

Апробация синергетических алгоритмов управления в условиях возмущений в базовой модели иммунологии

С.И. Колесникова

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
St. Petersburg, Russia
skolesnikova@yandex.ru

Е.В. Кустова

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
St. Petersburg, Russia
astronik00@gmail.com

Аннотация — Представлено продолжение исследований применимости принципов синергетической теории управления (СТУ) к задаче стабилизации биомедицинского объекта, описание которого включает взаимозависимые биохимические и физические процессы, нестабильные при определенных параметрических и начальных условиях. Приводятся результаты сравнения эффективности нового стохастического регулятора на основе СТУ и детерминированного метода агрегированных регуляторов применительно к возмущенному объекту.

Ключевые слова — стохастический иммунологический объект, нелинейное управление биоинженерным объектом, инвариантные системы, управление в пространстве состояний динамической системы

I. ВВЕДЕНИЕ

Применение механистических представлений к сложным системам биохимической и биофизической природы восходит к результатам о независимости основных принципов управления от конкретной природы объекта. Свойство инвариантности математических преобразований лежит в основе универсального подхода теории управления к решению различных по своей сути задач управления (химических, биологических и т.п.) [1].

Цель доклада – сравнение эффективности нового стохастического алгоритма конструирования вмешательства в динамику биомедицинского объекта (простейшей модели иммунологии (по Г.И. Марчуку [2]) с детерминированным, полученными на основе СТУ [1].

К условиям применения СТУ и его основного метода - аналитического конструирования систем управления, относятся следующие положения:

- исходное описание объекта представлено в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных (разностных) уравнений;
- цель управления $\mathbf{u} \in \square^m$ задана в виде предельного уравнения (например, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Psi(\mathbf{x}(t))) = 0$, где $\mathbf{x}(t) \in \square^n$ - вектор состояния объекта управления в момент t , $\Psi(\mathbf{x}(t)) \in \square^m$, $m \leq n$ - экспертно определяемая функция (макропеременная в терминах СТУ);
- специального вида функционал качества $\Phi(\Psi)$ отражает физические особенности целевой системы; исходная система под действием найденного

управления самоорганизованно и, в этой связи, наиболее энергоэффективно изменять свое состояние при достижении цели управления $\Psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Реализуемость аналитического вывода управления неустойчивыми объектами биохимической природы на основе СТУ определяется 1) формализацией целевого закона поведения; 2) доказательством устойчивости целевой системы; 3) решением иерархии вариационных задач, имеющих простой вид за счет вида $\Phi(\Psi)$.

II. ОПИСАНИЕ БАЗОВОЙ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ КАК СТОХАСТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Будем следовать описанию математической модели из [2] и поставим задачу управления в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \zeta(t) + \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{X} &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (V, C, F, m)^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{X}) &= (f_1, f_2, f_3, f_4)^T, \\ f_1 &= a_1 - a_2 F, f_2 = a_3 \beta(m) F(t - \tau) V(t - \tau) - a_5 (C - 1), \\ f_3 &= a_4 (C - F) - a_8, f_4 = a_6 V - a_7 m, \mathbf{u} = (0, 0, 1, 0)^T, \\ \zeta(t) &= (0, 0, \zeta(t), 0)^T, \mathbf{X}(t_0) = (V_0, C_0, F_0, m_0)^T, \\ \tau &= \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где переменные V, C, F - концентрации антигенов в пораженном органе, плазматических клеток, антител в крови, соответственно; $m(t)$ - доля разрушенных антигеном клеток органа; $a_i, i = \overline{1, 8}$ - параметры модели, значение которых зависит от формы и стадии заболевания; функция $\beta(m)$ характеризует степень нарушения нормальной работы иммунной системы вследствие поражения органа, $\zeta(t)$ - неизвестная ограниченная функция, τ - величина запаздывания.

Цель управления заключается в обеспечении асимптотической стабилизации функции $V(t)$ в окрестности заданного значения (количества антигенов) V^* (например, $V^* \approx 10^{-15}$)

$$\Psi(t) = V(t) - V^* \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \quad (2)$$

в смысле минимума следующего критерия качества управления (для непрерывной и дискретной задачи управления, соответственно):

$$\begin{aligned} \Phi_c(\psi) &= \int_0^{\infty} (w^2 \dot{\psi}^2(t) + \psi^2) dt, \\ \Phi_D(\psi) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^2 \psi^2[i] + (\Delta\psi[i])^2), \\ \Delta\psi[i] &= \psi[i] - \psi[i-1], w, \alpha = \text{const}, \end{aligned}$$

где w, α - параметры регулятора, определяющие характер и длительность переходного процесса.

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно алгоритму конструирования управления в биомедицинской модели из [3], получим итоговые формулы для регулятора для двух случаев – непрерывном описании (1) и дискретизованном (для компенсации случайного возмущения $\zeta(t)$).

A. Непрерывный регулятор

$$\begin{aligned} u_c &= -w_1^{-1}(x_3 - \phi) - f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) - z + \dot{\phi}, \\ \phi &= \phi(x_1, z) = a_2^{-1}(w_2^{-1}(\psi + kz) + a_1 + k\eta\psi), k, \eta > 0, \\ \dot{\phi} &= a_2^{-1}((w_2^{-1} + k\eta)(a_1 - a_2 F) + w_2^{-1}k\eta\psi), \\ z(t) &= \eta \int \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

B. Дискретный регулятор

Необходимость рассмотрения конструирования дискретной системы управления обусловлена особенностями аналитического конструирования стохастических регуляторов. Операция дискретизации (1) приведет к описанию [19]:

$$\begin{aligned} x_l[i+1] &= x_l[i] + hf_l[i], l = \overline{1,4}, \\ x_3[i+1] &= x_3[i] + h \left(f_3[i] + u[i] + \right. \\ &\quad \left. + \xi[i+1] + c\xi[i] \right), \\ \tau &= j_\tau h, j_\tau > 0; x_l[i] = x_l(ih), 0 < c < 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где h – параметр дискретизации (согласно явной схеме Эйлера), $\{\xi[i]\}_{i \geq 1}$ – некоррелированные одинаково распределенные с ограниченной дисперсией случайные величины.

Размерность системы (4) при конструировании увеличивается в соответствии со значением задержки, кратным параметру дискретизации системы (1) [3].

Дискретный регулятор имеет описание:

$$\begin{aligned} u_D[i] &= h^{-1}(-\lambda_1(x_3[i] - \phi[i]) + \phi[i+1] - x_3[i]) - \\ &\quad - a_4(x_2[i] - x_3[i]) + a_8 x_3[i] x_1[i] - c\xi[i], i = 0, 1, 2, \dots; \\ \phi[i+1] &= \frac{a_1}{a_2} + \frac{(1 + \lambda_2)(\psi[i] + hf_1[i])}{ha_2(x_1[i] + hf_1[i])}, |\lambda_j| < 1, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сравнивались два алгоритма управления ((1)-(3) и (4), (5) – с учетом систематических и случайных возмущений, и детерминированный из [1]), аналитически сконструированных на основе СТУ. Цель

численной апробации СТУ-алгоритмов: выявление наиболее робастного по отношению к уровню и типу входного возмущения (таблица I, рис. 1).

Отметим, что применение детерминированного СТУ-алгоритма [1] в нерасчетных условиях сопровождалось ядерным сглаживанием поступающих на регулятор значений переменных. Без предварительной фильтрации результаты моделирования показывали существенное преимущество стохастического регулятора с ростом дисперсии случайных возмущений.

Таблица I. ЗАВИСИМОСТЬ СКО ВЫХОДНОЙ МАКРОПЕРЕМЕННОЙ ОТ СКО ВХОДНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

$\sigma(\xi)$	Значения СКО макропеременной ψ	
	$\sigma(\psi) \times 10^{-6} (N/U)^l$	$\sigma_s(\psi) \times 10^{-6} (N/U)^l$
0,1	3,97/3,98	3,77/3,96
0,3	4,11/4,23	3,78/3,94
0,7	4,84/4,98	3,78/3,98

¹ Через N и U обозначены нормальное и равномерное распределение, через σ и σ_s - СКО для детерминированного СТУ-алгоритма и стохастического, соответственно.

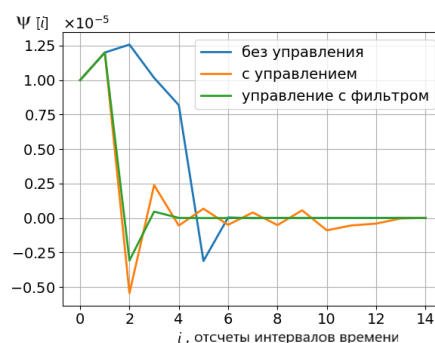


Рис. 1. Отдельные реализации траекторий выходной макропеременной для хронической формы заболевания под воздействием стохастического регулятора и без него

Достоинство стохастического регулятора заключается, во-первых, в наследовании всех робастных свойств, присущих СТУ-алгоритмам; во-вторых, в минимизации дисперсии целевой макропеременной.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 23-29-00336.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / под ред. А.А. Колесникова. - М.:Физматлит, 2004. - 504 с.
- [2] Марчук, Г.И. Избранные труды в 5 т. / Г.И. Марчук – Москва: РАН, Институт вычислительной математики, 2018. - Т. 4. - 649 с.
- [3] Kolesnikova, S.I. Application of a stochastic extension of the analytical design of aggregated regulators to a multidimensional biomedical object / S.I. Kolesnikova, E.V. Kustova // Mathematics – 2023. – Vol. 11(21). – P. 4484. DOI: 10.3390/math11214484