

## Основанная на дистрибутивной решетке модель рассуждений в продукционной логике нулевого порядка

С.Д. Махортов<sup>1</sup>, И.Ю. Иванов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Университетская площадь 1, Воронеж, Россия, 394018

**Аннотация.** Модели рассуждений играют важную роль в искусственном интеллекте. Одна из таких моделей лежит в основе продукционных систем, широко распространенных в информатике. Эти системы оперируют правилами, или продукциями, вида «если истинно  $A$ , то истинно  $B$ », где  $A, B$  – элементы логики заданного порядка. В настоящей работе рассматривается пропозициональная логика, поэтому  $A, B$  – элементарные факты или выражения над ними, построенные с помощью операций логики нулевого порядка. Существует два типа логического вывода, осуществляемого в продукционных системах: прямой и обратный. При обратном выводе возникает проблема уменьшения количества запросов к внешним источникам информации. В докладе предлагается подход к решению этой проблемы в случае логических продукционных систем, использующих в своих правилах только конъюнкции и дизъюнкции. Метод основывается на представлении множества правил продукционной системы дополнительным бинарным отношением на дистрибутивной решетке. Соответствующая алгебраическая система называется LP-структурой. Процесс обратного логического вывода моделируется как решение продукционно-логического уравнения в LP-структуре. Результаты применения предлагаемого подхода демонстрируются на примере тестовых баз знаний.

### 1. Введение

Как известно [1], одна из естественных форм представления знаний основывается на алгебраической логике. Ввиду ее универсального характера данный подход оказывается недостаточно эффективными в ряде частных случаев, в том числе при рассмотрении продукционных систем, широко распространенных в информатике [2]. Теория LP-структур, систематически изложенная в монографии [3], предоставляет новую теоретическую основу исследования формальных систем продукционного типа и открывает широкие возможности по решению вопросов повышения эффективности таких систем, включая вопросы, связанные с ускорением обратного логического вывода в экспертных продукционных системах [4].

В общем случае LP-структура представляет собой математическую решетку  $\mathbb{F}$  [5], на которой задано дополнительное бинарное отношение  $R$  (наряду с определяющим решетку частичным порядком). Это отношение можно интерпретировать как множество правил экспертной продукционной системы, а соответствующее ему логическое замыкание  $R^L$  – как множество всех логических связей, порождаемых  $R$ . Задача обратного логического вывода в такой модели может быть сведена к решению продукционно-логического уравнения вида  $R^L(x) = b$  [6], где  $b \in \mathbb{F}$  – заданный элемент, отражающий выдвинутую при обратном

логическом выводе гипотезу,  $x$  – искомый в  $\mathbb{F}$  элемент, подтверждающий выдвинутую гипотезу. Вид решетки  $\mathbb{F}$ , а также определение решения  $x$  указанного уравнения уточняются в конкретном случае в зависимости от предметной области и решаемой задачи.

## 2. Описание модели

Случай, когда  $\mathbb{F}$  – атомно-порожденная решетка, был исследован [3] и успешно апробирован [7–9] в рамках решения задачи ускорения обратного логического вывода в плане уменьшения количества запросов к внешним источникам информации. Однако данное исследование ограничено классом продукционных систем, оперирующих единственной логической связкой – конъюнкцией. Идея распространения описанного подхода для решения аналогичной задачи на случай булевой решетки, с целью повышения эффективности продукционных систем с полным набором логических связок пропозиционального языка (конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием) была представлена в работе [10]. Позднее она была развита и исследована в работах [11–12].

Однако возникающие на булевой решетке алгоритмы зачастую имеют экспоненциальную сложность, что, впрочем, отражает общие свойства базовых алгоритмов пропозициональной логики. В этой связи для практической апробации полученных результатов было принято решение сузить круг моделируемых продукционных систем до использующих две логические связки – конъюнкцию и дизъюнкцию, что привело к модификации модели на случай, когда  $\mathbb{F}$  – дистрибутивная решетка.

В настоящей работе предлагается подход для сведения задачи решения продукционно-логического уравнения на дистрибутивной решетке к задаче решения уравнения на более простой – атомно-порожденной решетке. Применение такого подхода оказывается возможным на основании следующих новых теоретических результатов.

Пусть  $\mathbb{F}$  – конечная дистрибутивная решетка,  $R$  – бинарное отношение на  $\mathbb{F}$ .

Пара элементов  $(a, b) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$  называется логически связанной отношением  $R$  (обозначается  $a \xrightarrow{R} b$ ), если выполнено одно из следующих условий:

$$(a, b) \in R; \quad (1)$$

$$a \leq b; \quad (2)$$

$$\text{существуют такие } b_1, b_2 \in \mathbb{F}, \text{ что } b_1 \wedge b_2 = b \text{ и } a \xrightarrow{R} b_1, a \xrightarrow{R} b_2; \quad (3)$$

$$\text{существуют такие } a_1, a_2 \in \mathbb{F}, \text{ что } a_1 \vee a_2 = a \text{ и } a_1 \xrightarrow{R} b, a_2 \xrightarrow{R} b; \quad (4)$$

$$\text{существует такой } c \in \mathbb{F}, \text{ что } a \xrightarrow{R} c, c \xrightarrow{R} b. \quad (5)$$

Правила (3), (4) имеют многоместные эквивалентные аналоги:

$$\text{существуют такие } a_i, b_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n, \text{ что } \bigwedge_{i=1}^n a_i = a, \bigwedge_{i=1}^n b_i = b \text{ и } a_i \xrightarrow{R} b_i, i = 1, \dots, n; \quad (3')$$

$$\text{существуют такие } a_i, b_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n, \text{ что } \bigvee_{i=1}^n a_i = a, \bigvee_{i=1}^n b_i = b \text{ и } a_i \xrightarrow{R} b_i, i = 1, \dots, n. \quad (4')$$

**Лемма 1.** При выводе любой логической связи все применения V-дистрибутивного правила (4') могут быть произведены без участия следующих правил: правила 2) со строгим неравенством,  $\wedge$ -дистрибутивного правила (3'), транзитивного правила (5).

**Лемма 2.** При выводе любой логической связи участие правила 2) во всех применениях V-дистрибутивного правила (4') может быть сведено к применению относительно равенства между конеразложимыми элементами [13].

Обозначим  $\mathbb{D}$  – множество конеразложимых элементов решетки  $\mathbb{F}$ . Заметим, что  $\mathbb{D}$  образует верхнюю полурешетку [5]. Введем нижнюю полурешетку  $\mathbb{K}$  как замыкание множества  $\mathbb{D}$  относительно операции пересечения.

Отображение  $\tau: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{K}$ , действующее по правилу  $\tau(x) = d_1 \wedge \dots \wedge d_m$ , где  $d_i \in \mathbb{D}$ ,  $i = 1, \dots, m$  – элементы  $\wedge$ -несократимого представления  $x$  в виде пересечения конеразложимых элементов [5], устанавливает, в силу свойств такого представления, взаимно однозначное соответствие между решетками  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{K}$ .

Рассмотрим атомно-порожденную решетку  $\mathbb{H}$ , построенную по правилам:

- 1) если  $d \in \mathbb{D}$ , то  $\{d\} \in \mathbb{H}$ ;
- 2) если  $A, B \in \mathbb{H}$ , то  $A \cup B \in \mathbb{H}$ .

Введем отображение  $\delta: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{H}$ , действующее по правилу  $\delta(x) = \{d_1, \dots, d_k\}$ , где  $d_i \in \mathbb{D}$ ,  $i = 1, \dots, m$  – элементы  $\Lambda$ -несократимого представления  $x$  в виде пересечения конеразложимых элементов, устанавливающее, вновь в силу свойств такого представления, взаимно однозначное соответствие между решетками  $\mathbb{K}$  и  $\mathbb{H}$ .

Рассмотрим композицию отображений  $\phi = \delta \circ \tau: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{H}$ , устанавливающую, как композиция взаимно однозначных отображений, взаимно однозначное соответствие между решетками  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{H}$ .

Пара  $(A, B) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$  называется логически связанной некоторым отношением  $S$  на  $\mathbb{H}$  (этот факт записывается как  $A \xrightarrow{S} B$ ), если существует логическая цепочка  $\overrightarrow{r_{AB}}$ , соединяющая  $A$  и  $B$  [3]. Рассмотрим в качестве отношения  $S$  множество  $\{(\phi(a), \phi(b)) \mid (a, b) \in R\}$ .

На основании лемм 1 и 2 можно доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Отображение  $\psi: \left(\xrightarrow{R}\right) \longrightarrow \left(\xrightarrow{S}\right)$ , действующее по правилу  $\psi(a, b) = (\phi(a), \phi(b))$ , устанавливает биекцию логического замыкания  $R$  в логическое замыкание  $S$ .

### 3. Заключение

Приведенная теорема в практическом смысле означает, что исследование всякой логической связи на дистрибутивной решетке  $\mathbb{F}$  можно свести к исследованию логической связи на атомно-порожденной решетке  $\mathbb{H}$ . Отсюда в свою очередь следует, что для повышения эффективности продукционных систем с расширенным набором логических связей можно применять методы, описанные в упомянутых выше работах, посвященных LP-структурам на атомно-порожденной решетке.

### 4. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00037.

### 5. Литература

- [1] Расёва, Е. Математика метаматематики / Е. Расёва, Р. Сикорски – М.: Наука, 1972. – 591 с.
- [2] Попов, Э.В. Экспертные системы: решение неформализованных задач в диалоге с ЭВМ – М.: Наука, 1987. – 288 с.
- [3] Махортов, С.Д. Математические основы искусственного интеллекта: теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний продукционного типа – М.: МЦНМО, 2009. – 304 с.
- [4] Люгер, Дж.Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 864 с.
- [5] Биркгоф, Г. Теория решёток – М.: Наука, 1984. – 568 с.
- [6] Махортов, С.Д. Логические уравнения на решетках // Вестник ВГУ. Серия Физика, математика. – 2004. – Т. 2. – С. 170-178.
- [7] Махортов, С.Д. Интегрированная среда логического программирования LPExpert // Информационные технологии. – 2009. – № 12. – С. 65-66.
- [8] Махортов, С.Д. Релевантный обратный вывод и верификация логических программ на основе решения уравнений в LP-структурах // Методы и средства обработки информации: Третья Всероссийская научная конференция – М.: ВМиК МГУ, 2009. – С. 143-148.
- [9] Болотова, С.Ю. Реализация многопоточности в релевантном LP-выводе // Программная инженерия. – 2014. – № 1. – С. 12-18.
- [10] Махортов, С.Д. Об алгебраической интерпретации продукционной логики нулевого порядка // Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2007. – № 1. – С. 56-63.

- [11] Иванов, И.Ю. Продукционно-логические уравнения на булевых решетках // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 170-177.
- [12] Иванов, И.Ю. Расширенная модель LP-вывода на булевой решётке // Программная инженерия. – 2016. – № 6. – С. 252-257.
- [13] Гретцер, Г. Общая теория решёток – М.: Мир, 1981. – 456 с.

## Based on Distributive Lattice Reasoning Model in Production Zero-Order Logic

S.D. Makhortov<sup>1</sup>, I.Y. Ivanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh, Russia, 394018

**Abstract.** Reasoning models play an important role in artificial intelligence. One of such models are logic-based production systems that are widespread in informatics. These systems are based on rules, or productions, of the form “if  $A$  is true then  $B$  is true” where  $A, B$  are the elements of logic of a particular order. In this paper, propositional logic is under consideration, thus  $A, B$  are elementary facts or expressions over elementary facts constructed using propositional logic operators. There are two types of logical inference performed in production systems: forward chaining and backward chaining. In the backward chaining the problem of decreasing a number of queries to external sources of information arises. In the report, an approach to solving this problem is proposed in case of logic-based production systems that use conjunctions and disjunctions in its rules. This approach is based on representing a set of rules and its implications by an additional relation over a distribute lattice (the resulting algebraic system is a so-called LP structure). The process of backward chaining is modelled as a solution of a production-logical equation on a LP-structure. The results of the proposed approach application are demonstrated using test knowledge bases.