overline{p_2})^T = 0 \tag{28}$$

$$\varepsilon\dot{Y_2} + \varepsilon(Y_1 + \overline{p_2}) + \varepsilon(Y_1 + \overline{p_2})^T - (Y_2 + \overline{p_3}) s (Y_2 + \overline{p_3}) + q_2 = 0. \tag{29}$$

Упростим и перенесем слагаемые относительно переменных Y_1, Y_2, X вправо за знак равенства:

$$\dot{X} - \overline{p_2}s\overline{p_2}^T + q_1 = Y_1 s Y_1 + Y_1 s \overline{p_2}^T + \overline{p_2} s Y_1 \tag{30}$$

$$\varepsilon \dot{Y}_1 + \overline{p_1} - \overline{p_2} s \overline{p_3} = -X + Y_1 s Y_2 + Y_1 s \overline{p_3} + \overline{p_2} s Y_2 \tag{31}$$

$$\varepsilon \dot{Y_1}^T + \overline{p_1} - \overline{p_3} s \overline{p_2}^T = -X + Y_2 s {Y_1}^T + Y_2 s \overline{p_2}^T + \overline{p_3} s {Y_1}^T \tag{32}$$

$$\varepsilon \dot{Y}_2 + \varepsilon\left(\overline{p_2} + \overline{p_2}^T\right) - \overline{p_3} s \overline{p_3}^T + q_2 = -\varepsilon\left(Y_1 + {Y_1}^T\right) + Y_2 s Y_2 + Y_2 s \overline{p_3} + \overline{p_3} s Y_2. \tag{33}$$

Произведем следующие замены и подставим в (30) – (33):

$$J_1 = \overline{p_3} s \overline{p_2}^T = \overline{p_2} s \overline{p_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 83.6660026578811 & 0 \\ 0 & 0 & 83.6660026578811 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \overline{p_2} + \overline{p_2}^T = \begin{pmatrix} 745.355992400000 & 0 & 0 \\ 0 & 62.9940788400000 & 0 \\ 0 & 0 & 62.9940788400000 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \overline{p_3} s \overline{p_3}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.9999999988821 & 0 \\ 0 & 0 & 19.9999999988821 \end{pmatrix},$$

$$J_5 = \overline{p_2} s = s \overline{p_2}^T = \begin{pmatrix} 1.34164078632000 & 0 & 0 \\ 0 & 11.1121555073760 & 0 \\ 0 & 0 & 11.1121555073760 \end{pmatrix},$$

$$J_6 = s \overline{p_3} = \overline{p_3} s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65631323446720 & 0 \\ 0 & 0 & 2.65631323446720 \end{pmatrix}.$$

Получим систему вида (34) – (37):

$$\dot{X} = Y_1 s Y_1 + Y_1 J_5 + J_5 Y_1 \tag{34}$$

$$\varepsilon \dot{Y}_1 = -X + Y_1 s Y_2 + Y_1 J_6 + J_5 Y_2 \tag{35}$$

$$\varepsilon \dot{Y_1}^T = -X + Y_2 s {Y_1}^T + Y_2 J_5 + J_6 {Y_1}^T \tag{36}$$

$$\varepsilon \dot{Y}_2 + \varepsilon J_2 = -\varepsilon\left(Y_1 + {Y_1}^T\right) + Y_2 s Y_2 + Y_2 J_6 + J_6 Y_2. \tag{37}$$

Введем замену в виде неизвестных матриц, подставим в (34) – (37) и распишем покомпонентно:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (34) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 & \dot{x}_4 & \dot{x}_5 \\ \dot{x}_3 & \dot{x}_5 & \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3528 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 11.11 & 0 \\ 0 & 0 & 11.11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 11.11 & 0 \\ 0 & 0 & 11.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix}.$$

Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = (0{,}0036 {z_1}^2 + 0.3528 z_2 z_4 + 0.3528 z_3 z_7) + 1.34 z_1 + 1.34 z_1$$

$$\dot{x}_2 = (0{,}0036 z_1 z_2 + 0.3528 z_2 z_5 + 0.3528 z_3 z_8) + 1.34 z_2 + 11.11 z_2$$

$$\dot{x}_3 = (0{,}0036 z_1 z_3 + 0.3528 z_2 z_6 + 0.3528 z_3 z_9) + 1.34 z_3 + 11.11 z_3$$

$$\dot{x}_4 = (0{,}0036 z_2 z_4 + 0.3528 {z_5}^2 + 0.3528 z_6 z_8) + 11.11 z_5 + 11.11 z_5$$

$$\dot{x}_5 = (0{,}0036 z_4 z_3 + 0.3528 z_5 z_6 + 0.3528 z_6 z_9) + 11.11 z_6 + 11.11 z_6$$

$$\dot{x}_6 = (0{,}0036 z_3 z_7 + 0.3528 z_6 z_8 + 0.3528 {z_9}^2) + 11.11 z_9 + 11.11 z_9.$$

Уравнение (35) примет вид:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 & \dot{z}_5 & \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 & \dot{z}_8 & \dot{z}_9 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3528 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65 & 0 \\ 0 & 0 & 2.65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 11.11 & 0 \\ 0 & 0 & 11.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix}.$$

Получим систему вида:

$$\varepsilon \dot{z}_1 = -x_1 + (0{,}0036 z_1 k_1 + 0{,}3528 z_2 k_2 + 0{,}3528 z_3 k_3) + 0 + 1{,}34 k_1$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -x_2 + (0{,}0036 z_1 k_2 + 0{,}3528 z_2 k_4 + 0{,}3528 z_3 k_5) + 2{,}65 z_2 + 1{,}34 k_2$$

$$\varepsilon \dot{z}_3 = -x_3 + (0{,}0036 z_1 k_3 + 0{,}3528 z_2 k_5 + 0{,}3528 z_3 k_6) + 2{,}65 z_3 + 11{,}11 k_3$$

$$\varepsilon \dot{z}_4 = -x_2 + (0{,}0036 z_4 k_1 + 0{,}3528 z_5 k_2 + 0{,}3528 z_6 k_3) + 0 + 1{,}34 k_2$$

$$\varepsilon \dot{z}_5 = -x_4 + (0{,}0036 z_4 k_2 + 0{,}3528 z_5 k_4 + 0{,}3528 z_6 k_5) + 2{,}65 z_5 + 11{,}11 k_4$$

$$\varepsilon \dot{z}_6 = -x_5 + (0{,}0036 z_4 k_3 + 0{,}3528 z_5 k_5 + 0{,}3528 z_6 k_6) + 2{,}65 z_6 + 11{,}11 k_5$$

$$\varepsilon \dot{z}_7 = -x_3 + (0{,}0036 z_7 k_1 + 0{,}3528 z_8 k_2 + 0{,}3528 z_9 k_3) + 0 + 1{,}34 k_3$$

$$\varepsilon \dot{z}_8 = -x_5 + (0{,}0036 z_7 k_2 + 0{,}3528 z_8 k_4 + 0{,}3528 z_9 k_5) + 2{,}65 z_8 + 11{,}11 k_5$$

$$\varepsilon \dot{z}_9 = -x_6 + (0{,}0036 z_7 k_3 + 0{,}3528 z_8 k_5 + 0{,}3528 z_9 k_6) + 2{,}65 z_9 + 11{,}11 k_6.$$

Уравнение (37) примет вид:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \dot{k}_1 & \dot{k}_2 & \dot{k}_3 \\ \dot{k}_2 & \dot{k}_4 & \dot{k}_5 \\ \dot{k}_3 & \dot{k}_5 & \dot{k}_6 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 745{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 62{,}99 & 0 \\ 0 & 0 & 62{,}99 \end{pmatrix}$$
$$= -\varepsilon \left(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_7 \\ z_2 & z_5 & z_8 \\ z_3 & z_6 & z_9 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3528 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3528 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65 & 0 \\ 0 & 0 & 2.65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.65 & 0 \\ 0 & 0 & 2.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_4 & k_5 \\ k_3 & k_5 & k_6 \end{pmatrix} = 0,$$

далее получим систему вида:

$$\varepsilon \dot{k}_1 + \varepsilon 745{,}35 = -\varepsilon 2 z_1 + \left(0{,}0036 {k_1}^2 + 0{,}3528 {k_2}^2 + 0{,}3528 {k_3}^2\right) + 0 + 0$$

$$\varepsilon \dot{k}_2 + 0 = -\varepsilon (z_4 + z_2) + (0{,}0036 k_1 k_2 + 0{,}3528 k_2 k_4 + 0{,}3528 k_3 k_5) + 2{,}65 k_2 + 2{,}65 k_2$$

$$\varepsilon \dot{k}_3 + 0 = -\varepsilon (z_7 + z_3) + (0{,}0036 k_1 k_3 + 0{,}3528 k_2 k_5 + 0{,}3528 k_3 k_6) + 2{,}65 k_3 + 2{,}65 k_3$$

$$\varepsilon \dot{k}_4 + \varepsilon 62{,}99 = -\varepsilon z_5 + \left(0{,}0036 {k_2}^2 + 0{,}3528 {k_4}^2 + 0{,}3528 {k_5}^2\right) + 2{,}65 k_4 + 2{,}65 k_4$$

$$\varepsilon \dot{k}_5 + 0 = -\varepsilon (z_8 + z_6) + (0{,}0036 k_2 k_3 + 0{,}3528 k_4 k_5 + 0{,}3528 k_5 k_6) + 2{,}65 k_5 + 2{,}65 k_5$$

$$\varepsilon \dot{k}_6 + \varepsilon 62{,}99 = -\varepsilon (2 z_9) + \left(0{,}0036 {k_3}^2 + 0{,}3528 {k_5}^2 + 0{,}3528 {k_6}^2\right) + 2{,}65 k_6 + 2{,}65 k_6.$$

Получим решение с граничными условиями $x_i(1) = 0, z_i(1) = 0, k_i(1) = 0.$

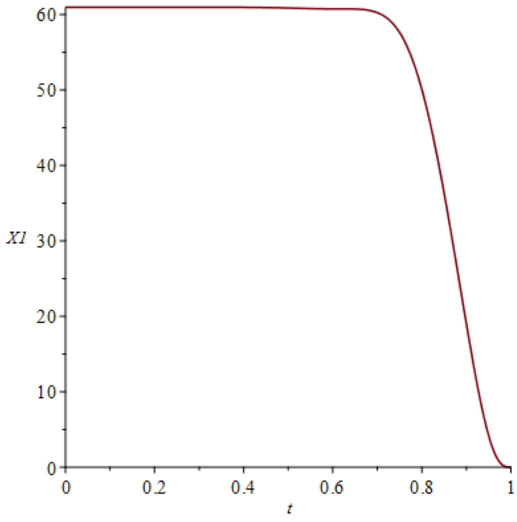

Рис. 18. График оптимального решения для $x_1(t)$.

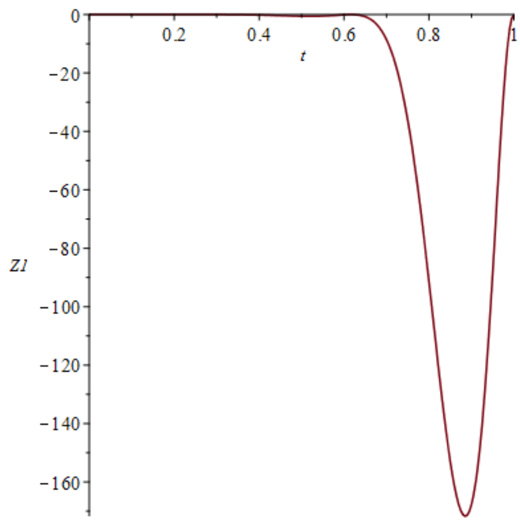

Рис. 19. График оптимального решения для $z_1(t)$.

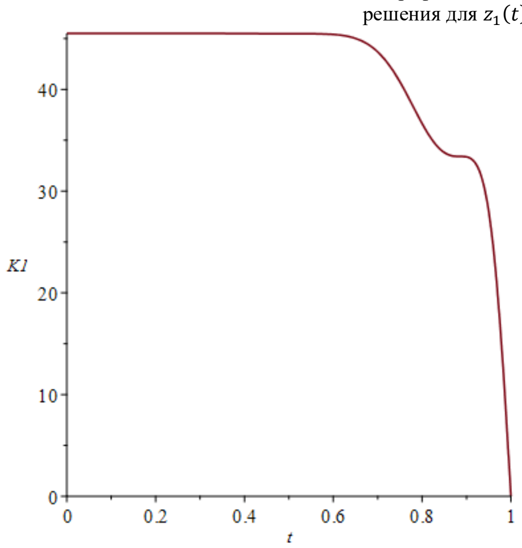

Рис. 20. График оптимального решения для $k_1(t)$.

Изменим граничные условия $x_i(10) = 0, z_i(10) = 0, k_i(10) = 0$.

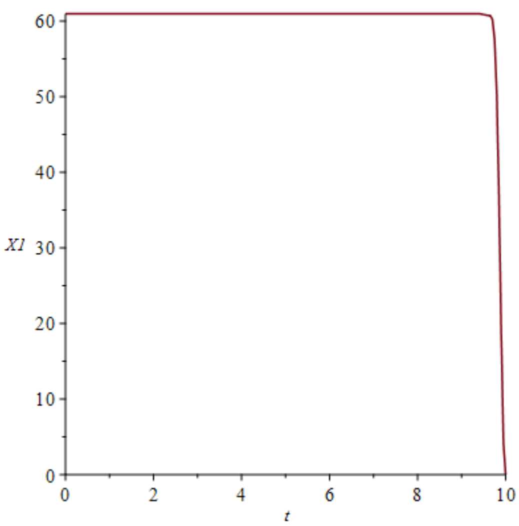

Рис. 21. График оптимального решения для $x_1(t)$.

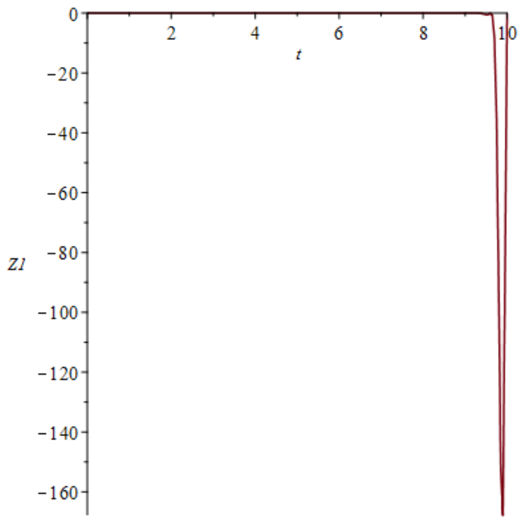

Рис. 22. График оптимального решения для $z_1(t)$.

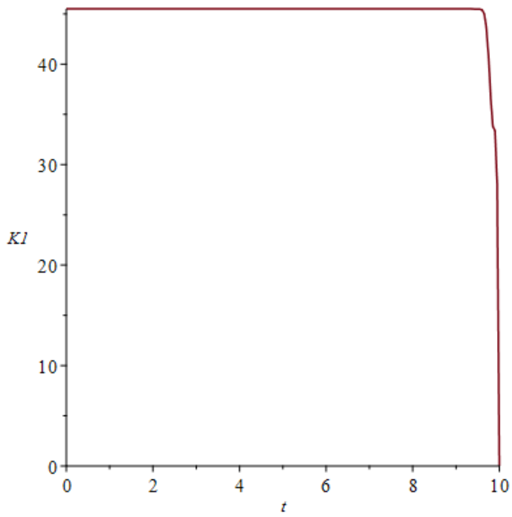

Рис. 23. График оптимального решения для $k_1(t)$.

4. Заключение

В работе рассмотрены две задачи управления квадрокоптером на конечном и бесконечном временных промежутках. Получены численно решения возникающих дифференциальных систем.

Литература

[1] Самойленко, В. И. Техническая кибернетика: учебное пособие / В. И. Самойленко, В. А. Пузырев, И. В. Грубрин. – М.: Издательство МАИ, 1994. – 280 с.

[2] Моисеев, Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. –М.: Издательство Наука, 1971. – 424 с.

[3] Strygin, V.V. Effect of geometric and kinetic parameters and energy dissipation on orientation stability of dual-spin satellites / V.V. Strygin, V.A. Sobolev // Cosmic Research. – Nov. 1976. – Vol. 14(3) – P. 331-335.

[4] Sobolev, V.A. Singular perturbations in linearly quadratic optimal control problems / V.A. Sobolev // Autom. Remote Control. – 1991. – Vol. 52(2) – P. 180-189.

[5] Mikheev, Yu.V. Asymptotic analysis of digital control systems / Yu. Mikheev, V. Sobolev, E.M. Fridman // Autom. Remote Control. – 1988. – Vol. 49(9) – P. 1175-1180.

[6] Smetannikova, E. Regularization of cheap periodic control problems / E. Smetannikova, V. Sobolev // Automation and Remote Control. – 2005. – Vol. 66(6) – P. 903- 916.