Направляющий вектор необыкновенного луча для случая падения света на поверхность кристалла под прямым углом

С.А. Силифонкин
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Самара, Россия
sergei.silifonkin@yandex.ru

С.А. Дегтярев
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Самара, Россия;
Институт систем обработки изображений - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
Самара, Россия
sealek@gmail.com

***Аннотация* — В работе произведена попытка реализации алгоритма расчёта направляющего вектора необыкновенного преломленного луча в трёхмерном пространстве на основе изучения плоского случая – совпадения главной оптической плоскости анизотропного одноосного кристалла и плоскости, сформированной падающим лучом и нормалью к поверхности. Падение на поверхность анизотропного кристалла происходит под прямым углом.**

Ключевые слова* — *двулучепреломление, система уравнений, алгоритм, луч, направляющий вектор

I. Введение

При использовании метода трассировки лучей световой поток считается массивом световых лучей, каждый из которых имеет направляющий вектор, доступный для проведения с ним математических операций, означающих отражение или преломление луча. Действия производятся на основе законов геометрической оптики.

Однако, аналогично найти направление необыкновенного луча довольно сложно. Поэтому был введён ряд дополнительных переменных, а на их основе – трёхмерная система нелинейных уравнений, решением которой являются координаты направляющего вектора необыкновенного луча.

Поскольку явление весьма сложное, но при этом важное для изучения и моделирования оптических систем, задача поиска достаточно простого для реализации алгоритма представляется актуальной.

II. Реализация алгоритма поиска направляющего вектора на Python

Алгоритм реализован на языке Python 3.11 с использованием свободных библиотек NumPy версии 1.25.0 и Sympy версии 1.12. Для наглядной демонстрации решения используется Matplotlib версии 3.7.1.

Вычисление направления необыкновенного луча производится на основе направления обыкновенного преломленного луча, вычисляемого по формуле [1]

$$n_2\vec{e}' = n_1\vec{e} - (n_1\vec{e},\vec{n})\vec{n}\left(1 - \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{(n_1\vec{e},\vec{n})^2} + 1}\right), \qquad (1)$$

где $\vec{e}'$ – вектор направления преломленного луча, $\vec{e}$ – вектор направления падающего луча, $\vec{n}$ – нормаль к поверхности, n_1 – показатель преломления среды, в которой распространяется падающий луч, n_2 – показатель преломления среды, в которой распространяется преломленный луч.

Теперь, когда известен направляющий вектор обыкновенного луча, полезной становится информация об угле его разведения с направляющим вектором необыкновенного луча, находимом по соответствующей методике [2]. Зная этот угол, можем построить конус с соответствующим углом раствора. Осью конуса будет необыкновенный луч, вершина – в точке пересечения падающего луча с поверхностью. Теперь следует найти точки, в которых пересекаются этот конус, главная оптическая плоскость и сфера единичного радиуса с центром в вершине конуса. Одна из этих точек укажет направление необыкновенного луча. Ниже представлено наглядное построение пересечения плоскости общего положения с конусом и сферой, выполненное при помощи онлайн-сервиса geogebra.org.

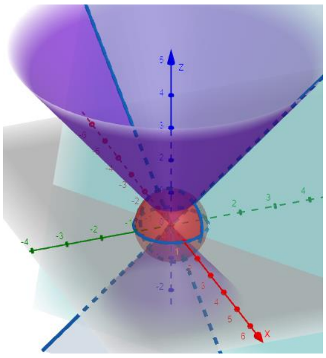

Рис. 1. Демонстрация пересечений конуса, сферы и плоскости

Как можно видеть, точек пересечения данных фигур четыре. Две из них отсекаются по признаку нахождения вне кристалла. Третья точка может быть отсечена благодаря известности угла между необыкновенным лучом и оптической осью.

Введём обозначения: α – угол между падающим лучом и оптической осью, α_e – угол между перпендикуляром к необыкновенному лучу и оптической осью, θ – угол между обыкновенным и необыкновенным лучами, ζ – угол между необыкновенным лучом и оптической осью, $k = \arctan(\alpha)$, $\vec{a}$ – направляющий вектор оптической оси, $\vec{e}''$ – направляющий вектор необыкновенного луча. Угол α может быть легко найден ввиду известности направляющих векторов падающего луча и оптической оси. Остальные углы находятся по формулам:

$$\alpha_e = \arctan\left(-\frac{1}{k}\cdot\frac{n_{2un}^2}{n_2^2}\right), \tag{2}$$

где n_{2un} – необыкновенный показатель преломления,

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{\tan\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{n_{2un}^2}{n_2\cdot\tan\alpha}\right), \tag{3}$$

$$\zeta = \alpha - \theta. \tag{4}$$

Теперь требуется задать уравнение конуса с обыкновенным лучом в качестве оси. Для возможности решения системы уравнение конуса будет переведено из сформированного обыкновенным лучом и двумя перпендикулярами к нему базиса в базис изначальной системы координат.

Радиус конуса:

$$r = \tan\theta\,. \tag{5}$$

Нормаль к главной оптической плоскости:

$$\vec{s} = (\vec{a}\times\vec{e}). \tag{6}$$

Поскольку используется круговой конус, неважно, как он ориентирован относительно своей оси. В связи с этим можно использовать произвольные перпендикуляры к обыкновенному лучу, один из которых получается в результате векторного произведения его направляющего вектора на один из задающих общую систему координат векторов: $\vec{x}$, $\vec{y}$ или $\vec{z}$. Предположим, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{e}'$ неколлинеарные.

Приступим к подготовке уравнения конуса:

$$\vec{t} = (\vec{x}\times\vec{e}'), \tag{7}$$

$$\vec{h} = (\vec{t}\times\vec{e}'), \tag{8}$$

$$F = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$G = \begin{pmatrix}t_x & h_x & n_x\\ t_y & h_y & n_y\\ t_z & h_z & n_z\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$P = G^{-1}\cdot F, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} x_{\text{кон}} &= P[1,1]e_x'' + P[1,2]e_y'' + P[1,3]e_z'',\\ y_{\text{кон}} &= P[2,1]e_x'' + P[2,2]e_y'' + P[2,3]e_z'',\\ z_{\text{кон}} &= P[3,1]e_x'' + P[3,2]e_y'' + P[3,3]e_z''. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, система уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} e_x''^2 + e_y''^2 + e_z''^2 = 1,\\ s_x e_x'' + s_y e_y'' + s_z e_z'' = 0,\\ \dfrac{x_{\text{кон}}^2}{r^2} + \dfrac{y_{\text{кон}}^2}{r^2} - \dfrac{z_{\text{кон}}^2}{1} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

В общем случае система имеет четыре действительных решения, три из которых отсекаются. Результаты построения лучей при $n_2 = 1{,}5$ и $n_{2un} = 1{,}73$ на основе данного алгоритма представлены ниже:

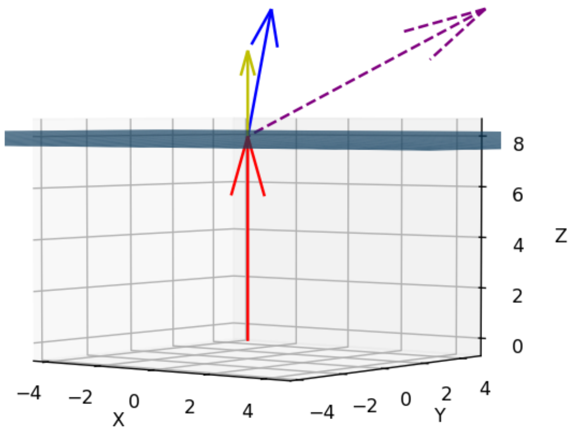

Рис. 2. Демонстрация преломления необыкновенного луча

На рисунке 2 оптическая ось показана пунктиром, необыкновенный луч – синим цветом, обыкновенный – жёлтым, падающий – красным.

III. Заключение

В данной работе была предпринята попытка реализации алгоритма нахождения направления необыкновенного луча для случая падения света на поверхность анизотропного кристалла под прямым углом.

Недостатком алгоритма является то, что в других случаях он выдаёт некорректные результаты, что объясняется его опорой на исследование плоского случая.

Однако, полученные результаты могут быть применены для расчёта направления необыкновенного луча в тех оптических системах, где мы можем быть заранее уверены в перпендикулярности направляющего вектора светового луча к поверхности раздела сред в точке падения.

Литература

[1] Губаев, М.С. Формирование векторного пучка с помощью конической преломляющей поверхности / М.С. Губаев, С.А. Дегтярев, Ю.С. Стрелков, С.Г. Волотовский, Н.А. Ивлиев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 6. – С. 828- 838. – DOI: DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1036. Ли, Дж. Трёхмерная графика и анимация / Дж. Ли, Б. Уэр. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2002. — 640 с.

[2] Игнатьев, А.В. Расчёт оптимального угла разведения обыкновенного и необыкновенного лучей в двулучепреломляющих элементах / А.В. Игнатьев, С.А. Миронов // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2008. – Изд.46, №6. – С. 35-42.