КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРЕВЕ

В статье рассматривается метод расчета температурных напряжений в сферической оболочке при осесимметричном нагреве. Метод основан на точном интегрировании уравнений осесимметричного изгиба сферической оболочки. Распределение температуры по оболочке предполагается заданным. Модуль упругости и коэффициент линейного расширения материала оболочки считаются не зависящими от температуры.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — радиус срединной поверхности сферической оболочки;
δ — толщина оболочки;
ψ — угол между нормалью к срединной поверхности и осью оболочки;
ε_1, ε_2 — относительные удлинения срединной поверхности оболочки;
ϑ — угол поворота нормали к срединной поверхности;
u, w — перемещения точки срединной поверхности оболочки по касательной к меридиану и соответственно по направлению нормали к срединной поверхности;
E — модуль упругости материала оболочки;
μ — коэффициент Пуассона;
t — изменение температуры оболочки.
α_t — коэффициент температурного расширения;
N_1, N_2 — нормальные усилия;
Q — поперечная сила;
M_1, M_2 — изгибающие моменты;

$$\lambda^2 \approx 12m^2(1-\mu^2)-\mu^2,\ m=\frac{R}{\delta},\ \nu=12m^2,\ D=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$\gamma=\frac{1}{24\,m^2(1-\mu^2)},\ k=\frac{1+\mu}{2\pi E\delta R},\ l=\frac{d^2}{d\psi^2}+\operatorname{ctg}\psi\frac{d}{d\psi}+1,\ (\ )'=\frac{d}{d\psi}.$$

1. Приведем исходные уравнения осесимметричного изгиба сферической оболочки [1, 2, 3, 4], положенные в основу работы:

а) уравнения равновесия:

$$N_1'+(N_1-N_2)\operatorname{ctg}\psi+Q=0, \tag{1}$$

$$Q'+Q\operatorname{ctg}\psi-N_1-N_2=0, \tag{2}$$

$$M_1'+(M_1-M_2)\operatorname{ctg}\psi-RQ=0; \tag{3}$$

б) зависимости между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности оболочки:

$$N_1=\frac{E\delta}{1-\mu^2}[\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2-\alpha_t(1+\mu)\Theta_0],\ N_2=\frac{E\delta}{1-\mu^2}[\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1-\alpha_t(1+\mu)\Theta_0] \tag{4}$$

$$M_1=D\,[\varkappa_1+\mu\varkappa_2-\alpha_t(1+\mu)\Theta_1],\ M_2=D[\varkappa_2+\mu\varkappa_1-\alpha_t(1+\mu)\Theta_1], \tag{5}$$

где

$$\Theta_0=\frac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}t\,dz,\quad \Theta_1=\frac{12}{\delta^3}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}tz\,dz, \tag{6}$$

z — расстояние произвольной точки оболочки от срединной поверхности, измеряемое вдоль ее внешней нормали;

в) связь между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{R}(u'+w),\quad \varepsilon_2=\frac{1}{R}(u\operatorname{ctg}\psi+w), \tag{7}$$

$$\varkappa_1=\frac{1}{R}\vartheta',\quad \varkappa_2=\frac{1}{R}\vartheta\operatorname{ctg}\psi,\qquad \vartheta=\frac{1}{R}(u-w'); \tag{8}$$

г) уравнения неразрывности деформаций [5]:

$$\varepsilon_2'\sin\psi-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos\psi=R\,[\varkappa_2'\sin\psi-(\varkappa_1-\varkappa_2)\cos\psi], \tag{9}$$

$$[\varepsilon_2'\sin\psi-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos\psi]'=-R(\varkappa_1+\varkappa_2)\sin\psi. \tag{10}$$

Уравнения (1) — (5), (7) и (8) представляют собой систему 12 уравнений относительно 12 неизвестных N_1, N_2, Q, M_1, M_2, ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ϑ, u и w, решение которой полностью определяет напряженное и деформированное состояние сферической оболочки при осесимметричном нагреве. Нетрудно убедиться, что из этих 12 неизвестных четыре, а именно ε_1, ε_2, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, можно принять за основные, через которые легко выражаются все остальные искомые величины.

2. Полагая, что

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon + \zeta}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon - \zeta}{2}, \quad \varkappa_1 = \frac{\varkappa + \tau}{2R}, \quad \varkappa_2 = \frac{\varkappa - \tau}{2R}, \tag{11}$$

где ε, ζ, $\varkappa$ и τ — некоторые функции ψ, из формул (4) — (5) найдем:

$$\left.\begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix}\right\} = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\left[(1+\mu)\varepsilon \pm (1-\mu)\zeta - 2\alpha_t(1+\mu)\Theta_0\right], \tag{12}$$

$$\left.\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\} = \frac{D}{2R}\left[(1+\mu)\varkappa \pm (1-\mu)\tau - 2\alpha_t(1+\mu)R\Theta_1\right]. \tag{13}$$

Подставляя эти выражения в условия равновесия (1) — (3) и используя уравнения неразрывности деформаций (9) — (10), придем к следующей системе уравнений для определения функций ε, ζ, $\varkappa$ и τ:

$$l(\varepsilon) + \mu\varepsilon = -(1-\mu)\varkappa + X_t, \tag{14}$$

$$l(\varkappa) - \mu\varkappa = \nu(1+\mu)\varepsilon + Y_t, \tag{15}$$

$$\zeta' + 2\zeta\operatorname{ctg}\psi = \frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}(\varepsilon' - \varkappa') - \frac{1+\mu}{1-\mu}\varepsilon' + Z_t, \tag{16}$$

$$\tau' + 2\tau\operatorname{ctg}\psi = -\frac{2\nu(1+\mu)}{1+\lambda^2}(\varepsilon' - \varkappa') - \frac{1+\mu}{1-\mu}\varkappa' + Z_t. \tag{17}$$

В этих уравнениях:

$$X_t = \alpha_t(1+\mu)(\Theta_0'' + \Theta_0'\operatorname{ctg}\psi + 2\Theta_0), \tag{18}$$

$$Y_t = \alpha_t(1+\mu)\left[R(\Theta_1'' + \Theta_1'\operatorname{ctg}\psi) - 2\nu\Theta_0\right], \tag{19}$$

$$Z_t = \frac{2\alpha_t(1+\mu)}{(1-\mu)(1+\nu)}(\nu\Theta_0' + R\Theta_1'). \tag{20}$$

Уравнения (14) — (17), в свою очередь, можно свести к следующим двум:

$$l(\sigma) + i\lambda\sigma = X_t + \frac{1-\mu}{\mu + i\lambda}Y_t. \tag{21}$$

$$\chi' + 2\chi\operatorname{ctg}\psi = \frac{(1+\mu)(1-i\lambda)}{(1-\mu)(1+i\lambda)}\sigma' - \frac{1-i\lambda}{\mu+i\lambda}Z_t, \tag{22}$$

в которых

$$\sigma = \varepsilon + \frac{1-\mu}{\mu+i\lambda}\varkappa, \quad \chi = \zeta - \frac{1+\mu}{\mu+i\lambda}\tau.$$

3. Обратимся к интегрированию уравнения (21). Пусть σ_t — частное решение этого уравнения и σ_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$l(\sigma_0) + i\lambda\sigma_0 = 0. \tag{23}$$

Тогда общим решением уравнения (21) будет

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_t. \tag{24}$$

Очевидно, что

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 + \frac{1-\mu}{\mu + i\lambda} \varkappa_0, \quad \sigma_t = \varepsilon_t + \frac{1-\mu}{\mu + i\lambda} \varkappa_t. \tag{25}$$

Двумя частными линейно независимыми решениями уравнения (23) являются гипергеометрические функции [6, 7, 8]

$$\sigma_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \varphi_1 + i\omega_1,$$

и

$$\sigma_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = \varphi_2 + i\omega_2,$$

где

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5 + 4\lambda i}}{2}, \ \beta = 1 - \alpha, \ \gamma = 1, \ x = \sin^2 \frac{\psi}{2}.$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (23):

$$\sigma_0 = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2. \tag{26}$$

Здесь c_1 и c_2 — комплексные произвольные постоянные. Для дальнейшего решение (26) удобно записать в форме

$$\sigma_0 = i(1 + i\lambda) \frac{\lambda(1-\mu)}{\lambda^2 + \mu^2} [(A_1 - iB_1)\sigma_1 + (A_2 - iB_2)\sigma_2], \tag{27}$$

где A_1, B_1, A_2 и B_2 — действительные постоянные. Тогда, исходя из выражений (26), (24) и (25), находим общее решение уравнений (14)—(15):

$$\varepsilon = 2\gamma(1-\mu)(C_1p_1 + D_1q_1 + C_2p_2 + D_2q_2) + \varepsilon_t, \tag{28}$$

$$\varkappa = -(A_1p_1 + B_1q_1 + A_2p_2 + B_2q_2) + \varkappa_t. \tag{29}$$

Здесь

$$p_1(\psi) = \varphi_1 - \lambda\omega_1, \qquad q_1(\psi) = \omega_1 + \lambda\varphi_1, \tag{30}$$

$$C_1 = \mu A_1 + \lambda B_1, \qquad D_1 = \mu B_1 - \lambda A_1. \tag{31}$$

Формулы для вычисления функций $p_2(\psi)$ и $q_2(\psi)$ и постоянных C_2 и D_2 получаются из (30) и (31) изменением индекса 1 на 2. Это замечание следует иметь в виду и для последующих аналогичных формул.

4. Располагая общим решением уравнения (21), можно найти решение второго уравнения системы (21) — (22). Представив это уравнение в виде

$$\chi' + 2\chi \operatorname{ctg} \psi = \frac{(1+\mu)(1-i\lambda)}{(1-\mu)(1+i\lambda)} (\sigma_0' + \sigma_t') - \frac{1-i\lambda}{\mu + i\lambda} Z_t, \tag{32}$$

запишем его общее решение:

$$\chi = \chi_{00} + \chi_0 + \chi_t. \tag{33}$$

Здесь χ_{00} — общее решение однородного уравнения

$$\chi_{00}' + 2\chi_{00} \operatorname{ctg} \psi = 0; \tag{34}$$

χ_0, χ_t — частные решения неоднородных уравнений

$$\chi_0' + 2\chi_0 \operatorname{ctg} \psi = \frac{(1+\mu)(1-i\lambda)}{(1-\mu)(1+i\lambda)} \sigma_0', \tag{35}$$

$$\chi_t' + 2\chi_t \operatorname{ctg} \psi = \frac{(1+\mu)(1-i\lambda)}{(1-\mu)(1+i\lambda)} \sigma_t' - \frac{1-i\lambda}{\mu+i\lambda} Z_t, \tag{36}$$

причем

$$\chi_0 = \zeta_0 - \frac{1+\mu}{\mu+i\lambda} \tau_0, \quad \chi_t = \zeta_t - \frac{1+\mu}{\mu+i\lambda} \tau_t.$$

Проинтегрировав уравнения (34) — (35), придем к следующим выражениям для ζ и τ:

$$\zeta = \frac{2kC_0}{\sin^2 \psi} - 2\gamma(1+\mu)(C_1 r_1 + D_1 s_1 + C_2 r_2 + D_2 s_2) + \zeta_t, \tag{37}$$

$$\tau = -(A_1 r_1 + B_1 s_1 + A_2 r_2 + B_2 s_2) + \tau_t. \tag{38}$$

Здесь

$$r_1(\psi) = g_1 + p_1, \qquad s_1(\psi) = h_1 + q_1, \tag{39}$$

$$g_1(\psi) = 2\varphi_1' \operatorname{ctg} \psi, \qquad h_1(\psi) = 2\omega_1' \operatorname{ctg} \psi. \tag{40}$$

C_0 — произвольная постоянная.

При интегрировании уравнения (35) было использовано соотношение

$$\int \sigma_1' \sin^2 \psi \, d\psi = -\frac{1}{1-i\lambda} [(1+i\lambda)\sigma_1 + 2\sigma_1' \operatorname{ctg} \psi] \sin^2 \psi$$

и аналогичное выражение для функции σ_2.

5. Частное решение уравнения (21) будем искать методом вариации произвольных постоянных, полагая

$$\sigma_t = i(1+i\lambda) \frac{\lambda(1-\mu)}{\lambda^2+\mu^2} [(A_{1t} - iB_{1t})\sigma_1 + (A_{2t} - iB_{2t})\sigma_2].$$

Здесь A_{1t}, B_{1t}, A_{2t} и B_{2t} — функции, подлежащие определению. Составляя уравнения метода вариации произвольных постоянных, будем иметь

$$(A_{1t}' - iB_{1t}')\sigma_1 + (A_{2t}' - iB_{2t}')\sigma_2 = 0, \tag{41}$$

$$(A_{1t}' - iB_{1t}')\sigma_1' + (A_{2t}' - iB_{2t}')\sigma_2' = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda i(1+i\lambda)(1-\mu)} (\Phi_t + i\Omega_t). \tag{42}$$

Здесь

$$\Phi_t = X_t + \frac{\mu(1-\mu)}{\lambda^2+\mu^2} Y_t, \quad \Omega_t = -\frac{\lambda(1-\mu)}{\lambda^2+\mu^2} Y_t. \tag{43}$$

Определителем системы уравнений (41) — (43) является вронскиан решений σ_1 и σ_2 однородного уравнения (23)

$$W(\psi) = \sigma_1 \sigma_2' - \sigma_1' \sigma_2 = -\frac{2(A+iB)}{\sin \psi},$$

где

$$A = \frac{1}{\pi} \sin \pi a_0 \, ch\, \pi b_0, \quad B = \frac{1}{\pi} \cos \pi a_0 \, sh\, \pi b_0,$$

$$a_0 = \frac{\lambda + b_0}{2b_0}, \quad b_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{25 + 16\lambda^2} - 5}{2}}.$$

В результате решения уравнений (41) — (42) получаем

$$A'_{1t} - iB'_{1t} = -\frac{a - ib}{1-\mu}(\Phi_t + i\Omega_t)\sigma_2 \sin^2\psi,$$

$$A'_{2t} - iB'_{2t} = \frac{a - ib}{1-\mu}(\Phi_t + i\Omega_t)\sigma_1 \sin^2\psi,$$

где

$$a = \frac{\nu(1-\mu^2)}{2\lambda(1+\lambda^2)(A^2+B^2)}(\lambda A + B), \quad b = \frac{\lambda B - A}{\lambda A + B}\, a.$$

Отсюда легко находим:

$$A'_{1t} = p_2F_t - q_2G_t, \quad B'_{1t} = -p_2G_t - q_2F_t, \tag{44}$$

$$A'_{2t} = -p_1F_t + q_1G_t, \quad B'_{2t} = p_1G_t + q_1F_t. \tag{45}$$

Здесь

$$F_t = \frac{\sin\psi}{(1-\mu)(1+\lambda^2)}[(\lambda b - a)\Phi_t - (\lambda a + b)\Omega_t], \tag{46}$$

$$G_t = \frac{\sin\psi}{(1-\mu)(1+\lambda^2)}[(\lambda a + b)\Phi_t + (\lambda b - a)\Omega_t]. \tag{47}$$

Интегрируя выражения (44) — (45) от некоторого начального значения $\psi = \psi_0$, найдем функции A_{1t}, B_{1t}, A_{2t} и B_{2t}, а затем и частное решение уравнений (14) — (15):

$$\varepsilon_t = 2\gamma(1-\mu)(C_{1t}p_1 + D_{1t}q_1 + C_{2t}p_2 + D_{2t}q_2), \tag{48}$$

$$\varkappa_t = -(A_{1t}p_1 + B_{1t}q_1 + A_{2t}p_2 + B_{2t}q_2). \tag{49}$$

Здесь

$$C_{1t} = \mu A_{1t} + \lambda B_{1t}, \qquad D_{1t} = \mu B_{1t} - \lambda A_{1t}. \tag{50}$$

Запишем теперь частное решение уравнения (36):

$$\chi_t = \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left[\frac{(1+\mu)(1-i\lambda)}{(1-\mu)(1+i\lambda)}\sigma_t - \frac{1-i\lambda}{\mu+i\lambda}Z_t\right]\sin^2\psi d\psi.$$

Подставив сюда выражение для σ_t, в котором ε_t и $\varkappa_t$ определяются равенствами (48) — (49), получим, после интегрирования и некоторых преобразований, следующие формулы для ζ_t и τ_t:

$$\zeta_t = -2\gamma(1+\mu)(C_{1t}r_1 + D_{1t}s_1 + C_{2t}r_2 + D_{2t}s_2) +$$
$$+ \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left[\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}(X_t - Y_t)\operatorname{ctg}\psi + Z_t\right]\sin^2\psi\, d\psi, \tag{51}$$

$$\tau_t = -(A_{1t}r_1 + B_{1t}s_1 + A_{2t}r_2 + B_{2t}s_2) -$$
$$- \frac{1}{\sin^2\psi}\int_{\psi_0}^{\psi}\left[\frac{2(1+\mu)}{1+\lambda^2}(\nu X_t + Y_t)\operatorname{ctg}\psi - Z_t\right]\sin^2\psi d\psi. \tag{52}$$

6. Формулы для перемещений u и w получим, исходя из соотношений (7), (11), (28) и (37):

$$u = u_t + C\sin\psi + kRC_0\left(\sin\psi \ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi\right) +$$

$$+ \gamma(1+\mu)R(C_1g_1 + D_1h_1 + C_2g_2 + D_2h_2)\operatorname{tg}\psi. \qquad (53)$$

$$w = w_t - C\cos\psi - kRC_0\left(1 + \cos\psi \ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right) +$$

$$+ 2\gamma R(C_1p_1 + D_1q_1 + C_2p_2 + D_2q_2), \qquad (54)$$

причем

$$u_t = R\sin\psi \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{\zeta_t}{\sin\psi}\,d\psi, \quad w_t = R\varepsilon_{2t} - u_t\operatorname{ctg}\psi. \qquad (55)$$

Для угла поворота нормали ϑ из (8), (11), (29) и (38) будем иметь

$$\vartheta = \frac{1}{2}(A_1g_1 + B_1h_1 + A_2g_2 + B_2h_2)\operatorname{tg}\psi + \vartheta_t, \qquad (56)$$

Здесь

$$\vartheta_t = \frac{1}{2}(\varkappa_t - \tau_t)\operatorname{tg}\psi. \qquad (57)$$

Найдем теперь перерезывающую силу Q. Для этого воспользуемся уравнениями (2), (12), (28) и (37). В результате получим:

$$Q = -\frac{D}{2R^2}(C_1g_1 + D_1h_1 + C_2g_2 + D_2h_2)\operatorname{tg}\psi + Q_t, \qquad (58)$$

где

$$Q_t = N_{1t}\operatorname{tg}\psi,\ N_{1t} = \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\left[(1+\mu)\varepsilon_t + (1-\mu)\zeta_t - 2\alpha_t(1+\mu)\Theta_0\right]. \qquad (59)$$

7. В работе [8] приведены таблицы функций g_1, h_1, p_1, q_1, g_2, h_2, p_2 и q_2 для значений параметра λ от 100 до 300 с интервалом $\Delta\lambda=10$ (что при $\mu=0{,}3$ соответствует изменению отношения R/δ от 30,262 до 90,784). Для значений параметра $\lambda>300$ составление подобных таблиц затрудняется вследствие плохой сходимости степенных рядов, определяющих решение дифференциального уравнения (23). В этих случаях целесообразно пользоваться приближенными выражениями для функций g_1, h_1, ..., p_2 и q_2, которые могут быть получены в результате приближенного интегрирования уравнения (23). Для очень тонкой непологой сферической оболочки эти выражения имеют следующий вид:

$$g_1(\psi) = \frac{2ke^{-k\psi_1}}{\sqrt{\sin\psi}}(\cos k\psi_1 + \sin k\psi_1)\operatorname{ctg}\psi, \qquad (60)$$

$$h_1(\psi) = -\frac{2ke^{-k\psi_1}}{\sqrt{\sin\psi}}(\cos k\psi_1 - \sin k\psi_1)\operatorname{ctg}\psi, \qquad (61)$$

$$p_1(\psi) = -\frac{2k^2 e^{-k\psi_1}}{\sqrt{\sin\psi}} \sin k\psi_1, \tag{62}$$

$$q_1(\psi) = \frac{2k^2 e^{-k\psi_1}}{\sqrt{\sin\psi}} \cos k\,\psi_1, \tag{63}$$

$$g_2(\psi) = -\frac{2ke^{-k\psi_2}}{\sqrt{\sin\psi}} (\cos k\psi_2 + \sin k\psi_2) \operatorname{ctg}\psi, \tag{64}$$

$$h_2(\psi) = \frac{2ke^{-k\psi_2}}{\sqrt{\sin\psi}} (\cos k\psi_2 - \sin k\psi_2) \operatorname{ctg}\psi, \tag{65}$$

$$p_2(\psi) = -\frac{2k^2 e^{-k\psi_2}}{\sqrt{\sin\psi}} \sin k\psi_2, \tag{66}$$

$$q_2(\psi) = \frac{2k^2 e^{-k\psi_2}}{\sqrt{\sin\psi}} \cos k\psi_2. \tag{67}$$

Здесь

$$\psi_1 = \beta - \psi, \qquad \psi_2 = \psi - \alpha,$$

α, β — значения угла ψ, соответствующие верхнему и нижнему краям сферического пояса. Кроме того

$$2k^2 = \lambda, \qquad k = \sqrt{\lambda/2}.$$

В случае пологой оболочки будем иметь:

$$g_1(\psi) = 2\sqrt{\lambda}\, ber'\, x \operatorname{ctg}\psi, \quad h_1(\psi) = -2\sqrt{\lambda} bei'\, x \operatorname{ctg}\psi, \tag{68}$$

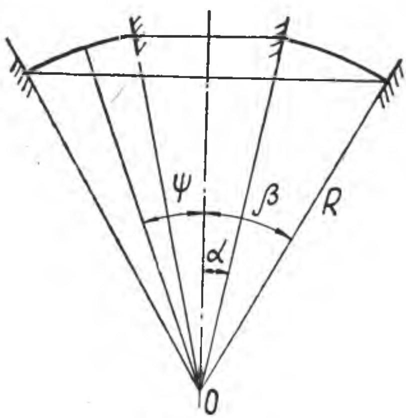
$$p_1(\psi) = \lambda\, bei\, x + ber x, \quad q_1(\psi) = \lambda\, ber\, x - bei x, \tag{69}$$

$$g_2(\psi) = 2\sqrt{\lambda}\, ker'\, x \operatorname{ctg}\psi, \quad h_2(\psi) = -2\sqrt{\lambda}\, kei' x \operatorname{ctg}\psi, \tag{70}$$

$$p_2(\psi) = \lambda\, kei\, x + ker x, \quad q_2(\psi) = \lambda\, ker\, x - kei x \tag{71}$$

В этих формулах

$$x = \sqrt{\lambda}\psi.$$



Фиг. 1.

8. В заключение приведем результаты численного расчета температурных напряжений, возникающих при равномерном нагреве сферической оболочки, выполненной в виде сферического пояса и жестко защемленной по краям $\psi = \alpha$ и $\psi = \beta$ (фиг. 1).

Обозначим через t_0 изменение температуры оболочки. Тогда из (6) и (18)—(20) будет следовать, что

$$\Theta_0 = t_0, \quad \Theta_1 = 0,$$
$$X_t = 2\alpha_t t_0 (1 + \mu),$$
$$Y_t = -\nu X_t, \quad Z_t = 0.$$

Далее из (14), (15) и (57) найдем, что

$$\varepsilon_t = 2\alpha_t t_0,\ \zeta_t = 0,\quad \varkappa_t = \tau_t = 0,\quad \vartheta_t = 0. \tag{72}$$

Для определения 6 постоянных C_1, D_1, C_2, D_2, C_0 и C имеем в соответствии с характером закрепления оболочки следующие граничные условия:

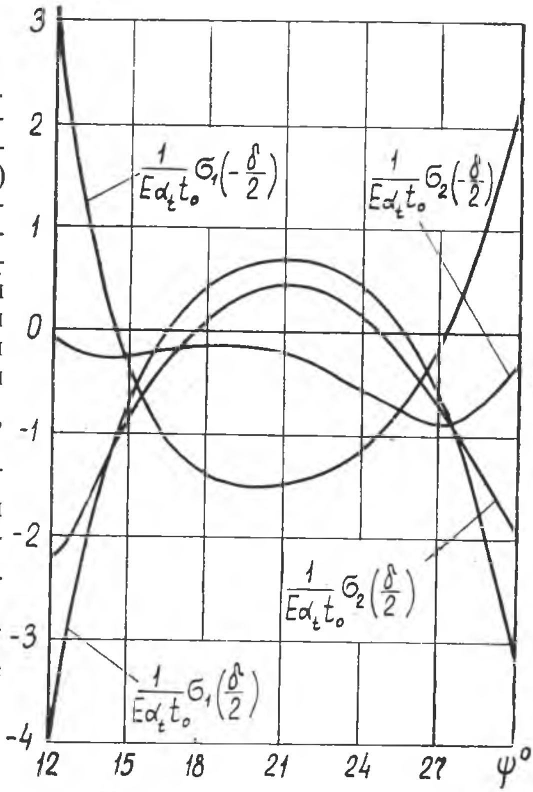
$$\text{при } \psi = \alpha \quad 1)\ u = 0,\quad 2)\ w = 0,\quad 3)\ \vartheta = 0, \tag{73}$$

$$\text{при } \psi = \beta \quad 4)\ u = 0,\quad 5)\ w = 0,\quad 6)\ \vartheta = 0. \tag{74}$$

Рассмотрим оболочку, для которой $\lambda = 300$ $\left(\frac{R}{\delta} = 90{,}784\right.$ при $\mu = \left.0{,}3\right)$ и $\alpha = 12^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Воспользовавшись таблицами работы [8] и выражениями (53), (54), (56), (72) составляем систему 6 уравнений (73)—(74) для определения произвольных постоянных, решаем ее и затем вычисляем значения ε, ζ, $\varkappa$ и τ. Далее находим безразмерные отношения $\frac{N_1}{E\alpha_t t_0 \delta}$, $\frac{N_2}{E\alpha_t t_0 \delta}$, $\frac{6M_1}{E\alpha_t t_0 \delta^2}$, $\frac{6M_2}{E\alpha_t t_0 \delta^2}$ и, наконец, отношения полных напряжений σ_1 и σ_2 в точках внутренней $\left(z = -\frac{\delta}{2}\right)$ и наружной $\left(z = \frac{\delta}{2}\right)$ поверхностей оболочки к величине $E\alpha_t t_0$, причем

$$\sigma_1\left(\pm\frac{\delta}{2}\right) = \frac{N_1}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2},$$

$$\sigma_2\left(\pm\frac{\delta}{2}\right) = \frac{N_2}{\delta} \pm \frac{6M_2}{\delta^2}.$$



Фиг. 2.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Коваленко. Введение в термоупругость, «Наукова думка», Киев, 1965.
2. З. Б. Канторович. Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1960.

3. Э. Мелан, Г. Паркус. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями, Физматгиз, 1958.
4. В. Н. Пастушихин. К осесимметричной деформации сферической оболочки при нагреве. ИВУЗ, «Строительство и архитектура», № 3, 1959.
5. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962.
6. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.
7. И. С. Ахмедьянов. Об одном методе интегрирования уравнений изгиба сферической оболочки при осесимметричном нагружении, ИВУЗ, «Авиационная техника», № 3, 1962.
8. И. С. Ахмедьянов, Х. С. Хазанов. Расчет сферических оболочек при осесимметричном нагружении, Куйбышев, 1967.