МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. В. КИТАЕВА

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем; 01.03.03 Механика и математическое моделирование

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2025

УДК 517.518.45(075)+517.443(075)
ББК В161.542я7+В161.2я7
К450

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. А л а ш е е в а,
канд. техн. наук, доц. Л. В. Я б л о к о в а

Китаева, Елена Викторовна
К450 **Ряды и интегралы Фурье:** учебное пособие / *Е. В. Китаева.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2025. – 64 с.

ISBN 978-5-7883-2160-8

Учебное пособие охватывает часть материала курса «Математический анализ». Оно может пригодиться для сопровождения курса лекций, а также для самостоятельного обучения. Предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

УДК 517.518.45(075)+517.443(075)
ББК В161.542я7+В161.2я7

ISBN 978-5-7883-2160-8

Учебное издание

Китаева Елена Викторовна

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 11.04.2025. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 3(Р1УП)/2025.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Оглавление

Введение

В данном пособии рассматриваются ряды и интегралы Фурье, которые играют ключевую роль в анализе периодических функций и являются мощным математическим аппаратом. Метод Фурье позволяет разложить сложные функции на более простые гармонические составляющие, что упрощает их изучение и обработку. Эти методы находят широкое применение в таких областях, как теория информации, обработка сигналов, электротехника и многие другие.

В данном учебном пособии освещаются основные аспекты тригонометрических рядов Фурье, анализируется вопрос их сходимости, изучаются интегралы Фурье, а также преобразование Фурье. Структура пособия разделена на три ключевых раздела, каждый из которых охватывает различные аспекты темы и предоставляет необходимый теоретический и практический материал.

Пособие предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

1 Тригонометрические ряды Фурье

1.1 Определение ряда Фурье

Определение 1.1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1.1}$$

называется тригонометрическим рядом.

Частичные суммы ряда (1.1) являются линейными комбинациями следующих функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots . \tag{1.2}$$

Определение 1.2. Совокупность функций (1.2) называется тригонометрической системой.

Лемма 1.1. Тригонометрическая система (1.2) обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m, m = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad n \neq m, m = 1, 2, 3, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad , n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.7}$$

Доказательство леммы 1.1.

Докажем соотношение (1.3). Пусть $n \neq m, m, n = 0, 1, 2, \ldots,$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0 .$$

Соотношения (1.4) и (1.5) доказываются аналогично.

Докажем формулу (1.6).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2}\left(2\pi + \frac{1}{2n} \sin 2nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi .$$

Соотношение (1.7) доказывается аналогично.

Лемма 1.1. доказана.

Теорема 1.1. Пусть тригонометрический ряд (1.1) сходится равномерно относительно $x \in [-\pi, \pi]$ и $f(x)$ – сумма ряда (1.1). Тогда справедливы соотношения

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \tag{1.8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \; n = 1, 2, \ldots . \tag{1.10}$$

Доказательство теоремы 1.1.

В силу условий данной теоремы, выполняется равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \; . \tag{1.11}$$

Ряд (1.1) сходится равномерно относительно $x \in [-\pi, \pi]$, члены ряда непрерывны на $[-\pi, \pi]$. В этом случае сумма ряда $f(x)$ является непрерывной функцией на $[-\pi, \pi]$, и ряд (1.1) можно интегрировать почленно на отрезке $[-\pi, \pi]$. (Доказательство приведено в [5].)

Проинтегрировав равенство (1.1), используя лемму 1.1, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx =$$

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = \pi a_0 .$$

Отсюда следует формула (1.8).

Зафиксируем произвольное натуральное число m. Умножим соотношение (1.11) на $\cos(mx)$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, используя лемму 1.1, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \pi a_m .$$

Отсюда следует формула (1.9). Умножив соотношение (1.11) на $\sin(mx)$ и, действуя аналогично, получим формулу (1.10).

Теорема доказана.

Замечание 1.1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) конечном или бесконечном, кроме, быть может, конечного множества точек $x_i,\ i = 0,1,2,\dots,k,\ a \le x_0 < x_1 < \dots < x_k \le b$, причем функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi_k, \eta_k]$, где $x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i$. При этом, если $a = -\infty$, то $x_0 = -\infty$, если $b = -\infty$, то $x_k = +\infty$. Числа $x_i,\ i = 0,1,2,\dots,k$ называются особыми точками функции.

Если при этих предположениях интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$, а функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на (a,b).

Замечание 1.2. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, то интегралы, стоящие в правых частях формул (1.9), (1,10) сходятся абсолютно в силу ограниченности функций $\cos(nx)$ и $\cos(nx), n=1,2,\ldots$.

Определение 1.3. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тригонометрический ряд (1.1), коэффициенты которого определяются соотношениями (1.8)-(1.10) называется тригонометрическим рядом Фурье, а числа $a_n, n=0,1,\ldots, b_n, n=1, 2,\ldots$ – коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Применяют обозначение

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \,.$$

Замечание 1.3. Здесь знак $\sim$ означает не равенство, а сопоставление функции $f(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье. Для краткости вместо тригонометрический ряд Фурье будем иногда писать ряд Фурье.

Замечание 1.4. Частичные суммы ряда Фурье порядка n будем обозначать $S_n(x, f)$ или $S_n(x)$.

Замечание 1.5. В этой терминологии теорему 1.1 можно перефразировать следующим образом.

Всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Определение 1.4. Т-периодической называется функция f, для которой существует число $T>0$, какое, что для всех x из области определения функции f точки $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения функции f и выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$.

Пусть f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, тогда ей в соответствие можно поставить ряд Фурье. Если на некотором участке данный ряд сходится, то, в силу периодичности всех его членов, его сумма 2π -периодическая функция. Поэтому иногда удобно и саму функцию f периодически продолжить с периодом 2π .

Замечание 1.6. Функцию f можно периодически продолжить только тогда, когда $f(-\pi) = f(\pi)$.

Введем в рассмотрение 2π -периодическую функцию f , которую построим, положив для любого числа $x \in [-\pi, \pi)$, в котором определена функция f

$$f(x + 2\pi k) = f(x),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то значения функций f и f будут отличаться в точке $x = \pi$, но это не приведет к изменению коэффициентов Фурье, так как они определяются с помощью интегралов. Поэтому ряды Фурье функций f и f совпадают. Иногда функцию f будем обозначать тем же символом f , что и исходную.

Если функция f 2π -периодическая, то при вычислении ее коэффициентов Фурье интегрирование можно производить по любому отрезку длины 2π , то есть справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} f(x)\, dx, \tag{1.12}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} f(x) \cos(nx) dx,\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.13}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} f(x) \sin(nx) dx,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.14}$$

где ξ – это произвольная точка числовой оси.

Следующий пример иллюстрирует применение формул (1.12) – (1.14). Требуется получить разложение функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, x\in[0,\pi)\\ 0, x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0,2\pi]$. Воспользовавшись формулой (1.12), получим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=-\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

Используя формулу (1.13), будем иметь

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(x+nx)dx+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(x-nx)dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(x+nx)}{1+n}\Big|_0^{\pi}+\frac{\cos(x-nx)}{1-n}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(\pi+n\pi)+1}{1+n}+\frac{\cos(\pi-n\pi)+1}{1-n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2+(n-1)\cos(\pi+n\pi)-(n+1)\cos(\pi-n\pi)}{1-n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{2-(\cos(\pi+n\pi)+\cos(\pi-n\pi))}{1-n^2}.$$

Таким образом

$$a_n=\frac{2+2(-1)^n}{2\pi(1-n^2)}=-\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}.$$

Из разложения видим, что при n нечетном a_n принимает значения равные 0 , и дополнительно надо рассмотреть случай когда $n=1$.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 0$$

Поэтому формулу для a_n можно записать в виде:

$$a_n = -\frac{2}{\pi(2n-1)(2n+1)}$$

Используя формулу (1.14), получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(1-n)xdx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(1+n)xdx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(x-nx)}{1-n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(x+nx)}{1+n}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\pi-n\pi)}{1-n} - \frac{\sin(\pi+n\pi)}{1+n}\right) = 0,$$

так как $\sin(\pm n\pi) = 0$.

Отдельно рассмотрим случай когда $n=1$:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x \sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x dx = \frac{x}{2\pi}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\sin 2x}{4\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу ряда Фурье, получим:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

1.2 Стремление коэффициентов Фурье к нулю

Теорема 1.2. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке (a,b), конечном или бесконечном, тогда выполняются следующие соотношения

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\mu x)dx=0 \tag{1.15}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\mu x)dx=0 \tag{1.16}$$

Следствие. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и $a_n, n=0,1,\ldots, b_n, n=1,2,\ldots$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0 \tag{1.17}$$

Для доказательства данной теоремы введем некоторые определения и докажем вспомогательные утверждения.

Определение 1.5. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Замыкание множества точек, где $f(x)\neq 0$ называется носителем функции $f(x)$ и обозначается $supp\, f$.

Определение 1.6. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Если $supp\, f$ содержится в некотором конечном отрезке, то функцию $f(x)$ будем называть финитной.

Определение 1.7. Пусть E – произвольное множество точек числовой оси. Функция

$$\chi(x)=\chi_E(x)=\begin{cases}1.\ \text{если } x\in E,\\ 0.\ \text{если } x\notin E,\end{cases}$$

называется характеристической функции множества E.

Определение 1.8. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Будем говорить, что $f(x)$ является финитной ступенчатой функцией, если она представима в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\chi_i(x), \tag{1.18}$$

где $\chi_i(x)$ – характеристические функции попарно не пересекающихся полуинтервалов $[a_i,b_i)$, а $\lambda_i, i=1,\dots,m$ – некоторые вещественные числа.

Замечание 1.7. Финитная ступенчатая функция интегрируема на всей числовой оси, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_i(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_{a_i}^{b_i}dx=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-a_i)\ .$$

Лемма 1.2. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке (a,b), конечном или бесконечном, тогда существует последовательность таких **ф**инитных ступенчатых функций $\varphi_n(x), n=1,2,\dots$, что выполняются следующие условия

1) $supp\ \varphi_n\subseteq(a,b)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx=0$

Доказательство леммы.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке (a,b), конечном или бесконечном. Предположим для определенности, что $f(x)$ интегрируема по Риману на произвольном отрезке $[\xi,\eta], -\infty \le a < \xi < \eta < b \le +\infty$, то есть $f(x)$ может иметь в качестве особых точек только числа a и b. Общий случай абсолютно интегрируемой функции нетрудно свести к этому случаю.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению несобственного интеграла [2] выполняется следующее условие

$$\exists \xi, \eta \in (a,b): \quad \int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.19}$$

Пусть s_τ – нижняя сумма Дарбу функции $f(x)$, соответствующая разбиению τ отрезка $[\xi,\eta]$. В силу интегрируемости по Риману функции $f(x)$, выполняется следующее условие

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s_\tau = \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx,$$

где $\lambda(\tau)$ – мелкость разбиения τ. Тогда существует разбиение $\tau_0 = \{x_i\}\Big|_{i=1}^{i=k}$ отрезка $[\xi,\eta]$, такое, что

$$0 \le \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где s_{τ_0} – нижняя сумма Дарбу функции $f(x)$, соответствующая разбиению τ_0 отрезка $[\xi,\eta]$, то есть $s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i$, $m_i = \inf\limits_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\ldots,k$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, \text{ если } x_{i-1} \le x < x_i, i = 1,2,\ldots,k, \\ 0, \text{ если } x \in (-\infty,\xi) \cup [\eta,+\infty). \end{cases} \tag{1.20}$$

Нетрудно заметить, что $\varphi(x)$ – финитная ступенчатая функция,

$$supp\,\varphi \subseteq [\xi,\eta] \subseteq (a,b),\ \int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Тогда

$$\int_{\xi}^{\eta}(f(x)-\varphi(x))dx = \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx - \int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.21)$$

Так как $\varphi(x) \le f(x), \xi \le x < \eta$, то $f(x)-\varphi(x) = \left| f(x)-\varphi(x) \ge 0 \right|$.

Из соотношений (1.19) и (1.21) получим

$$\int_{a}^{b}\left| f(x)-\varphi(x)\right| dx = \int_{a}^{\xi}\left| f(x)\right| dx + \int_{\xi}^{\eta}(f(x)-\varphi(x))dx + \int_{\eta}^{b}\left| f(x)\right| dx < \varepsilon.$$

Последовательность финитных ступенчатых функций $\varphi_n, n = 1, 2, \ldots$ можно получить, положив $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ и обозначив через φ_n соответствующие функции φ.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция промежутка $[\xi,\eta)$. Тогда $\forall a,b:\ -\infty \le a < \xi < \eta < b \le +\infty$ получим

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{a}^{b}\chi(x)\sin(\mu x)dx = \lim_{\mu\to\infty}\int_{\xi}^{\eta}\sin(\mu x)dx = \lim_{\mu\to\infty}\frac{\cos(\mu\xi)-\cos(\mu\eta)}{\mu} = 0,$$

так как

$$\left|\frac{\cos(\mu\xi)-\cos(\mu\eta)}{\mu}\right| \le \frac{|\cos(\mu\xi)|+|\cos(\mu\eta)|}{\mu} \le \frac{2}{\mu} \to 0,\ \mu\to\infty.$$

То есть теорема справедлива для характеристической функции $\chi(x)$.

Так как финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций, то утверждение теоремы выполняется также для финитных ступенчатых функций.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке (a,b), конечном или бесконечном, то по лемме 1.2 найдется финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для функции $\varphi(x)$ данная теорема доказана, поэтому

$$\exists \mu(\varepsilon) > 0: \quad \forall \mu : |\mu| \geq \mu(\varepsilon) \quad \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) \sin(\mu x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f(x) = (f(x) - \varphi(x)) + \varphi(x)$, то

$$\forall \mu : |\mu| \geq \mu(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x) \sin(\mu x) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin(\mu x) dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin(\mu x) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b | f(x) - \varphi(x) | dx + \left| \int_a^b \varphi(x) \sin(\mu x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что соотношение (1.16) выполняется. Соотношение (1.15) доказывается аналогично.
Теорема доказана.

1.3 Различные частные случаи формы записи ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-L, L]$, тогда, применив линейное отображение $y = \dfrac{\pi x}{L}$, получим, что $y \in [-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L}, \tag{1.22}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \tag{1.23}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.24}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.25}$$

В частности, если $f(x)$ является четной функцией, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{L},$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \tag{1.26}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.27}$$

если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{L},$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.28}$$

В качестве примера применения формулы (1.28) получим разложение функции

$$f(x) = x,\ x \in [-\pi; \pi] \tag{1.29}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ [3]. Так как $f(x)$ является нечетной функцией, поэтому $a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n \pi + (-1)^n \pi\right) = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi}.$$

Тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \qquad (1.30)$$

В качестве иллюстрации применения формул (1.26)-(1.27) получим разложение функции

$$f(x) = |x|,\ x \in [-\pi; \pi] \qquad (1.31)$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Так как $f(x)$ является четной функцией, то $b_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx \right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2}, & \text{при нечетном } n, \\ 0, & \text{при четном } n. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x. \qquad (1.32)$$

2 Разложение функций в ряд Фурье

2.1 Интеграл Дирихле. Принцип локализации

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[-\pi,\pi]$. Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье $S_n(x,f)$, $n=0,1,2,\ldots$, которые будем иногда для краткости называть просто суммой Фурье порядка n для функции f. Подставим в $S_n(x,f)$ коэффициенты Фурье, заданные формулами (1.8)-(1.10), получим:

$$S_n(x,f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\big)\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt\ .$$

Введем в рассмотрение функцию

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\,, \qquad (2.1)$$

Тогда суммы ряда Фурье можно представить в виде

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)\,f(t)dt\ . \qquad (2.2)$$

Функцию $D_n(t)$ называют ядром Дирихле, а интеграл, стоящий в правой части соотношения (2.2), – интегралом Дирихле.

Лемма 2.1. Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1) $D_n(t)$ является четной, непрерывной, 2π-периодической функцией;

2) $D_n(0)=n+\dfrac{1}{2}$;

3) $D_n(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1; \qquad (2.3)$$

4)

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \text{ если } t \neq 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \qquad (2,4)$$

Доказательство леммы. Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из формулы (2.1). Проинтегрируем соотношение (2.1) по промежутку $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt = \pi + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ktdt = \pi,$$

так как $\int_{-\pi}^{\pi}\cos ktdt = 0,\ k = 1, 2, \dots$, то есть свойство 3) доказано.

Докажем свойство 4).

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k+1)t}{2} - \sin\frac{(2k-1)t}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Лемма доказана.

Замечание 2.1. Так как функция $D_n(t)$ четная, то $\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt$ [2], то есть $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt$. Тогда из свойства 2) леммы 2.1 следует

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1. \tag{2.5}$$

Далее продолжим функцию $f(x)$ с промежутка $[-\pi,\pi)$ на всю числовую ось, продолжение также обозначим $f(x)$ (см. замечание 1.6).

Лемма 2.2. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi,\pi]$ 2π-периодическая функция. Тогда для частичной суммы ряда Фурье $S_n(x,f)$ справедливы равенства

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)dt \tag{2.6}$$

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt \tag{2.7}$$

Доказательство леммы. Сделаем в формуле (2.2) замену переменной $u = t - x$.

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)du.$$

Так подынтегральная функция 2π-периодическая, то ее можно интегрировать по любому промежутку длиной 2π, тогда

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)du$$

и соотношение (2.6) доказано.

Разобьем правую часть формулы (2.6) на два интеграла по промежуткам $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x+t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t)dt.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $u=-t$ и воспользуемся четностью ядра Дирихле, получим

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x+t)dt = -\int_{\pi}^{0} D_n(-u) f(x-u)du = \int_{0}^{\pi} D_n(u) f(x-u)du,$$

то есть формула (2.7) доказана.

Лемма доказана.

Следствие. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi,\pi]$ 2π-периодическая функция. Для любых $\delta\in(0,\pi),\ x\in[-\pi,\pi]$ справедливо соотношение

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt+o(1),\ n\to\infty \qquad (2.8)$$

Доказательство следствия. Зафиксируем произвольное $\delta\in(0,\pi)$ и разобьем правую часть формулы (2.7) на два интеграла, получим

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt.$$

Первый интеграл обозначим через $I_1(x,n)$, второй – $I_2(x,n)$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2(x,n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}(f(x+t)+f(x-t))dt.$$

На промежутке $[\delta, \pi]$ функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна, а значит ограничена, а функция $f(x+t)+f(x-t)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi, \pi]$ 2π-периодическая функция при произвольном фиксированном $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда функция

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

абсолютно интегрируемая на промежутке $[\delta, \pi]$. Поэтому по теореме 1.2

$$\lim_{n\to\infty} I_2(x,n) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt = 0,$$

то есть $I_2(x,n) = o(1)$ при $n \to \infty$ и

$$S_n(x, f) = I_1(x,n) + o(1), n \to \infty.$$

Следствие доказано.

Теорема 2.1. (принцип локализации). Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi, \pi]$ 2π-периодическая функция и $\delta \in (0, \pi)$ – сколь угодно малое положительное число. Тогда существование и значение предела ее последовательности частичных сумм Фурье $S_n(x, f)$ в любой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ зависит только от существования и величины предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)(f(x_0+t)+f(x_0-t))dt.$$

Доказательство теоремы.

Утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (2.8).

Теорема доказана.

Замечание 2.2. Из принципа локализации следует, что если функции в любой сколь угодно малой окрестности точки $x_0 \in [-\pi, \pi]$ совпадают, то одновременно существуют или нет пределы их последовательности частичных сумм Фурье, а если эти пределы существуют, то они равны. Но ряды Фурье таких функций различны, так как интегралы в соотношениях для коэффициентов Фурье рассматриваются по всему промежутку $[-\pi, \pi]$.

2.2 Сходимость ряда Фурье в точке

Сделаем обобщение понятия односторонних производных для функций, имеющих точки разрыва первого рода.

Определение 2.1. Пусть x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$. Под правосторонней и левосторонней производной будем понимать пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h},$$

где $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{h \to +0} f(x_0 + h),\ f(x_0 - 0) = \lim\limits_{h \to +0} f(x_0 - h)$.

Замечание 2.3. Если функция непрерывна в точке x_0, то определение 2.1 совпадает с классическим определением односторонних производных.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_x^*(x) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \qquad (2.9)$$

Лемма 2.3. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi, \pi]$ 2π-периодическая функция и $\delta \in (0, \pi)$ – сколь угодно малое положительное число. Тогда интегралы

$$\int_0^{\delta} \frac{\left| f_x^*(t) \right|}{t} dt, \quad 0 < \delta < \pi \qquad (2.10)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\left| f_x^*(t) \right|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \qquad (2.11)$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство.

Для произвольного $\delta \in (0, \pi)$ функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна на промежутке $[\delta, \pi]$, следовательно, интегрируема по Риману на $[\delta, \pi]$. Функция $f_x^*(t)$ при фиксированном значении x абсолютно интегрируема на данном отрезке. Тогда произведение данных функций $\dfrac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируемо на отрезке $[\delta, \pi]$, то есть интеграл

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{\left| f_x^*(t) \right|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \qquad (2.12)$$

сходится.

Зафиксируем теперь $\delta \in (0, \pi)$ таким образом, чтобы на промежутке $(0, \delta]$ функция $f_x^*(t)$ не имела особых точек, это достижимо, так как в следствие абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ (замечание 1.1), у нее может быть только конечное число точек разрыва.

Заметим, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{\left|f_x^*(t)\right|}{t}}{\dfrac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin\frac{t}{2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}=1,$$

тогда по признаку сравнения интегралы

$$\int_0^{\delta}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{t}dt,\qquad \int_0^{\delta}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

сходятся или расходятся одновременно. Так как интеграл (2.12) сходится, то интегралы (2.10), (2.11) также сходятся или расходятся одновременно.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. (Признак Дини). Пусть $f(t)$ абсолютно интегрируемая на промежутке $[-\pi,\pi]$ 2π -периодическая функция и x – точка непрерывности или точка разрыва первого рода. Если найдется $\delta\in(0,\pi)$, при котором интеграл

$$\int_0^{\delta}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{t}dt,\quad 0<\delta<\pi \tag{2.13}$$

сходится, тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{2.14}$$

Доказательство.

Рассмотрим разность и, воспользовавшись формулами (2.5), (2.7), получим

$$S_n(x,f)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt-$$

$$-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)(f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0))dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt \qquad (2.15)$$

Если интеграл (2.13) сходится, то по лемме 2.3 сходится интеграл $\int_0^{\pi}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$, то есть функция $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на промежутке $[0,\pi]$. Тогда по теореме (1.2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt=0,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x,f)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Теорема доказана.

Следующие примеры иллюстрируют применение теоремы 2.2. Требуется получить разложение функции

$$f(x)=\begin{cases}-2,\ x\in[-3;0)\\ 1,\ x=0\\ x+3,\ x\in(0;3]\end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-3;3]$ и выяснить, в каких точках отрезка ряд сходится к функции $f(x)$. Вычислим коэффициент a_0:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}(-2)dx+\int_{0}^{3}\left(x+3\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2x\Big|_{-3}^{0}+\frac{(x+3)^2}{2}\Bigg|_{0}^{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-6+18-4,5\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}=2,5\,.$$

Теперь найдем коэффициенты a_k и b_k для $k\geq 1$:

$$a_k=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\cos\frac{\pi kx}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}\left(-2\cos\frac{\pi kx}{3}\right)dx+\int_{0}^{3}\left(x+3\right)\cos\frac{\pi kx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2\frac{3}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{3}\Bigg|_{-3}^{0}+\frac{3}{\pi k}\int_{0}^{3}\left(x+3\right)d\left(\sin\frac{\pi kx}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left(\left(x+3\right)\sin\frac{\pi kx}{3}\Bigg|_{0}^{3}-\int_{0}^{3}\sin\frac{\pi kx}{3}dx\right)=\frac{3}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{3}\Bigg|_{0}^{3}=$$

$$=\frac{3}{\pi^2k^2}\left(\cos\pi k-1\right)=\frac{3}{\pi^2k^2}\left((-1)^k-1\right);$$

$$b_k=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f\left(x\right)\sin\frac{\pi kx}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}\left(-2\sin\frac{\pi kx}{3}\right)dx+\int_{0}^{3}\left(x+3\right)\sin\frac{\pi kx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\frac{3}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{3}\Bigg|_{-3}^{0}-\frac{3}{\pi k}\int_{0}^{3}\left(x+3\right)d\left(\cos\frac{\pi kx}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi k}\left(1-\cos\pi k\right)-\frac{3}{\pi k}\left(\left(x+3\right)\cos\frac{\pi kx}{3}\bigg|_0^3-\int_0^3\cos\frac{\pi kx}{3}\,dx\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)-\frac{3}{\pi k}\left(6(-1)^k-3\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right)-\frac{3}{\pi k}\left(2\left(-1\right)^k-1\right)=\frac{5-8\left(-1\right)^k}{\pi k}\;.$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье функции $f\left(x\right)$ на отрезке $[-3;3]$ имеет вид

$$\frac{2,5}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi^2k^2}\left((-1)^k-1\right)\cos\frac{\pi kx}{3}+\frac{5-8\left(-1\right)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{3}\right).$$

Пусть $S\left(x\right)$ – сумма данного ряда Фурье. В соответствии с теоремой Дини

$S\left(x\right)=f(x)$, если $x\in(-3;0)\cup(0;3)$;

$S\left(0\right)=0,5\left(f\left(0-0\right)+f\left(0+0\right)\right)=0,5\left(-2+3\right)=0,5;$

$S\left(-3\right)=S\left(3\right)=0,5\left(f\left(-3+0\right)+f\left(3-0\right)\right)=0,5\left(-2+6\right)=2.$

Учитывая, что

$f\left(0\right)=1,\ f\left(-3\right)=-2,\ f\left(3\right)=6$,

делаем вывод, что в точках 0, –3 и 3 значения функции $f\left(x\right)$ и суммы ее ряда Фурье различаются.

Найдем теперь значения суммы тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2+5,x\in[-2;0)\\ 3,x=0\\ x-7,x\in\left(0;2\right]\end{cases}$$

в точках $x_1=-2, x_2=0, x_3=1$. Пусть $S(x)$ − сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[-2;2]$ кроме точки $x_2=0$ (в точках ± 2 мы имеем в виду одностороннюю непрерывность), то согласно теореме Дини

$S(x_1)=S(-2)=0,5\big(f(-2+0)+f(2-0)\big)=0,5(9-5)=2$,

$S(x_2)=S(0)=0,5\big(f(0-0)+f(0+0)\big)=0,5(5-7)=-1$,

$S(x_3)=S(1)=f(1)=-6$.

2.3 Разложение в ряд Фурье по косинусам и синусам. Применение к вычислению сумм числовых рядов

Для функции

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & при \quad 0\le x<1,\\ x-2, & при \quad 1\le x\le 2.\end{cases}$$

требуется выписать ряд Фурье по ортогональной системе функций

$1,\ \cos\dfrac{\pi x}{2},\dots,\cos\dfrac{k\pi x}{2},\dots$

Ряд Фурье по ортогональной системе (разложение по косинусам)

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{T},\dots,\cos\frac{k\pi x}{T},\dots$$

имеет вид:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi kx}{T},$$

где

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{\pi kx}{T}\,dx,\ k=0,1,2,\dots.$$

Найдем коэффициенты a_k. По условию задачи $T=2$. Тогда:

$$a_0=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-2)dx=0,$$

$$a_k=\int_0^1(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx+\int_1^2(x-2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$a_k=(1-x)\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\bigg|_0^1+\frac{2}{\pi k}\int_0^1\sin\frac{\pi kx}{2}dx+$$

$$+(x-2)\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\bigg|_1^2-\frac{2}{\pi k}\int_1^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx=$$

$$=-\frac{4}{(\pi k)^2}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-1\right)+\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(\cos\pi k-\cos\frac{\pi k}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(1+(-1)^k-2\cos\frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда разложение по косинусам данной функции

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{(\pi k)^2}\left(1+(-1)^k-2\cos\frac{\pi k}{2}\right)\right)\cos\frac{\pi kx}{2}.$$

При этом $S(x)$ – четная функция, ее график получен отражением графика функции $f(x)$ относительно оси Oy и периодическим продолжением с периодом $2T=4$.

Найдем сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

используя разложение функции

$$f(x)=x,\ x\in[-\pi;\pi]$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$. В силу формул (1.29), (1.30) и теоремы 2.2 (теорема Дини) для любых $x\in(-\pi;\pi)$ справедливо представление

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Подставляя в данное равенство $x=\dfrac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n}{2}=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

то есть $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Найдем сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

используя разложение функции

$$f(x)=|x|,\ x\in[-\pi;\pi]$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$. В силу формул (1.29), (1.30) и теоремы 2.2 (теорема Дини) для любых $x\in(-\pi;\pi)$ справедливо представление

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

Подставляя в данное равенство $x=0$, получим

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

то есть

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

Найдем теперь сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пусть $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$. Нетрудно заметить, что

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8}\ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right).$$

Выше мы получили, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

тогда получим уравнение $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S$, откуда $S = \frac{\pi^2}{6}$, то есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Пусть $f(x) = \cos, x \in (0;\pi)$. Получим разложение данной функции в тригонометрический ряд Фурье по синусам. Продолжим функцию $f(x)$ на $(-\pi;0)$, затем периодически с периодом 2π на всю числовую ось, получим функцию, которую обозначим $f^*(x)$. Найдем коэффициенты Фурье для функции $f^*(x)$. В силу нечетности $f^*(x)$, $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx+x)dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx-x)dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(nx+x)}{n+1}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos(nx-x)}{n-1}\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi+\pi)-1}{n+1} + \frac{\cos(n\pi-\pi)-1}{n-1}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{-2n + (n-1)\cos(n\pi+\pi) + (n+1)\cos(n\pi-\pi)}{n^2-1}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{-2n + 2n\cdot(-1)^n}{n^2-1} = \frac{2}{\pi}\,\frac{2n - 2n\cdot(-1)^n}{n^2-1} =$$

$$= \frac{4n}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2-1};$$

Таким образом, при $n \neq 1$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \textit{при нечетном} \quad n, \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)}, & \textit{при четном} \quad n. \end{cases}$$

При $n = 1$ получим

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)dx =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cos(2x)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\left(\cos 2\pi - 1\right) = 0\,.$$

Так как функция $f^*(x)$ кусочно-гладкая, то по теореме 2.2 ряд Фурье для $f^*(x)$ сходится к функции

$$S(x)=\begin{cases}-\cos x, & -\pi<x<0;\\ 0, & x=0,\, x=\pm\pi;\\ \cos x, & 0<x<\pi\end{cases}.$$

Так как $f(x)=\cos,\, x\in(0;\pi)$, то при $x\in(0;\pi)$ справедливо представление

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx).$$

2.4 Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Будем предполагать, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[-\pi,\pi]$ 2π-периодическая функция и $f(-\pi)=f(\pi)$. Пусть $S_n(x)$ – ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ – ядра Дирихле, $n=0,1,2,\ldots$.

Рассмотрим суммы

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1}, \tag{2.16}$$

$$\Phi_n(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1},\; n=0,1,2,\ldots. \tag{2.17}$$

Величину $\sigma_n(x)$ называют суммой Фейера n-го порядка функции $f(x)$, а $\Phi_n(x)$ называют ядром Фейера n-го порядка функции $f(x)$.

Из соотношения (2.6) получаем формулу

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt \tag{2.18}$$

Исследуем поведение величин $\sigma_n(x)$ при $n\to\infty$. Вначале изучим свойства ядра Фейера.

Лемма 2.4. Для ядра Фейера справедливы следующие свойства.

1. $\Phi_n(x)$ – четная непрерывная 2π -периодическая функция;

2. $\Phi_n(0)=\dfrac{n+1}{2}$;

3. $\Phi_n(x)\ge 0,\quad \forall x$;

4. $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1$;

5. $\Phi_n(t)=\dfrac{\sin^2\dfrac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\dfrac{t}{2}}$, если $t\ne 2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Доказательство. Свойство 1 следует из соотношения (2.17), а также четности, непрерывности, 2π -периодичности ядра Дирихле.

Докажем свойство 2. Так как $D_k(0)=k+\dfrac{1}{2},\quad k=0,1,2,\dots$, то

$$\Phi_n(0)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n+1}{2}.$$

Докажем свойство 4.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1.$$

Так как $\Phi_n(t)$ является четной функцией, то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1.$$

Докажем свойство 5. Пусть $t\ne 2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Тогда

$$(n+1)\Phi_n(t)=\sum_{k=0}^{n} D_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\cos kt-\cos(k+1)t\right)=\frac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Свойство 3 непосредственно следует из свойства 5.

Лемма доказана.

Следствие. При произвольном фиксированном $\delta\in(0,\pi)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)=0. \tag{2.19}$$

Доказательство. В силу Свойства 5 леммы 2.4 получим

$$0\le\max_{\delta\le|t|\le\pi}\Phi_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\le\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим формулу (2.19).

Следствие доказано.

Теорема 2.3. Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то последовательность $\sigma_n(t)$ сходится равномерно относительно $x\in[-\pi,\pi]$ к предельной функции $f(x)$.

Доказательство. Предположим, что f является непрерывной на промежутке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Продолжим ее на всю числовую ось с периодом 2π, соответствующее периодическое продолжение, которое также будем обозначать символом f, является равномерно непрерывной функцией на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение $\left| f(x) - \sigma_n(x) \right|$. В силу формулы (2.18) и свойства 4 леммы 2.4 имеем

$$\left| f(x) - \sigma_n(x) \right| = \left| \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \big(f(x) - f(x+t) \big) dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Phi_n(t) \big(f(x) - f(x+t) \big) \right| dt .$$

В силу свойства 3 леммы 2.4 $\Phi_n(x) \ge 0, \quad \forall x$. Тогда

$$\left| f(x) - \sigma_n(x) \right| \le \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \left| \big(f(x) - f(x+t) \big) \right| dt .$$

Представляя данный интеграл в виде суммы трех интегралов, используя свойство аддитивности интеграла, получим

$$\left| f(x) - \sigma_n(x) \right| \le \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t) \left| \big(f(x) - f(x+t) \big) \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) \left| \big(f(x) - f(x+t) \big) \right| dt +$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) \left| \big(f(x) - f(x+t) \big) \right| dt . \qquad (2.20)$$

Символом $\omega(\delta, f)$ будем обозначать модуль непрерывности функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$, то есть

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\forall \xi, \eta \in (-\infty, +\infty): |\xi - \eta| < \delta} \left| f(\xi) - f(\eta) \right| .$$

В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ существует $\delta > 0$ такое, что $\omega(\delta, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\left|\left(f(x)-f(x+t)\right)\right|dt \le \frac{\omega(\delta, f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2.21)$$

По условию теоремы исходная функция непрерывна на $[-\pi,\pi]$, а значит ограничена по первой теореме Вейерштрасса, тогда 2π-периодическое продолжение $f(x)$ также является ограниченной функцией на промежутке $(-\infty;+\infty)$. Тогда

$$\exists L > 0: \quad \forall x \in (-\infty;+\infty) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le L.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\left|\left(f(x)-f(x+t)\right)\right|dt \le$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\left(|f(x)|+|f(x+t)|\right)dt \le \frac{2L}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{2L}{\pi}\max_{\delta\le t\le\pi}\Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi}dt = \frac{2L(\pi-\delta)}{\pi}\max_{\delta\le t\le\pi}\Phi_n(t) < 2L\max_{\delta\le t\le\pi}\Phi_n(t).$$

В силу следствия из леммы 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} 2L\Phi_n(t) = 0$, тогда

$$\exists n_1 : \forall n \ge n_1 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\left|\left(f(x)-f(x+t)\right)\right|dt < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.22)$$

сразу для всех $x \in (-\infty;+\infty)$. Аналогично,

$$\exists n_2 : \forall n \ge n_2 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)\left|\left(f(x)-f(x+t)\right)\right|dt < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.23)$$

сразу для всех $x \in (-\infty;+\infty)$.

Пусть $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогда в силу (2.22), (2.23)

$$\forall n \ge n_0, \forall x \in R \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) \left| \left(f(x) - f(x+t) \right) \right| dt < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t) \left| \left(f(x) - f(x+t) \right) \right| dt < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases} \qquad (2.24)$$

Следовательно, из соотношений (2.20), (2.21), (2.24) имеем

$$\forall n \ge n_0, \forall x \in R \Rightarrow \left| f(x) - \sigma_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

то есть последовательность $\sigma_n(t)$ сходится равномерно относительно $x \in R$ к предельной функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть f непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если ряд Фурье этой функции сходится в некоторой точке, то он сходится к значению функции в этой точке.

Доказательство. Пусть f непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, и ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = A$. Если числовой ряд сходится, то ряд, полученный суммированием методом средних арифметических, сходится к той же сумме, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x) = A$. Но по теореме 2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$.

Следствие доказано.

Замечание. Очевидно, что ряд Фурье функции, непрерывной на $[-\pi, \pi]$ и принимающей на концах промежутка равные значения, может расходиться в некоторых точках. Но, если он сходится в некоторой точке, то по следствию из теоремы 2.3 именно к значению функции в этой точке.

Замечание. Для непрерывной на $[-\pi, \pi]$ и принимающей на концах промежутка равные значения, ряд Фурье позволяет восстановить функцию. Для этого из частичных сумм ряда Фурье нужно построить суммы Фейера, последовательность которых сходится, причем равномерно, к самой функции. Поэтому изучение даже расходящегося ряда Фурье может быть полезно.

2.5 Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля

В данном пункте мы будем рассматривать ряды Фурье для интегрируемых на промежутке $[-\pi, \pi]$ функций, квадрат которых тоже интегрируем на этом промежутке.

Замечание. Интегрируемость понимается в несобственном смысле. Пусть функция $f(x)$ имеет конечное число особых точек на $[-\pi, \pi]$, интегрируема по Риману на любом отрезке без особых точек, а функция $f^2(x)$ интегрируема (в несобственном смысле) на $[-\pi, \pi]$. В этом случае функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Это вытекает из соотношения

$$|f| \leq \frac{f^2+1}{2}.$$

Замечание. Понятие функции с интегрируемым квадратом для другого промежутка вводится аналогично.

Теорема 2.4. Пусть $f(x)$ – функция с интегрируемым квадратом на промежутке $[-\pi, \pi]$, и пусть $S_n(x)$ – ее сумма Фурье, а $a_0, a_n, b_n, n=1, 2, \ldots$ – ее коэффициенты Фурье, то справедливы соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right)^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - T_n(x) \right)^2 dx, \qquad (2.25)$$

где $T_n(x)$ – тригонометрический полином степени не выше n,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\,. \qquad (2.26)$$

Доказательство. Пусть

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos kx+B_k\sin kx\,,$$

тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2(x)-2f(x)T_n(x)+T_n^{\,2}(x)\right)dx=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos kx+B_k\sin kx\right)dx+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos kx+B_k\sin kx\right)^2dx\,.$$

Раскрывая скобки и используя лемму 1.1, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right)-$$

$$-2\left(\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx+\sum_{k=1}^{n}B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right)-$$

$$-2\pi\left(\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_kA_k-b_kB_k\right)\right).$$

В результате получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\frac{\left(A_0-a_0\right)^2}{2}+$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\left(A_k-a_k\right)^2+\left(B_k-b_k\right)^2\right)-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right). \qquad (2.27)$$

Нетрудно заметить, что выражение $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx$ достигает наименьшего значения, когда $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1,2,\ldots,n$, то есть тогда, когда тригонометрический многочлен $T_n(x)$ является частичной суммой ряда Фурье порядка n. Следовательно, формула (2.25) доказана.

Пусть $T_n(x)=S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx$. Тогда в силу (2.27)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right), \qquad (2.28)$$

то есть для всех натуральных n

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\ge 0. \qquad (2.29)$$

Переходя в неравенстве (2.29) к пределу при $n\to\infty$, получим соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\ge 0,$$

то есть неравенство (2.26) выполняется.

Теорема доказана.

Замечание. Неравенство (2.26) называется неравенством Бесселя.

Замечание. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4, а $a_0, a_n, b_n, n=1,2,\ldots$ – ее коэффициенты Фурье, из неравенства Бесселя следует, что ряд

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

сходится [2].

Теорема 2.5. Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$, и $a_0, a_n, b_n, n=1, 2, \ldots$ – ее коэффициенты Фурье, то справедливо соотношение

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (2.30)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу теоремы 2.3 для функции $f(x)$ найдется такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что

$$\left|f(x)-T(x)\right|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad -\pi\le x\le\pi.$$

В качестве $T(x)$ можно использовать соответствующую сумму Фейера. Пусть m – порядок этого многочлена. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T(x)\right)^2dx<\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\pi=\varepsilon. \qquad (2.31)$$

Через $S_m(x)$ будем обозначать сумму Фурье порядка m функции $f(x)$. В силу формулы (2.25) из теоремы 2.4 справедливо соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T(x)\right)^2dx.$$

Используя формулы (2.28) и (2.31), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-$$

$$-\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_m(x)\right)^2dx\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-T(x)\right)^2dx<\varepsilon.$$

Таким образом, получили, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right) < \varepsilon, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

следовательно, выполняется равенство (2.30).

Теорема доказана.

Замечание. Равенство (2.30) называется равенством Парсеваля. В [1],[2],[4] показано, что равенство (2.30) выполняется также при условиях теоремы 2.4.

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5, а $S_n(x)$ – ее сумма Фурье, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - S_n(x)\right)^2 dx = 0. \qquad (2.32)$$

Доказательство следствия. В процессе доказательства теоремы 2.5 получили, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер m такой, что

$$\forall n \ge m \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - S_n(x)\right)^2 dx < \varepsilon,$$

то есть выполняется (2.32).

Следствие доказано.

2.6 Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Комплексная запись рядов Фурье

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi,\pi]$. Если

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) .$$

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos nx + \psi_n \sin nx .$$

Найдем коэффициенты Фурье $\varphi_i,\, i = 0, 1, 2, \ldots, \psi_i,\, i = 1, 2, \ldots$.

$$\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \big(f(\pi) - f(-\pi) \big) = 0 .$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\varphi_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n ,$$

$$\psi_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n ,$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Теорема доказана.

Замечание. Данную теорему называют теоремой о почленном дифференцировании ряда Фурье. Аналогичным образом, используя формулу интегрирования по частям, можно получить теорему о почленном интегрировании ряда Фурье [6], [2].

Теорема

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

то

$$\int_0^t f(x) dx \sim \int_0^t \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nt) .$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(t)=\int_0^t \left(f(x)-\frac{a_0}{2} \right) dx,$$

которая непрерывна на $[-\pi,\pi]$, причем производная

$$F'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t \left(f(x)-\frac{a_0}{2} \right) dx = f(t)-\frac{a_0}{2}$$

тоже непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx-\pi a_0=0 .$$

Тогда, исходя из [2], [6], ряд Фурье функции $F(t)$ сходится к ней равномерно. Через $A_0, A_n, B_n, n=1,2,\dots$ обозначим коэффициенты Фурье функции $F(t)$, тогда

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nt + B_n \sin nt\,, \tag{2.33}$$

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt, \tag{2.34}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt,\ n=1,2,\dots \tag{2.35}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt,\ n=1,2,\dots. \tag{2.36}$$

Проинтегрировав соотношение (2.35) по частям, получим

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}F(t)\frac{\sin nt}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(t)\sin(nt)dt=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2} \right)\sin(nt)dt=-\frac{b_n}{n},$$

где $n=1,2,\dots.$ Аналогично,

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt = -\frac{1}{\pi}F(t)\frac{\cos nt}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\cos(nt)dt = \frac{a_n}{n},$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Для отыскания A_0 положим () $t = 0$, так как $F(0) = 0$, получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n0 + B_n \sin n0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

тогда $\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$.

В результате получим формулу

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt + \frac{b_n}{n}(1-\cos nt),$$

то есть

$$\int_0^t \left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt + \frac{b_n}{n}(1-\cos nt),$$

откуда следует соотношение

$$\int_0^t f(x)dx \sim\ = \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt + \frac{b_n}{n}(1-\cos nt).$$

Теорема доказана.

Далее будем рассматривать вопрос о получении для ряда Фурье комплексной формы записи.

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Так как

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx\,,\ e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx\,,$$

то

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\,\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}\ .$$

Подставив данные представления в ряд Фурье, получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n i\,\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\ .$$

Положим

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\, c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}\,,$$

тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\ ,$$

где $c_{-n} = \overline{c_n},\, n = 1, 2, 3, \cdots$.

Получим соответствующие представления для коэффициентов Фурье.

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx\ =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\ ,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx\ =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\,,\quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Объединяя оба соотношения, получим

$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \, .$$

Последнее соотношение называют комплексной формой записи ряда Фурье.

3 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

3.1 Представление функции в виде интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Рассмотрим соотношения

$$\int_0^{+\infty} \big(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy\big)\,dy \tag{3.1}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt \tag{3.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt \tag{3.3}$$

Определение. Интеграл (3.1), где функции $a(y)$, $b(y)$ определяются формулами (3.2), (3.3) называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Подставим (3.2), (3.3) в (3.1), получим

$$\int_0^{+\infty} \big(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy\big)\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\cos xy \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt + \sin xy \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt\,. \tag{3.4}$$

Аналогично сумме ряда Фурье, интеграл Фурье при определенных условиях представляет исходную функцию.

Теорема 3.1. Пусть функция f удовлетворяет следующим условиям

1) f – абсолютно интегрируема на всей вещественной прямой и кусочно-непрерывна на каждом отрезке;

2) в точке x существуют обобщенные односторонние производные $f'_-(x),\ f'_+(x)$, определенные в разделе 2.2. Тогда справедлива формула

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt\,. \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим интеграл

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt,\eta>0. \tag{3.6}$$

Пусть $\xi>0$. Проинтегрировав выражение $\int_0^{\eta}dy\int_{-\xi}^{\xi}f(t)\cos y(x-t)dt$, получим

$$\int_0^{\eta}dy\int_{-\xi}^{\xi}f(t)\cos y(x-t)dt=\int_{-\xi}^{\xi}dt\int_0^{\eta}f(t)\cos y(x-t)dy=$$

$$\int_{-\xi}^{\xi}f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}dt\,. \tag{3.7}$$

Очевидно соотношение $\left|f(t)\cos y(x-t)\right|\le\left|f(t)\right|$. По условию теоремы интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|dt$ сходится, тогда интеграл

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt \tag{3.8}$$

сходится равномерно, относительно $y\in\left[0,\eta\right]$, то есть функция $F(y,\xi)=\int_{-\xi}^{+\xi}f(t)\cos y(x-t)dt$ сходится равномерно к $F(y)$ при $\xi\to+\infty$ относительно $y\in\left[0,\eta\right]$. Так как функция $F(y,\xi)$ непрерывна по y, то в левой части соотношения (3.7) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\xi\to+\infty$.

Тогда $S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}dt$. В силу (3.6), (3.8) этот интеграл сходится и равен $\int\limits_0^{\eta} F(y)dy$, причем $F(y)$ непрерывная функция.

Интеграл $S(\eta)$ является аналогом интеграла Дирихле для рядов Фурье. Введя замену переменной $u=t-x$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\frac{\sin\eta u}{u}du.$$

Тогда $S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}dt$. Сделав в первом интеграле замену переменной $u=-t$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\eta t}{t}dt.$$

Используя известный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$, получим

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\eta t}{t}dt-$$

$$\left(f(x+0)+f(x-0)\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(f(x+t)-f(x+0))\frac{\sin\eta t}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(f(x-t)-f(x-0))\frac{\sin\eta t}{t}dt. \qquad (3.9)$$

Разобьем первый интеграл в правой части соотношения (3.9) на два интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin \eta t}{t} dt =$$

$$\int\limits_0^{1} (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin \eta t}{t} dt + \int\limits_1^{+\infty} (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin \eta t}{t} dt .$$

По условию теоремы $f'_+(x) = \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$, тогда $\dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ является кусочно-непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0,1]$, поэтому в силу теоремы 1.2

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_0^1 \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0 . \qquad (3.10)$$

Так как $\left| \dfrac{f(x+t)}{t} \right| \le \left| f(x+t) \right|, t \ge 1$, то, в силу абсолютной интегрируемости функции f, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left| \dfrac{f(x+t)}{t} \right| dt$ сходится, то есть функция $\left| \dfrac{f(x+t)}{t} \right|, t \ge 1$ абсолютно интегрируема. Тогда по теореме 1.2

$$\lim_{\eta \to +0} \int\limits_1^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \eta t \, dt = 0 . \qquad (3.11)$$

Сделаем в интеграле $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt$ замену переменных $u = \eta t$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = f(x+0) \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_\eta^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0 , \qquad (3.12)$$

так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dt$ сходится.

Из (3.10), (3.11), (3.12) получим, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Тогда в силу (3.9)

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Теорема доказана.

3.2 Различные виды записи формулы интеграла Фурье

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей вещественной оси и в каждой точке имеет односторонние производные. Тогда $\forall x\in R$ по теореме 3.1 справедлива формула

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt.$$

В силу четности подынтегральной функции относительно y имеем

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt. \tag{3.13}$$

Так как $\left|f(t)\sin y(x-t)\right|\le\left|f(t)\right|$, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(x-t)dt$ сходится равномерно относительно $y\in R$, а, значит, является функцией, непрерывной по переменной y. Тогда $\forall\,\eta>0$ существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{+\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin y(x-t)dt,$$

который равен нулю, так как подынтегральная функция нечетна относительно y.

При сделанных выше предположениях обеспечить существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)dt \tag{3.14}$$

не получится, но при этом

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)dt = 0\ . \tag{3.15}$$

Умножим выражение (3.15) на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с (3.13), тогда

$$f(x) = v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt\ . \tag{3.16}$$

Соотношение (3.16) называется комплексной формой записи интеграла Фурье.

3.3 Преобразование Фурье

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt\ ,$$

тогда представление (3.16) будет иметь вид

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)e^{ixy}dy\ . \tag{3.17}$$

Определение. Функция Φ, которая ставится в соответствие функции f соотношением

$$\Phi(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt \tag{3.18}$$

называется преобразованием Фурье функции f. Применяют обозначение $F[f]$.

Определение. Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f соотношением

$$\Psi(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt \qquad (3.19)$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f. Применяют обозначение $F^{-1}[f]$.

Лемма 3.1. Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей вещественной оси и в каждой точке имеет односторонние производные. Тогда

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f\ .$$

Доказательство леммы.

Формула $F^{-1}[F[f]] = f$ является другим представлением соотношения (3.16). Докажем соотношение $F[F^{-1}[f]] = f$.

В силу четности функции $\cos u$ соотношение (3.13) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)dt\,,$$

В силу нечетности функции $\sin u$,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)dt = 0\ .$$

Тогда

$$f(x) = v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t-x)}dt\,,$$

то есть

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}dt\right]e^{-itx}dy\ .$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье. Тогда для функции $\alpha f_1 + \beta f_2$, где α и β произвольные числа, также существует преобразование Фурье, причем справедлива формула

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2].$$

Замечание. Данное свойство называют линейностью преобразования Фурье ([2]).

Лемма 3.3. Пусть для функций f_1 и f_2 существует обратное преобразование Фурье. Тогда для функции $\alpha f_1 + \beta f_2$, где α и β произвольные числа, также существует обратное преобразование Фурье, причем справедлива формула

$$F^{-1}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F^{-1}[f_1] + \beta F^{-1}[f_2].$$

Замечание. Данное свойство называют линейностью обратного преобразования Фурье.

Замечание. Леммы 3.2 и 3.3 следуют из линейности интеграла и соотношений (3.18), (3.19).

Лемма 3.4. Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей вещественной оси, тогда ее преобразование Фурье $\Phi(y)$ ограничено на всей вещественной оси, и

$$\left|\Phi(y)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right| dt. \tag{3.20}$$

Доказательство леммы.

Формула (3.20) является следствием соотношения (3.18), так как $\left|e^{-ixy}\right| = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть функции $f(x),\ f_n(x), n = 1, 2, \dots$ абсолютно интегрируемы на всей вещественной оси, а $\Phi(y)$, $\Phi_n(y), n = 1, 2, \dots$ – соответствующие преобразования Фурье.

Если

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|dx=0,$$

то функциональная последовательность $\{\Phi_n(y)\}$ сходится равномерно к функции $\Phi(y)$ относительно $y\in(-\infty,+\infty)$.

Доказательство леммы.

Данное утверждение непосредственно следует из соотношения (3.20) и свойства линейности преобразования Фурье, так как

$$\left|\Phi_n(y)-\Phi(y)\right|=\left|F\left[f_n-f\right]\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|dx.$$

Лемма доказана.

Теорема 3.2. Пусть функции $f(x),\ f^{(k)}(x), k=1,2,\ldots,n$ абсолютно интегрируемы и непрерывны на всей вещественной оси. Тогда справедливы соотношения

$$F\left[f^{(k)}\right]=\left(iy\right)^k F[f], k=0,1,2,\ldots,n, \tag{3.21}$$

А также найдется константа $M>0$ такая, что

$$\left|F[f]\right|\le\frac{M}{y^n}. \tag{3.22}$$

Доказательство теоремы. Предположим, что функция f принимает только вещественные значения. Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы и непрерывны на всей вещественной оси, тогда

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt.$$

По условию теоремы интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f'(t)\right|dt$ является сходящимся, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)dt$ сходится, то есть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to -\infty}\int\limits_0^x f'(t)dt$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\int\limits_0^x f'(t)dt$, а значит $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$F\left[f'\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-iyx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(x)e^{-iyx}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+$$

$$+\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}dx=iy\cdot F[f].$$

Рассмотрим теперь случай, когда $f=u+iv$, где u и v – вещественные функции, тогда

$$F\left[f'\right]=F[u'+iv']=F[u']+iF[v']=iyF[u]-yF[v]=$$

$$=iyF[u]+iyF[iv]=iyF[u+iv]=iyF[f].$$

Соотношение (3.21) доказано для $n=1$. Для произвольного n формулу (3.21) можно получить, используя метод математической индукции.

В силу леммы 3.4 функция $F\left[f^{(n)}\right]$ ограничена, тогда соотношение (3.22) вытекает из (3.21).

Теорема доказана.

3.4 Применение к вычислению некоторых интегралов

Рассмотрим интеграл Лапласа

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Найдем Фурье-образ функции $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-a|x|}$, где $a>0$; $x\in\left(-\infty,\infty\right)$:

$$F\left(\omega\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(a-i\omega)x}dx+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(a+i\omega)x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\omega}\mathrm{e}^{(a-i\omega)x}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{a+i\omega}\mathrm{e}^{-(a+i\omega)x}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\,.$$

С помощью формулы обратного преобразования Фурье

$$\mathrm{e}^{-a|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\mathrm{e}^{i\omega x}d\omega$$

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\omega x}}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|x|}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|x|}\,.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой удвоенный интеграл Лапласа, а второе равно нулю вследствие нечетности подынтегральной функции. Поэтому

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a|x|}\,.$$

Вычислим интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}dx\,.$$

Сначала вычислим вспомогательный интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt\,,$$

применив к функции $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, где $x \in (-\infty, +\infty)$, преобразование Фурье и введя замену $t = x + i\omega$.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2 - \frac{\omega^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} I;$$

$$\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} I \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} \mathrm{e}^{i\omega x} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} I \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\omega - ix)^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} d\omega = \frac{1}{2\pi} I^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отсюда $I = \sqrt{2\pi}$, и, следовательно, с заменой $x = t / \sqrt{2}$ можно записать

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \left| x = \frac{t}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.5 Свертка и преобразование Фурье

Определение. Рассмотрим функции φ и ψ, определенные на всей вещественной оси. Сверткой функций φ и ψ будем называть интеграл

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(x - t) dt. \qquad (3.23)$$

Будем предполагать, что функции φ и ψ принимают только вещественные значения. Если φ и ψ ограничены и абсолютно интегрируемы, то интеграл (3.23) и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dt$ равномерно сходятся на всей числовой оси [2].

Теорема 3.3. Пусть функции φ и ψ ограничены, абсолютно интегрируемы и непрерывны на всей вещественной оси. Тогда справедливо соотношение

$$F\left[\varphi * \psi\right] = F[\varphi] \cdot F[\psi] .$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим преобразование Фурье свертки функций φ и ψ

$$F\left[\varphi * \psi\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt .$$

Поменяем порядок интегрирования, тогда

$$F\left[\varphi * \psi\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t) e^{-ixy} dx .$$

Сделав замену переменных $x = t + s$, получим

$$F\left[\varphi * \psi\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(s) e^{-i(t+s)y} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-ity} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(s) e^{-isy} ds = F[\varphi] \cdot F[\psi] .$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3.3 утверждает что преобразование Фурье от свёртки двух функций является произведением их Фурье-образов. Поэтому свёртку двух функций можно вычислить путём обратного преобразования Фурье, что является полезным в случае, если свертку нельзя получить аналитически, и позволяет вместо численного интегрирования воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье и ускорить процесс вычислений.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Наука, 1969, 656 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1981.
3. Виноградова Н.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2002.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976, 543 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 2002, 464 с.
6. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004, 640 с.