

Редукция модели вирусной эволюции

Д.И. Кузнецова¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Изучается начально-краевая задача для сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с помощью метода возмущений. Определяются собственные числа и собственные функции, используя метод Фурье. Исходная задача раскладывается по собственным функциям, а также рассматриваются частные случаи для системы, описывающей модель. Полученные результаты методом возмущений сравниваются с результатами, полученными другими исследователями методом пограничных функций Тихонова-Васильевой.

1. Введение

Сингулярно возмущенные уравнения возникают при моделировании явлений и процессов химической кинетики, биологии, физиологии и других областей естественных наук. Для задач такого типа применяются различные методы построения асимптотических разложений решений [1]. В данной работе применяется метод возмущений для построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенной системы с малым параметром.

2. Модель вирусной эволюции

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему интегро-дифференциальных уравнений с частными производными.

$$\varepsilon u_t = f\left(u, \int_0^l g(s, v) ds\right), \quad v_t = v_{ss} + q(s, u, v), \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(0) = u^0, \quad v(0, s) = v^0(s), \quad v_s(t, 0) = 0, \quad v_s(t, l) = 0, \quad (2)$$

2.2. Нахождение собственных чисел и собственных функций

Рассмотрим уравнение для инфицированных клеток:

$$v_t = v_{ss} + q(s, v) \quad (3)$$

Пусть $q(s, v)$ – известная функция. Тогда соответствующее однородное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \quad (4)$$

начальные и граничные условия:

$$v(0, s) = v^0(s), \quad v_s(t, 0) = 0, \quad v_s(t, l) = 0. \quad (5)$$

Для решения данной краевой задачи используется метод Фурье разделения переменных. Тогда функция v представима в виде суммы произведения функций S и T :

$$v(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(s) \cdot T_n(t). \quad (6)$$

Подставив уравнение (6) в уравнение (4) и записав дифференциальные уравнения для каждой функции, легко найти собственные числа: $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ и собственные функции: $\cos(\sqrt{\lambda_n} s)$, по которым разложима данная задача.

2.3. Разложение исходной задачи по собственным функциям

Теперь рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

$$\varepsilon u_t = 1 - u \int_0^l \beta(s) v(s, t) ds - u, \quad v_t = v_{ss} - rv + p\beta uv, \quad (7)$$

начальные и граничные условия:

$$u(0) = u^0, \quad v(0, s) = v^0(s), \quad v_s(t, 0) = 0, \quad v_s(t, l) = 0. \quad (8)$$

Система (7) представляет собой модель вирусной эволюции. Опишем входящие в модель переменные и параметры: $u(t)$ – концентрация неинфицированных клеток, $v(s, t)$ – концентрация инфицированных клеток, $\beta(s) = as$ – скорость инфицирования, r – скорость, с которой умирают инфицированные клетки, p – коэффициент дисперсии (в этой модели случайные мутации моделируются дисперсией).

Учитывая разложение функции $v(t, s)$ в виде конечной суммы:

$$v(t, s) = \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_n} s) T_n(t), \quad \text{где } \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad (9)$$

система (7) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon u'(t) &= 1 - au \sum_{n=0}^k \frac{\cos(\pi n) l^2}{\pi^2 n^2} T_n(t) - u(t) \\ \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_n} s) T_n'(t) &= - \sum_{n=0}^k \lambda_n \cos(\sqrt{\lambda_n} s) T_n(t) \\ &+ \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_n} s) T_n(t) (p * a * s * u(t) - r). \end{aligned} \quad (10)$$

В первом уравнении системы (10) интеграл посчитался легко. А чтобы упростить второе уравнение, помножим обе его части на $\cos(\sqrt{\lambda_m} s)$:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) ds T_n'(t) &= - \int_0^l \sum_{n=0}^k \lambda_n \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) ds T_n(t) \\ &+ \int_0^l \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) p * a * s ds T_n(t) u(t) \\ &- \int_0^l \sum_{n=0}^k \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) ds T_n(t) \end{aligned} \quad (11)$$

и посчитаем интегралы по переменной s . Получим:

$$m \neq n: \int_0^l \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) ds = 0; \quad (12)$$

$$m = n: \int_0^l \cos^2(\sqrt{\lambda_n} s) ds = \frac{l}{2}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m \neq n: \int_0^l s \cos(\sqrt{\lambda_m} s) \cos(\sqrt{\lambda_n} s) ds &= \\ = \frac{l^2}{2} \left\{ \frac{\cos[\pi(m-n)]}{\pi^2(m-n)^2} - \frac{1}{\pi^2(m-n)^2} + \frac{\cos[\pi(m+n)]}{\pi^2(m+n)^2} - \frac{1}{\pi^2(m+n)^2} \right\}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$m = n: \int_0^l s \cos^2(\sqrt{\lambda_n} s) ds = \frac{l^2}{4}. \quad (15)$$

3. Частный случай для системы, описывающей модель

Нулевое приближение системы имеет вид:

$$\varepsilon u'(t) = 1 - u(t) \left[a \frac{l^2}{2} T_0(t) + 1 \right], \quad T'_0(t) = \left[a * p * \frac{l}{2} u(t) - r \right] T_0(t). \quad (16)$$

В системе (16) $T_0(t)$ – это функция для построения графика функции инфицированных клеток $v(t, s)$, из формулы (9) очевидно, что при $k = 0$

$$v(t, s) = T_0(t). \quad (17)$$

Начальные условия для функций:

$$u(0) = 1,$$

$$v(0, s) = \sum_{n=0}^k T_n(0) \cos\left(\frac{\pi n s}{l}\right),$$

$$T_n(0) = a_n,$$

$$v^0(s) = \sum_{n=0}^k a_n \cos\left(\frac{\pi n s}{l}\right),$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l v^0(s) \cos\left(\frac{\pi n s}{l}\right) ds,$$

$$v^0(s) = \begin{cases} 8(s - 0,9975), & 0,9975 < s < 1 \\ 0,02, & 1 < s < 1,005 \\ 8(1,0075 - s), & 1,005 < s < 1,0075 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Пусть $l = 2$.

$$T_0(0) = a_0 = \int_0^l v^0(s) ds = \dots = 0,001.$$

Численный анализ показывает близость решений исходной системы, полученных методом возмущений в данной работе и методом пограничных функций Тихонова-Васильевой, который применялся другими исследователями.

4. Заключение

В данной работе была рассмотрена модель вирусной эволюции. Найдены собственные числа и собственные функции краевой задачи, используя метод Фурье разделения переменных; рассмотрен частный случай для системы, описывающей модель вирусной эволюции.

Выявлено, что нулевое приближение системы, исследуемой методом возмущений, дает хорошие результаты, близкие с результатами, полученными другими исследователями методом пограничных функций Тихонова-Васильевой.

5. Литература

- [1] Арчибасов, А.А. Предельный переход в сингулярно возмущенной системе с частными производными / А.А. Арчибасов, А. Коробейников, В.А. Соболев // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – С. 1-8. DOI: 10.1134/S03740641160.
- [2] Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике: учебное пособие / В.А. Соболев, Е.А. Щепаккина. – М.: Физматлит, 2010. – 320 с.

Reduction of virus evolution model

D.I. Kuznetsova¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The integro-differential system with partial derivatives is investigated by the perturbations method. Eigenvalues and eigenfunctions are determined by the Fourier method. The original problem is decomposed by means of eigenfunctions, and also particular cases for the system are considered. The obtained results are compared with the results of other authors obtained by the Tikhonov-Vasilyeva method.

Keywords: singular perturbations, virus dynamics, virus evolution.