ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, 1980

УДК 539.3:624

И.С.Ахмедьянов

К РАСЧЕТУ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В статье приводятся дифференциальные уравнения геометрически нелинейного осесимметричного изгиба тонкой сферической оболочки, в которых в качестве основных искомых функций приняты линейные комбинации компонентов деформации срединной поверхности оболочки.

Принятые обозначения

R, h – радиус срединной поверхности и толщина сферической оболочки; ψ – угловое расстояние произвольной точки меридиана от вершины оболочки; x, y, z – подвижная правая прямоугольная система осей координат (начало координат на срединной поверхности оболочки, ось x направлена по касательной к меридиану в сторону возрастания угла ψ, ось y – по касательной к линии $\psi = const$, ось z – по внешней нормали к срединной поверхности); u, w – проекции вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки на оси x и z; ϑ – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки (или касательной к меридиану) вокруг оси y; ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – компоненты деформации срединной поверхности оболочки; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки; N_1, N_2 – нормальные усилия; Q – перерезывающее усилие; M_1, M_2 – изгибающие моменты; q_x, q_z – проекции распределенной поверхностной нагрузки на оси x и z;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \lambda^2 = 12m^2(1-\mu^2)-\mu^2, \quad m = \frac{R}{h},$$

$$2\gamma = \frac{1}{12m^2(1-\mu^2)}, \quad \nu = 12m^2,$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\psi^2} + ctg\,\psi \frac{d}{d\psi}, \quad (\ )' = \frac{d}{d\psi},$$

Принятая система координат, а также положительные направле-ния усилий, моментов и перемещений показаны на рис. I и 2.

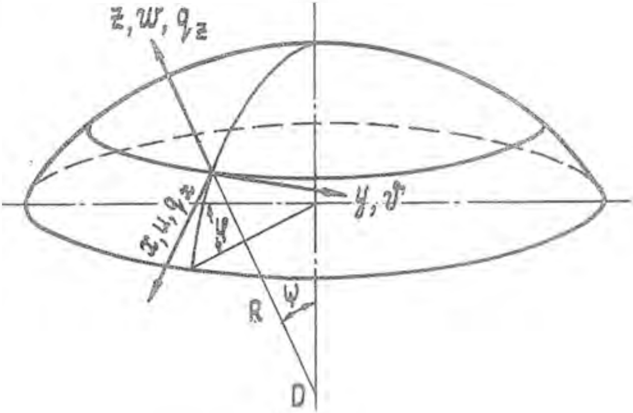

Рис. I

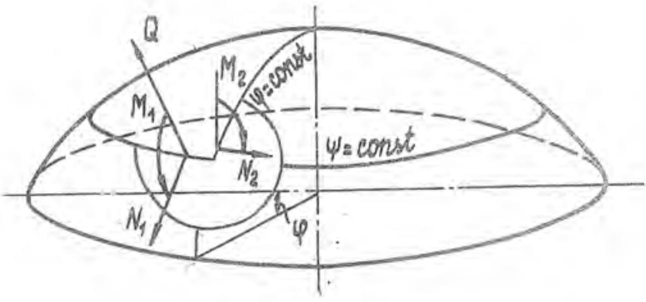

Рис. 2

I. Приведем основные соотношения геометрически нелинейно теории осесимметричного изгиба тонкой сферической оболочки [I]

а) уравнения равновесия:

$$N_1' + (N_1 - N_2)\,ctg\,\psi + Q + Rq_x = 0,$$

$$Q' + Q\,ctg\,\psi - (N_1 + N_2) + Rq_z = 0,$$

$$M_1' + (M_1 - M_2)\,ctg\,\psi - RQ - R\vartheta\left(N_1 - \frac{M_2}{R}\right) = 0; \qquad (I$$

б) зависимости между усилиями, моментами и деформациями:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1),$$

$$M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1); \tag{2}$$

в) связь между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}(u' + w) + \frac{1}{2}\vartheta^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}(u\,\mathrm{ctg}\,\psi + w),$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{R}\vartheta', \quad \varkappa_2 = \frac{1}{R}(\vartheta\,\mathrm{ctg}\,\psi - \frac{1}{2}\vartheta^2), \quad \vartheta = \frac{1}{R}(u - w'); \tag{3}$$

г) уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки:

$$\varepsilon_2' \sin\psi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos\psi -$$
$$- R[\varkappa_2' \sin\psi - (\varkappa_1 - \varkappa_2)\cos\psi] = \vartheta\vartheta'\sin\psi,$$
$$[\varepsilon_2' \sin\psi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos\psi]' +$$
$$+ R(\varkappa_1 + \varkappa_2)\sin\psi = -\vartheta\vartheta'\cos\psi. \tag{4}$$

Зависимости (I)-(3) образуют полную систему уравнений геометрически нелинейного осесимметричного изгиба тонкой сферической оболочки, содержащую I2 неизвестных величин: N_1, N_2, Q, M_1, M_2, ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ϑ, u и w.

2. Уравнения (I)-(3) выведены в предположении, что даже при значительных углах поворота нормали ϑ деформации ε_1 и ε_2 срединной поверхности оболочки будут весьма малыми.

3. Задачу о геометрически нелинейном изгибе сферической оболочки можно решать, приняв в качестве основных неизвестных четыре функции ε, ξ, $\varkappa$ и τ, связанных с компонентами деформаций срединной поверхности оболочки зависимостями:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \xi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\varkappa = R(\varkappa_1 + \varkappa_2), \quad \tau = R(\varkappa_1 - \varkappa_2). \tag{5}$$

При этом выражения для усилий и моментов примут вид:

$$\left.\begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix}\right\} = \frac{Eh}{2}\left(\frac{\varepsilon}{1-\mu} \pm \frac{\zeta}{1+\mu}\right),$$

$$\left.\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\} = \frac{EhR}{2\vartheta}\left(\frac{\varkappa}{1-\mu} \pm \frac{\tau}{1+\mu}\right).$$

Дальнейшие преобразования уравнений равновесия и услов совместности деформаций с учетом (5) и (6) приведут нас к сл дующей системе нелинейных уравнений относительно основных иско функций ε , ζ , $\varkappa$ и τ :

$$\nabla^2 \varepsilon + (1+\mu)\varepsilon + (1-\mu)\varkappa =$$

$$= -\frac{m(1-\mu^2)}{E}(q_x' + q_x \operatorname{ctg}\psi - q_z) - (1-\mu)\vartheta\vartheta' \operatorname{ctg}\psi,$$

$$\nabla^2 \varkappa + (1-\mu)\varkappa - \vartheta(1+\mu)\varepsilon = -\frac{m\vartheta(1-\mu^2)}{E} q_z -$$

$$-(1-\mu)\left[(\vartheta\vartheta')' + 2\vartheta\vartheta' \operatorname{ctg}\psi\right] - \frac{\vartheta(1-\mu^2)}{Eh}(m_y' + m_y \operatorname{ctg}\psi),$$

$$\zeta' + 2\zeta \operatorname{ctg}\psi = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\varepsilon' + \frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}(\varepsilon - \varkappa)' -$$

$$-\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\left(q_x + \frac{m_y}{R}\right) - \frac{2}{1+\vartheta}\vartheta\vartheta',$$

$$\tau' + 2\tau \operatorname{ctg}\psi = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\varkappa' - \frac{2\vartheta(1+\mu)}{1+\lambda^2}(\varepsilon - \varkappa)' -$$

$$-\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}\,\frac{m(1+\mu)}{E}\left(q_x + \frac{m_y}{R}\right) + \frac{2\vartheta}{1+\vartheta}\vartheta\vartheta'.$$

В этих уравнениях:

$$m_y = -\vartheta\left(N_1 - \frac{M_2}{R}\right).$$

Для нахождения усилия Q будем иметь:

$$Q = -\frac{Eh}{1+\lambda^2}(\varepsilon - æ)' - \frac{R}{1+\nu}q_x + \\ + \frac{\nu}{1+\nu}m_y + \frac{Eh(1-\mu)}{1+\lambda^2}\vartheta\vartheta'. \tag{9}$$

4. Выведем уравнения для определения перемещений u и w. Из формул (3) находим:

$$u' - u\,\mathrm{ctg}\,\psi = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2}R\vartheta^2,$$

$$w = R\varepsilon_2 - u\,\mathrm{ctg}\,\psi$$

или с учетом обозначений (5)

$$\frac{1}{R}(u' - u\,\mathrm{ctg}\,\psi) = \xi - \frac{1}{2}\vartheta^2, \tag{10}$$

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \xi) - \frac{u}{R}\,\mathrm{ctg}\,\psi. \tag{11}$$

5. Дифференциальные уравнения (7) и (10) совместно с (6), (9) и (11) образуют систему соотношений, позволяющую решать задачи о напряженном и деформированном состоянии сферической оболочки при осесимметричном нагружении с учетом геометрической нелинейности. Здесь могут быть применены методы, изложенные в [2].

Литература

1. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. - Механика твердого тела, 1968, № 1, с. 56-62.

2. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976, - 280 с.