МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. К. БАШКИРОВ

КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве задачника для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 Физика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 535.14(076)
ББК В343.54я7
Б334

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, с.н.с. С. Ю. Пичугин,
канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Акимов

Башкиров, Евгений Константинович
Б334 **Квантовая оптика**: задачник / *Е. К. Башкиров.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 72 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-2066-3

В пособии представлен комплект задач и индивидуальных заданий по курсу «Квантовая оптика». Для удобства использования пособие разбито на разделы. В каждом разделе приведены примеры решения типовых задач и представлены задачи для самостоятельной работы.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 03.03.02 Физика, магистратуры 03.04.02 Физика, студентов и аспирантов физических факультетов университетов.

Подготовлено на кафедре общей и теоретической физики.

УДК 535.14(076)
ББК В343.54я7

ISBN 978-5-7883-2066-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4

1. Классическое свободное электромагнитное поле 7
1.1. Примеры решения задач 7
1.2. Задачи для самостоятельного решения 9

2. Операторы в квантовой механике 13
2.1. Примеры решения задач 13
2.2. Задачи для самостоятельного решения 14

3. Квантование свободного электромагнитного поля 19
3.1. Примеры решения задач 19
3.2. Задачи для самостоятельного решения 23

4. Двухуровневые системы 31
4.1 Примеры решения задач 31
4.2 Задачи для самостоятельного решения 33

5. Состояния квантового электромагнитного поля 37
5.1. Примеры решения задач 37
5.2. Задачи для самостоятельного решения 40

6. Нестационарная теория возмущений.
Золотое правило Ферми 49
6.1. Примеры решения задач 49
6.2. Задачи для самостоятельного решения 54

7. Двухуровневые атомы в классическом и квантовом
электромагнитном поле 59
7.1. Примеры решения задач 59
7.2. Задачи для самостоятельного решения 64

Список литературы 70

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая оптика изучает оптические явления, в которых проявляется квантовая сущность света, и представляет собой синтез квантовой теории поля, или точнее квантовой электродинамики (КЭД) и физической оптики. В современной квантовой оптике рассматривается область частот примерно от инфракрасного диапазона до рентгеновского. Нижний предел определяется условием превышения энергией кванта энергии теплового движения. Верхний предел устанавливается исходя из того, что в квантовой оптике рассматриваются нерелятивистские энергии электронов и, следовательно, энергия кванта должна быть заметно меньше, чем энергия покоя электрона.

В настоящее время квантовая оптика испытывает революционные изменения. История развития квантовой оптики и в более узком смысле квантовой электродинамики насчитывает более ста лет, если начать отсчет с квантовой теории равновесного теплового излучения, созданной М. Планком в 1900 году. Для объяснения закономерностей излучения абсолютно черного тела Планк впервые выдвинул гипотезу о квантах электромагнитного излучения. В 1905 г. А. Эйнштейну для объяснения законов фотоэффекта пришлось предположить, что свет не только должен испускаться, но и поглощаться порциями. Важную роль сыграла также работа А. Эйнштейна 1917 года, где впервые введено понятие вынужденного или индуцированного излучения. Следующий шаг в построении последовательно квантовой теории взаимодействия вещества и поля был сделан в 1927 году П. Дираком, который впервые применил процедуру квантования к свободному электромагнитному полю. Он также впервые получил коэффициенты Эйнштейна для спонтанного и индуцированного излучения. Кульминацией КЭД было, с одной стороны, экспериментальное открытие сдвига уровней в атоме водорода и измерение аномального магнитного момента, а с другой стороны, теоретические работы С. Томонага, Д. Швингера и Р. Фейнмана показали, как избежать бесконечностей, которые объяснили указанные эффекты на основе релятивистски инвариантных методов теории возмущений. Поразительное согласие между теорией и экспериментом, установленное в настоящее время для многих КЭД-систем, полностью подтверждает квантовую природу света. До 50-х годов прошлого века основным «потребителем» квантовой электродинамики можно было считать атомную спектроскопию. Однако в 50-х – начале 60-х годов родились новые разделы физики – физика лазеров и квантовая радиофизика (квантовая электроника). Для их целей существенны не только структура стационарных состояний и вероятностей электродинамических процессов, но и их полное динамическое описание. Появление новых разделов было обусловлено экспериментальной реализацией в этот период мазерного и лазерного эффектов в излучении. Из ученых, внесших определяющий вклад в развитие этой теории, можно отметить имена Лэмба, Скалли, Хакена и Лэкса. С тех пор теория лазера прошла длинный путь от начальных подходов, использующих уравнения баланса, через полуклассическую теорию до полной квантовой версии. Однако, количество квантовых эффектов в лазере были небольшим. Единственными квантовыми эффектами, доступными измерению, оказались статистика фотонов в лазере и фазовая диффузия.

И лишь в 80-е года прошлого века удалось экспериментально наблюдать ряд новых эффектов взаимодействия излучения атомов с веществом, которые удалось описать и объяснить только в рамках полной квантовой теории взаимодействия атомов с электромагнитным полем.

К таким эффектам можно отнести субпуассоновскую статистику света, антигруппировку фотонов, сжатие света, перепутывание состояний атомов и поля и др. Изучение таких эффектов и составляет предмет современной квантовой оптики.

В настоящем пособии представлены задачи, предлагаемые на практических занятиях студентам бакалаврам 4 курса при изучении предмета «Квантовая оптика». Пособие состоит из двух частей. В первой части рассмотрены темы: «Классическое свободное электромагнитное поле», «Операторы в квантовой механике», «Квантование свободного электромагнитного поля», «Двухуровневые системы», «Состояния квантового электромагнитного поля», «Нестационарная теория возмущений. Золотое правило Ферми», «Двухуровневые атомы в классическом и квантовом электромагнитном поле». Во второй части пособия рассмотрены темы «Диссипативная динамика моделей типа Джейнса-Каммингса», «Квантовая электродинамика резонаторов», «Когерентные и кооперативные процессы», «Сверхизлучение», «Статистика и счет фотонов», «Квантовая теория лазера», «Атомная оптика», «Перепутанные состояния».

1. КЛАССИЧЕСКОЕ СВОБОДНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1.1. Примеры решения задач

Задача 1. Используя уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 0.$$

Показать, что вектора напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют волновым уравнениям.

Решение. Используя известные соотношения векторной алгебры $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{H} = \nabla(\nabla\vec{H}) - \nabla^2\vec{H}$ и $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = \nabla(\nabla\vec{E}) - \nabla^2\vec{E},$ а также 3-е и 4-е уравнения Максвелла $\mathrm{div}\vec{H} = \nabla\vec{H} = 0,$ $\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = 0$, из 1-го и 2-го уравнений Максвелла, получаем волновые уравнения для векторов напряженностей магнитного и электрического поля в виде

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Задача 2. Две монохроматические волны

$$\vec{\mathrm{E}}_1 = \vec{\mathrm{E}}_{01}\cos(\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}} - \omega t - \alpha_1) \text{ и } \vec{\mathrm{E}}_2 = \vec{\mathrm{E}}_{02}\cos(\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}} - \omega t - \alpha_2)$$

поляризованы в двух взаимноперпендикулярных направлениях. Считая амплитуду этих волн одинаковой, найти поляризацию результирующей волны.

Решение. Запишем напряженности электрических полей в комплексном виде

$$\vec{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{R}e[\vec{\mathrm{E}}_{01}e^{i(\mathrm{kr}-\omega t-\alpha_1)}],\ \vec{\mathrm{E}}_2 = \mathrm{R}e[\vec{\mathrm{E}}_{02}e^{i(\mathrm{kr}-\omega t-\alpha_2)}].$$

Результирующую волну удобно представить в виде

$$\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{R}e[(\vec{\mathrm{E}}_{01}e^{-i\chi/2} + \vec{\mathrm{E}}_{01}e^{i\chi/2})e^{i(\mathrm{kr}-\omega t-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}],$$

где $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$. Введем вещественные векторы

$$\vec{\mathrm{b}}_1 = (\vec{\mathrm{E}}_{01} + \vec{\mathrm{E}}_{02})\cos\frac{\chi}{2},\ \vec{\mathrm{b}}_2 = (-\vec{\mathrm{E}}_{01} + \vec{\mathrm{E}}_{02})\sin\frac{\chi}{2}$$

и перепишем напряженность результирующего поля как

$$\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{R}e[(\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)e^{i(\mathrm{kr}-\omega t-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})}].$$

Очевидно, что $\vec{b}_1\vec{b}_2 = 0$, т.е. векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Поэтому в системе координат с осями x и z, параллельными $\vec{b}_1$ и $\vec{k}$, соответственно, проекции напряженности электрического поля есть

$$E_x = b_1\cos(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}),$$

$$E_y = \pm b_2\sin(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}),$$

где $b_1 = \sqrt{2}E_{01}\cos\frac{\chi}{2}, b_2 = \sqrt{2}E_{01}\sin\frac{\chi}{2}$. Таким образом результирующая волна поляризована эллиптически. Направление вращения вектора $\vec{\mathrm{E}}$ зависит от ориентации векторов $\vec{\mathrm{E}}_{01},\vec{\mathrm{E}}_{02}$ и знаков величин $\cos\frac{\chi}{2},\sin\frac{\chi}{2}$.

Задача 3. Две монохратичские волны поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в одном направлении. Амплитуды и частоты волн одинаковы, фазы отличаются на постояннууу величину. Определить суммарную волну.

Решение. Запишем напряженность электрического поля результирующей волны в комплексном виде

$$\vec{\mathrm{E}} = E_0(\vec{\mathrm{e}}_x + i\vec{\mathrm{e}}\overline{X}_y)e^{i(\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}}-\omega t-\alpha_1)} + E_0(\vec{\mathrm{e}}_x - i\vec{\mathrm{e}}_y)e^{i(\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}}-\omega t-\alpha_2)} =$$

$$= E_0[(\vec{\mathrm{e}}_x + i\vec{\mathrm{e}}\overline{X}_y)e^{-i\frac{\chi}{2}} + (\vec{\mathrm{e}}_x - i\vec{\mathrm{e}}_y)e^{i\frac{\chi}{2}}]e^{i(\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}}-\omega t-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})} =$$

$$= E_0(2\cos\frac{\chi}{2}\vec{\mathrm{e}}_x + 2\sin\frac{\chi}{2}\vec{\mathrm{e}}_y)e^{i(\mathrm{kr}-\omega t-\frac{\alpha+\alpha}{2})},$$

где $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$. Отделяя вещественную часть, получим

$$\vec{\mathrm{E}} = 2E_0(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\vec{\mathrm{e}}_x + \sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\vec{\mathrm{e}}_y)\cos(\omega t - kz + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}).$$

Таким образом, результирующая волна поляризована линейно и имеет амплитуду $2E_0$.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Электрическая составляющая плоской электромагнитной волны с постоянной амплитудой $\vec{E}_0$ волновым вектором $\vec{k}$ распространяющаяся в положительном направлении оси z , дается выражением $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot z-\omega t)}$.

Показать, что волна является поперечной.

2. Доказать, что напряженность магнитного поля $\vec{H}$ плоской электромагнитной волны и векторный потенциал $\vec{A}$ связаны соотношением $\vec{H} = (1/c)\left[\dot{\vec{A}}, \vec{n}\right]$.

3. Плоская монохроматическая электромагнитная волна с частотой ω распространяется в вакууме в направлении оси z. Записать выражение для $\vec{E}(z,t), \vec{H}(z,t)$, если волна а) линейно поляризована, б) имеет правовинтовую круговую поляризацию.

4. В плоскости z =0 поле электромагнитной волны задается уравнением $\vec{E}(t) = \vec{e}_x E_{0x} \cos\omega t + \vec{e}_y E_{0y} \sin\omega t$. Эта волна может быть представлена как сумма волн правой и левой круговой поляризации: $\vec{E}(t) = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, где $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ – постоянные по модулю векторы, вращающиеся в противоположных направлениях. Найти $E_+ = |\vec{E}_+|$ и $E_+ = |\vec{E}_+|$.

5. Плоская электромагнитная волна задается уравнением

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x E_{0x} \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \vec{e}_y E_{0y} \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Найти плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля. Рассмотреть случаи линейной и круговой поляризации.

6. Вектор напряженности магнитного поля в вакууме задан в декартовой системе координат в виде: $\vec{H} = \vec{e}_x A y$, где $A = const$. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ в момент времени $t = 0$ равна нулю. Найти $\vec{E}(t)$.

7. Вектор напряженности электрического поля в вакууме задан в декартовой системе координат $(x;\ y;\ z)$ в виде $\vec{E} = \vec{e}_x B y$, где $B = const$. Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в момент времени $t = 0$ равна нулю. Найти $\vec{H}(t)$.

8. Напряженность электрического поля в плоской электромагнитной волне $\vec{E} = \mathrm{R}e\{\vec{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]\}$. Комплексная амплитуда равна $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}$, где E_0 положительная вещественная величина, $\vec{e} = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)/\sqrt{2}$. Записать вещественные выражения для декартовых компонент вектора $\vec{E}$. Какую поляризацию имеет волна?

9. Как поляризованы волны (E_0, E_1, E_2 – вещественные величины и $E_2 > E_1$)

а) $\vec{E} = (E_0\vec{e}_x + E_0\vec{e}_y)\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$;

б) $\vec{E} = (E_0\vec{e}_x + iE_0\vec{e}_y)\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$;

в) $\vec{E} = (E_0\vec{e}_x - iE_0\vec{e}_y)\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$;

г) $\vec{E} = (E_1\vec{e}_x - iE_2\vec{e}_y)\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$.

Для случаев а), б) и в) указать, чему равны амплитуды волн.

10. Амплитуда правополяризованной круговой волны равна – A, а левополяризованной волны – B. Частоты и фазы волн одинаковые. Волны распространяются в одном направлении. Определить поляризацию результирующей волны.

11. Плоскости поляризации двух монохроматических волн

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha_1) \text{ и } \vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \alpha_2)$$

наклюнены под углом θ друг к другу. Определить поляризацию результирующей волны, если $E_{01} = E_{02}$ и $\chi = \alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$.

12. Рассмотрим две электромагнитные волны одинаковой частоты, распространяющиеся вдоль оси z. Одна из них линейно поляризована вдоль оси x, а другая вдоль оси y. Пуст амплитуды волн равны E_{x0} E_{y0}, соответственно, сдвиг фаз для волн равен $\Delta\alpha$, так что для компонент электрического поля мы можем записать

$$E_x(z,t) = E_{x0}\sin(kz - \omega t), \quad E_y(z,t) = E_{y0}\sin(kz - \omega t + \Delta\alpha), \quad E_z(z,t) = 0.$$

Найти результирующую поляризацию волныв следующих случаях:

а) $E_{x0} = E_{y0}, \Delta\alpha = 0$;

б) $E_{x0} = \sqrt{3} E_{y0}, \Delta\alpha = 0$;

в) $E_{x0} = E_{y0}, \Delta\alpha = +\pi / 2$;

г) $E_{x0} = E_{y0}, \Delta\alpha = -\pi / 2$;

д) $E_{x0} = \sqrt{3} E_{y0}, \Delta\alpha = +\pi / 2$;

е) $E_{x0} = E_{y0}, \Delta\alpha = +\pi / 4$.

2. ОПЕРАТОРЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

2.1. Примеры решения задач

Задача 1. Доказать лемму Бейкера-Хаусдорфа: для любых двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + i\lambda[\hat{A},\hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + ...$$

Решение. Пусть f функция, определенная как $f(\lambda) = e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}}$.

Разложим функцию f : $f(\lambda) = c_0 + c_1(i\lambda) + c_2\frac{(i\lambda)^2}{2!} + ...$

где $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$, $c_2 = f''(0)\ldots$

В нашем случае

$$c_0 = f(0) = \hat{B},$$

$$c_1 = f'(0) = [\hat{A}e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} - e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}\hat{A}|_{\lambda=0} = [\hat{A},\hat{B}],$$

$$c_2 = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]], \ldots$$

Аналогично можно получить остальные коэффициенты разложения.

Задача 2. Показать, что в частном случае, когда $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$, но $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ имеет место теорема Бейкера-Хаусдорфа-Кэмпбелла

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \exp(-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}])e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp(\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}])e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}.$$

Решение. Положим

$$f(x) = e^{\hat{A}x} e^{\hat{B}x}. \qquad (2.1)$$

Тогда $\dfrac{df(x)}{dx} = \hat{A}e^{\hat{A}x}e^{\hat{B}x} + e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{\hat{B}x} = (\hat{A} + e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{-\hat{A}x}) f(x)$.

Легко доказать, что

$$[\hat{B}, \hat{A}^n] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{B}, \hat{A}],$$

$$[\hat{B}, e^{-\hat{A}x}] = \sum [\hat{B}, \frac{(-\hat{A}x)^n}{n!}] = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!}[\hat{B}, \hat{A}^n] = .$$

$$= \sum (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)!}\hat{A}^{n-1}[\hat{B}, \hat{A}] = -e^{-\hat{A}x}[\hat{B}, \hat{A}]x.$$

Тогда

$$\hat{B}e^{-\hat{A}x} - e^{-\hat{A}x}\hat{B} = -e^{-\hat{A}x}[\hat{B}, \hat{A}]x, \quad e^{-\hat{A}x}\hat{B}e^{\hat{A}x} = \hat{B} - e^{-\hat{A}x}[\hat{B}, \hat{A}]x,$$

$$e^{\hat{A}x}\hat{B}e^{-\hat{A}x} = \hat{B} + e^{\hat{A}x}[\hat{A}, \hat{B}]x.$$

В результает (2.1) можно представить

$$\frac{df(x)}{dx} = (\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]) f(x). \qquad (2.2)$$

Так как $[\hat{A}, \hat{B}]$ коммутирует с $\hat{A}$ и $\hat{B}$, мы можем решить уравнение (2.2) как обыкновенное диффиренциальное уравнение. Решение есть

$$f(x) = \exp[(\hat{A} + \hat{B})x]\exp(\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]x^2).$$

Если мы положим $x = 1$, то будем иметь

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}.$$

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если $[A, B] = 1$, то $[A, B^2] = 2B$.

2. Оператор A коммутирует с операторами B и C. Можно ли отсюда заключить, что операторы B и C также коммутируют?

3. Показать, что если операторы A и B линейные, то операторы $A+B$ и AB также линейные.

4. Показать, что эрмитово-сопряженным оператору $\frac{\partial}{\partial x}$ является оператор $-\frac{\partial}{\partial x}$.

5. Используя условие сопряжения показать справедливость следующего равенства: $\left(\hat{L}\hat{M}\right)^{\dagger} = \hat{M}^{\dagger}\hat{L}^{\dagger}$.

6. Найти $\left(\hat{L}\hat{M}\right)^{-1}$.

7. Доказать, что оператор умножения на вещественную функцию является эрмитовским.

8. Доказать эрмитовость операторов координаты, импульса и гамильтониана. Указание: учесть, что на бесконечности волновые функции (и их производные) обращаются в нуль.

9. Доказать, что если операторы A и B эрмитовские и коммутируют, то оператор AB также эрмитовский.

10. Доказать, что если операторы A и B эрмитовские, то и операторы $(A+B)$ и $AB+BA$ также эрмитовские.

11. Доказать, что если операторы A и B – эрмитовские и некоммутирующие, то оператор: а) $[A,B]$ – неэрмитовский; б) $i[A,B]$ – эрмитовский.

12. Доказать, что если операторы A и B коммутируют, то:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, (A+(A-B) = A^2 - B^2, [(A+B),(A-B)] = 0 .$$

13. Проверить эрмитовость операторов

$$\hat{p}=-ih\frac{d}{dx},\hat{T}=-h^2\frac{d^2}{dx^2},\hat{L}_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k.$$

14. Найти операторы $(AB)^+$, $[A,B]^+$, где A,B – произвольные операторы.

15. Для операторов A и $A^\dagger$ выполняются следующие соотношения

$$AA^\dagger+A^\dagger A=I\ ,\ AA=0\ ,\ A^\dagger A^\dagger=0.$$

Показать. что собственные значения оператора A^+A есть 0 или 1.

16. Вычислить $(\frac{d}{dx})^\dagger$, $(x\frac{d}{dx})^\dagger,(AB)^\dagger,(A^\dagger)^\dagger,(|a\rangle\langle b|)^\dagger$.

17. Доказать, что

$$e^{\lambda A}B^n e^{-\lambda A}=(e^{\lambda A}Be^{-\lambda A})^n\ ,e^{\lambda A}f(B)e^{-\lambda A}=f(e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}).$$

18. Доказать, что $AB^nA^{-1}=(ABA^{-1})^n$ и, следовательно,

$$Af(B)A^{-1}=f(ABA^{-1})\ и\ Ae^BA^{-1}=\exp(ABA^{-1})\ .$$

19. Доказать, что любой оператор C можно представить в виде $C=A+iB$, где A и B эрмитовы.

20. Доказать, что если A эрмитов, то $\exp(iA)$ унитарен.

21. Доказать, что если A и B эрмитовы, то $[A,B]=iC$, где C эрмитов.

22. Доказать, что произведение двух эрмитовых операторов $AB=C+D$ всегда можно представить как сумму эрмитового: C и антиэрмитового: D $(D^+=-D)$ операторов.

23. Проверить следующие операторные равенства:

$$\frac{d}{d\,x}x=1+x\frac{d}{d\,x}\ ;\ x^2\frac{d}{d\,x}\frac{1}{x}=x\frac{d}{d\,x}-1\ ;\ \left(1+\frac{d}{d\,x}\right)^2=1+2\frac{d}{d\,x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\ ;$$

$$\left(x+\frac{d}{d\,x}\right)^2=1+x^2+2x\frac{d}{d\,x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\ ;\ \left(\frac{1}{x}\frac{d}{d\,x}x\right)^2=\frac{d^2}{d\,x^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{d\,x}\ ;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

24. Проверить следующие равенства для коммутаторов:

$$[U(x),p_x]=i\hbar\frac{\partial U}{\partial x};\ [U(x),p_x^2]=2i\hbar\frac{\partial U}{\partial x}p_x+\hbar^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

25. Используя коммутатор $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$, показать, что

$$[\hat{x},\hat{p}^n]=i\hbar n\hat{p}^{n-1},\ [\hat{x},F(\hat{p})]=i\frac{\partial F}{\partial\hat{p}},\ [\hat{p}^n,\hat{x}^n]=-i\hbar n\hat{x}^{n-1},$$

$$[\hat{p},Q(\hat{X})]=-i\frac{\partial Q}{\partial\hat{x}},\ [\hat{x},\hat{p}^2F(\hat{X})]=2i\hbar\hat{p}F(\hat{X}),$$

$$[\hat{x},\hat{p}F(\hat{x})\hat{p}]=i\hbar(\hat{p}F(\hat{x})+F(\hat{x})\hat{p}),\ [\hat{p},F(\hat{x})\hat{p}^2]=-2i\hbar F(\hat{x})\hat{p},$$

$$[\hat{p},\hat{p}^2F(\hat{x})]=-i\hbar\hat{p}^2F'(\hat{x}),\ [\hat{p},\hat{p}F(\hat{x})\hat{p}]=-i\hbar\hat{p}F'(\hat{x})\hat{p},$$

$$[\hat{p},F(\hat{x})\hat{p}^2]=-i\hbar F'(\hat{x})\hat{p}^2.$$

26. Используя коммутатор $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ и базис $\hat{x}|x'\rangle=x'|x'\rangle$, $\hat{p}|p'\rangle=p'|p^1\rangle$, доказать, что

$$\langle x|p\rangle=(2\pi)^{-1}e^{ipx},\ \langle x|\hat{p}|x'\rangle=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x').$$

27. Разложить оператор $(A-\varepsilon B)^{-1}$ по малому параметру $\varepsilon<<1$.

28. Доказать, что $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$.

29. Используя 30 доказать, что

$$[A,B^n]=\sum_{k=0}^{n-1}B^k[A,B]B^{n-k-1}.$$

30. Доказать тождество Якоби $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

31. Доказать, что $e^{-\lambda A}e^{\lambda A} = I$.

32. Доказать, что

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda A} = Ae^{\lambda A},\ \frac{d}{d\lambda}(AB) = \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda},\ \frac{d}{d\lambda}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{-1}.$$

3. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Примеры решения задач

Задача 1. Дано, что для оператора уничтожения имеет место соотношение $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1)$. Показать, что n должно быть положительным числом.

Решение. Пусть $a\,|n\rangle \equiv |\Psi\rangle$. Так как для скалярного произведения имеет место неравенство $\langle\Psi\,|\,\Psi\rangle \geq 0$, мы имеем

$$\langle\Psi\,|\,\Psi\rangle = \langle n\,|\,a^{\dagger}a\,|\,n\rangle = n\langle n-1|\,n-1\rangle = n \geq 0\,.$$

Следовательно n – положительное число.

Задача 2. Используя коммутационное соотношение для операторов координаты x и проекции импульса $p \equiv p_x$: $[x, p] = ih$. Покажите, что операторы рождения a^{+} и уничтожения a одномерного квантового гармонического осциллятора удовлетворяют соотношениям $[a, a^{+}] = 1$. Покажите, что гамильтониан гармонического осциллятора $\hat{H} = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ может быть записан в виде $H = \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Имеем для оператора уничтожения

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{2mh\omega}}\,p = \alpha \mathrm{x} + i\beta p$$

и оператора рождения

$$a^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p = \alpha x - i\beta p,$$

где $\alpha = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}$, $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$.

Тогда

$$[a,a^{\dagger}] = aa^{\dagger} - a^{\dagger}a = (\alpha x + i\beta p)(\alpha x - i\beta p) - (\alpha\hat{x} - i\beta\hat{p})(\alpha\hat{x} + i\beta\hat{p}) =$$

$$= \alpha^2 x^2 - i\alpha\beta xp + i\alpha\beta px + \beta^2 p^2 - \alpha^2 x^2 = -i\alpha\beta xp + i\alpha\beta px - \beta^2 p^2 =$$

$$= -2i\alpha\beta xp + 2i\alpha\beta\hat{p}\hat{x} = -2i\alpha\beta(xp - px) = -2i\alpha\beta[x,p] =$$

$$= -2i\alpha\beta(i\hbar) = 2\alpha\beta\hbar = 2\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 1\,.$$

Так как операторы координаты и импульса связаны соотношениями

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}(a + a^{\dagger}), \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^{\dagger})$$

и гамильтониан $H = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$,

имеем

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{m\omega h}{2}(a - a^{\dagger})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{1}{4}\frac{2\hbar}{m\omega}(a + a^{\dagger})^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\hbar\omega[(a - a^{\dagger})^2 - (a + a^{\dagger})^2] = -\frac{1}{4}\hbar\omega$$

$$((a^2 - aa^{\dagger} - a^{\dagger}a + a^{\dagger 2} - a^2 - aa^{\dagger} - a^{\dagger}a - a^{\dagger 2}) = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^{\dagger} + a^{\dagger}a) =$$

$$= \hbar\omega\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right).$$

Задача 3. Докажите по индукции, что имеем место следующее коммутационное соотношение $[a,(a^{\dagger})^n] = n(a^{\dagger})^{n-1}$

Решение. Для $n=1$ имеем $[a,a^{\dagger}]=1$.

Предположим, что искомое коммутационное соотношение справедливо для $n=k$: $[a,(a^{\dagger})^{k}]=k(a^{\dagger})^{k-1}$.

Докажем, что оно справедливо тогда для $n=k+1$, т.е.

$$[a,(a^{\dagger})^{k+1}]=(k+1)(a^{\dagger})^{k}.$$

Рассмотрим левую часть этого соотношения

$$[a,(a^{\dagger})^{k+1}]=a(a^{\dagger})^{k+1}-(a^{\dagger})^{k+1}a=a(a^{\dagger})^{k}a^{\dagger}-a^{\dagger}(a^{\dagger})^{k}a=$$
$$=(a^{\dagger})^{k}aa^{\dagger}+k(a^{\dagger})^{k-1}a^{\dagger}-(a^{\dagger})^{k+1}a=$$
$$=(a^{\dagger})^{k}(1+a^{\dagger}a)+k(a^{\dagger})^{k-1}a^{\dagger}-a^{\dagger}(a^{\dagger})^{k}a=$$
$$=(a^{\dagger})^{k}+k(a^{\dagger})^{k}=(k+1)(a^{\dagger})^{k}.$$

Задача 4. Вычислите энергетический спектр системы с гамильтонианом $H=\varepsilon_0 a^{\dagger}a+\varepsilon_1(a^{\dagger}a^{\dagger}+aa)$.

Решение: Преобразуем гамильтониан к виду

$$H=E_0A^{\dagger}A+E_1.$$

Путем перехода к новым бозе-операторам $A^{\dagger},A$, которые линейно связаны с исходными $a=\alpha A+\beta A^{\dagger}$, $a^{\dagger}=\alpha^{*}A^{\dagger}+\beta^{*}A$. Это частный случай канонического преобразования Боголюбова. Из условия $[a,a^{\dagger}]=[A,A^{\dagger}]=1$ следует, что $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$. Далее для простоты будем считать α,β вещественными. Для нахождения α,β и E_0 составим коммутатор $[H,a]=-\varepsilon_0 a-2\varepsilon_1 a^{\dagger}=E_0(-\alpha A+\beta A^{\dagger})$

Или $\varepsilon_0(\alpha A+\beta A^{\dagger})+2\varepsilon_1(\alpha A^{\dagger}+\beta A)=E_0(\alpha A-\beta A^{\dagger})$.

Приравнивая коэффициенты при A,A^{+}, получаем систему

$$\varepsilon_0\alpha+2\varepsilon_1\beta=E_0\alpha A,$$

$$\varepsilon_0\beta+2\varepsilon_1\alpha=-E_0\beta\,.$$

Условие разрешимости которой имеет вид

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_0-E_0 & 2\varepsilon_1\\ 2\varepsilon_1 & \varepsilon_0+E_0\end{vmatrix}=0\,.$$

Отсюда $E_0=\varepsilon_0\sqrt{1-4\varepsilon_1^2/\varepsilon_0^2}$.

Найдем теперь E_1 . Очевидно, что $E_1=\langle 0|H|0\rangle$, где $|0\rangle$ – основное состояние системы. Последнее равенство показывает, что $a|0\rangle=\beta A^{\dagger}|0\rangle$. Но тогда $\langle 0|a^{\dagger}a|0\rangle=\beta^2\langle 0|AA^{\dagger}|0\rangle=\beta^2$, $\langle 0|aa|0\rangle=\beta\ \langle 0|\alpha A+\beta A^{+}|A^{+}|0\rangle=\langle 0|aa|0\rangle=\alpha\beta\ \langle 0|AA^{\dagger}|0\rangle=\alpha\beta$, $\langle 0|aa|0\rangle=\beta\ \langle 0|\alpha A+\beta A^{\dagger}|A^{\dagger}|0\rangle=\langle 0|AA^{+}|0\rangle=\alpha\beta,\langle 0|a^{\dagger}a^{\dagger}|0\rangle=\alpha\beta.$

Отсюда $E_1=\varepsilon_0\beta^2+2\alpha\beta\varepsilon_1$. Чтобы найти α,β , вернемся к определяющей их системе уравнений. Видим, что $\beta/\alpha=(E_0-\varepsilon_0)/(2\varepsilon_1)$. Тогда $\alpha^2-\beta^2=\alpha^2(1-(E_0-\varepsilon_0)^2/(4\varepsilon_1^2))=1$. Введем обозначение $\Delta=\varepsilon_1/\varepsilon_0,\eta=\sqrt{1-4\Delta^2}$. Тогда имеем

$$E_0=\varepsilon_0\eta, E_1=\varepsilon_0{}^2\left[\frac{(\eta-1)^2}{4\Delta^2}-\eta-1\right]/\left[1-\frac{(\eta-1)^2}{4\Delta^2}\right],$$

что можно привести к виду $E_1=\varepsilon_0(\eta-1)/2$. В итоге гамильтониан примет вид

$$H=\varepsilon_0(\eta A^{+}A+(\eta-1)/2)=\varepsilon_0\sqrt{1-4\varepsilon_1^2/\varepsilon_0^2}\ \ (A^{+}A+1/2)-\varepsilon_0/2\,.$$

Очевидно, что энергетический спектр имеет вид

$$E_n=\varepsilon_0\sqrt{1-4\varepsilon_1^2/\varepsilon_0^2}\ \ (n+1/2)-\varepsilon_0/2,\ \ n=1,2,3,...$$

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя матричные представления для операторов уничтожения a и и рождения a^{+} в базисе собственных векторов линейного гармонического оператора

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad a^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . \\ \sqrt{1} & 0 & . & . & . & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . & . \\ . & 0 & \sqrt{3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

проверить коммутационное соотношение $[a, a^{\dagger}] = 1$.

2. Используя связь операторов x и p_x с операторами рождения и уничтожения квантов для гармонического осциллятора:

а) показать, что средние $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$, $\langle p_x \rangle$ и $\langle p_x^2 \rangle$ для произвольного стационарного состояния $|n\rangle$ имеют вид

$$\langle n | x | n \rangle = 0, \ \langle n | p_x^2 | n \rangle = 0,$$

$$\langle n | x^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}(n + 1/2),$$

$$\langle n | p_x^2 | n \rangle = m\omega\hbar(n + 1/2),$$

$$\langle n | H | n \rangle = \hbar\omega(n + 1/2) .$$

б) показать, что $\langle n | H | n \rangle = \hbar\omega(n + 1/2)$, где H – гамильтониан гармонического осциллятора.

в) показать, что соответствующее произведение неопределенностей для импульса и координаты

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p_x^2) n \rangle = \hbar^2 (n + 1/2)^2.$$

3. Установить при каких условиях преобразования от бозе-операторов $a, a^{\dagger}$ к новым бозе-операторам $b, b^{\dagger}$ – вида

$$b = \alpha a + \beta a^{\dagger}, \ b^{\dagger} = \alpha^{*} a^{\dagger} + \beta^{*} a$$

(α, β – вещественные числа) является каноническим?

4. Масса осциллятора m, частота ω, заряд e. На осциллятор действует постоянное однородное электрическое поле напряженности E, направленное вдоль оси Ox. Показать, что энергии стационарных состояний осциллятора имеют вид

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}.$$

Решить ту же задачу, используя связь операторов координаты и импульса с операторами рождения и уничтожения квантов энергии осциллятора. Использовать каноническое преобразование

$$a = b + r, a^{\dagger} = b^{\dagger} + r,$$

где a, a^{+} – исходные бозе-операторы уничтожения и рождения квантов, b, b^{+} – вспомогательные операторы уничтожения и рождения и r – параметр, определяемый как

$$r = eEx_0 / (\sqrt{2}\hbar\omega), x_0 = eE / (m\omega^2).$$

5. Линейный одномерный гармонический осциллятор приведен в основное состояние. Найти вероятность его обнаружения в классически доступной области.

6. Найдите среднее значение координаты для собственных функций гармонического осциллятора $|n\rangle$, а также для векторов

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + e^{i\phi}|n+1\rangle) \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + e^{i\phi}|n+2\rangle).$$

7. Показать, что для одномодового гамильтониана $H = \hbar\omega\, a^{+}a$, $a^{\dagger}$ and a – операторы рождения и уничтожения фотонов, удовлетворяющие коммутационному соотношению $[a, a^{\dagger}] = 1$, имеет место соотношение $e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t} a$. Получить аналогичное выражение для $e^{iHt/\hbar} a^{\dagger} e^{-iHt/\hbar}$.

8. Докажите операторные соотношения

$$na = a(n-1),\ na^{\dagger} = a(n+1).$$

9. Определите константы в соотношениях

$$\alpha\,|n\rangle = C_n\,|n-1\rangle,\ a^{\dagger}\,|n\rangle = C_n'\,|n-1\rangle.$$

10. Докажите, что

$$aa^{\dagger}\,|n\rangle = (n+1)\,|n\rangle.$$

11. Для гамильнониана гармонического осциллятора

$$H = \hbar\omega(aa^{\dagger} + 1/2), \qquad (3.1)$$

докажите, что $e^{iHt/h} a e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t} a$, и найдите $e^{iHt/\hbar} a^{\dagger} e^{-iHt/\hbar}$.

12. Докажите, что $[a, f(a^{\dagger})] = \dfrac{df(a^{\dagger})}{da^{\dagger}}$.

13. Вычислите $[a^2, (a^{\dagger})^n]$, $[\hat{a}, \exp(\alpha\hat{a}^{\dagger})] = \alpha \exp(\alpha\hat{a}^{\dagger})$.

14. Найти перестановочные соотношения для операторов

$$A_1 = (a^{\dagger}a^{\dagger} + aa)/4,\ A_2 = (a^{\dagger}a + aa^{+})/4,\ A_3 = i(a^{\dagger}a^{\dagger} - aa)/4.$$

15. Покажите, что операторы S_{-}, S_{+} и S_3, определяемые соотношениями

$$S_{-} = ab^{\dagger}, S_{+} = a^{\dagger}b, S_3 = (1/2)(a^{\dagger}a - b^{+}b)$$

удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[S_-, S_+] = -2S_3, [S_3, S_-] = -S_-, [S_3, S_+] = S_+ \; (SU(2) \text{ – алгебра}).$$

Покажите, что оператор $(a^\dagger a + b^\dagger b)$ коммутируют со всеми S_i.

16. Покажите, что для операторов K_-, K_+ и K_3, определяемых соотношениями K-

$$K_- = ab, K_+ = a^+ b^+, K_3 = (1/2)(a^\dagger a + b^\dagger b + 1),$$

$$[K_-, K_+] = 2K_3, [K_3, K_-] = -K_-, [K_3, K_+] = K_+ \; (SU(1,1) \text{ – алгебра}).$$

17. Найти собственные значения оператора $a^\dagger a + \lambda a^\dagger + \lambda^* a$.

18. Покажите, что оператор $e^{2\pi i a^\dagger a}$ эквивалентен единичному.

19. Используя коммутатор $[a, a^+] = 1$, покажите, что $a^\dagger a \,|N\rangle = N\,|N\rangle$, где $N = 0,1,2\ldots$ –целое число, т. е. спектр его ограничен снизу. Покажите, что $N a\,|N\rangle = \sqrt{N}\,|N-1\rangle$ и $a^\dagger\,|N\rangle = \sqrt{N+1}\,|N+1\rangle$.

20. Для гармонического осциллятора $\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ найдите операторы рождения $a^+(t)$ и уничтожения $a(t)$ в представлении Гейзенберга.

21. Докажите, что

а) $[a^\dagger a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^n, [a^\dagger a, (a)^n] = -n(a)^n$;

б) $e^{\lambda a}(a^\dagger)^n = (a^\dagger + \lambda)^n e^{\lambda a}$, $e^{\lambda a} a^n = (a - \lambda)^n e^{\lambda a^\dagger}$;

в) $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$, $[a^\dagger, a^n] = -na^{n-1}$;

г) $(n+3)(n+2)\langle n|(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a}^4 \hat{a}^\dagger|n\rangle = (n-1)(n-2)\langle n|\hat{a}^3(\hat{a}^\dagger)^4 \hat{a}|n\rangle$;

д) $e^{\lambda a}\,|0\rangle = |0\rangle$, $e^{\lambda a^\dagger}\,|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}\,|n\rangle$;

у) $e^{\lambda a^{+}a}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n}|n\rangle\langle n|$.

22. Пусть $f(a,a^{\dagger})$ - функция, разложимая в степенной ряд по α и a^{+}. Покажите, что $e^{-\alpha a^{\dagger}a} f(a,a^{\dagger}) e^{\alpha a^{\dagger}a} = f(ae^{-\alpha}, a^{\dagger}e^{\alpha})$, где α – параметр.

23. Покажите, что $[a, e^{-\alpha a^{\dagger}a}] = (e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha a^{\dagger}a}a$,

$$[a^{\dagger}, e^{-\alpha a^{\dagger}a}] = (e^{\alpha} - 1)e^{-\alpha a^{\dagger}a}a^{\dagger},$$

где α – параметр.

24. Используя явный вид оператора векторного потенциала свободного электромагнитного поля в представлении вторичного квантования

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\omega t - i\vec{k}\vec{r})}).$$

Показать, что операторы напряженности электрического и магнитного полей имеют вид

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\omega_k\hbar c^2}{V}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}),$$

Здесь $\vec{k}$ – волновой вектор и λ – индекс поляризации.

25. Используя уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля, покажите, что в кулоновской калибровке оператор векторного потенциала удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

Докажите, что решением этого уравнения для кубической проводящей полости (длиной L) являются

$$A_x(\vec{r},t) = A_x(t)\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z),$$

$$A_y(\vec{r},t) = A_y(t)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z),$$

$$A_z(\vec{r},t) = A_z(t)\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z),$$

где $k_i = 2\pi / L \quad (i = x, y, z)$.

26. Докажите, что для свободного электромагнитного поля имеет место соотношение

$$\langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{\vec{E}}(\vec{r},t) | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \langle n_{\vec{k},\lambda} | \hat{\vec{H}}(\vec{r},t) | n_{\vec{k},\lambda} \rangle = 0.$$

27. Используя преобразование Боголюбова

$$a = \alpha b + \beta b^\dagger, \;\; a^\dagger = \alpha^* b^\dagger + \beta^* b,$$

диагонализовать гамильтониан

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda(a^{\dagger 2} + a^2).$$

Так, что

$$H = \hbar\omega\sqrt{1 - 4\frac{\lambda^2}{\omega^2}}(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega}{2}$$

и энергетический спектр системы

$$E_n = \hbar\omega\sqrt{1 - 4\frac{\lambda^2}{\omega^2}}(n + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega}{2}.$$

28. Диагонализовать гамильтониан

$$H(t) = \hbar\omega a^\dagger a + g a^2 + g^*(t) a^{\dagger 2},$$

используя преобразование Боголюбова

$$a = b\cosh r + b^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r,$$

так, что

$$H = \Omega b^{\dagger} b + \eta .$$

Показать, что параметрыt Ω, r, θ, η даются соотношениями

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - 4|g|^2}, \quad r = \frac{1}{4}\ln\frac{\omega - 2|g|}{\omega + 2|g|}, \theta = i\ln\sqrt{\frac{g^*}{g}}, \ \eta = \frac{\Omega - \omega}{2}.$$

29. Используя преобразования Боголюбова для для двухмодового поля

$$a = c\cosh r + d^{\dagger} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \sinh r,$$

$$b = d\cosh r + c^{\dagger} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \sinh r$$

диагонализовать гамильтониан

$$H(t) = \hbar\omega_a a^{+} a + \hbar\omega_b b^{\dagger} b + g a^{\dagger} b^{\dagger} + g^* ab \ ,$$

приведя его к виду

$$H = \hbar\Omega(c^{\dagger} c + d^{\dagger} d) + \hbar\alpha ,$$

где $\Omega, r, \theta, \alpha$ есть

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - |g|^2}, \ r = \frac{1}{4}\ln\frac{\omega - |g|}{\omega + |g|}, \ \theta = i\ln\sqrt{\frac{g^*}{g}}, \ \alpha = \sqrt{\omega^2 - |g|^2} - \omega .$$

30. Используя преобразования Боголюбова для двухмодового поля $a = \mu^* c - \nu d, \ b = \nu^* c + \mu d$, $|\nu|^2 + |\mu|^2 = 1$, диагонализовать двухмодовый гамильтониан

$$H(t) = \hbar\omega a^{\dagger} a + \hbar\omega b^{\dagger} b + g a^{\dagger} b + g^* a b^{\dagger} ,$$

приведя его к виду

$$H = \Omega_c c^{\dagger} c + \Omega_d d^{\dagger} d .$$

Показать, что параметры канонического преобразования можно выбрать в виде $\mu = \cos\varphi, \nu = \sin\varphi e^{-i\phi}, \phi = \arg g$, где

$$tg\varphi = \frac{1}{2|g|}(\omega_b - \omega_b + \sqrt{(\omega_b - \omega_a)^2 + 4|g|^2}),$$

$$\omega_a = \frac{1}{2}(\omega_b + \omega_a + \sqrt{(\omega_b - \omega_a)^2 + 4|g|^2}),$$

$$\omega_b = \frac{1}{2}(\omega_b + \omega_a - \sqrt{(\omega_b - \omega_a)^2 + 4|g|^2}).$$

4. ДВУХУРОВНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

4.1. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотреть двухуровневый естественный или искусственный атом. Путь $|g\rangle$ и $|e\rangle$ – основное и первое возбужденное невырожденные состояния атома, которым соответствуют уровни энергии E_g и E_g, соответственно. Показать, что гамильтониан свободного двухуровневого атома в квазиспиновом представлении имеет вид

$$H = \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \varepsilon\hat{I}\,. \qquad (4.1)$$

Здесь $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$, $\varepsilon = (E_e + E_g)/2$ и $\hat{I}$ – единичный оператор. Замечание: при учете произвола в выборе начала отсчета энергии гамильтониан (4.1) обычно записывают в виде

$$H = \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z\,.$$

Задача 2. Вычислить квадраты операторов компонент квазиспина $\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^2$. Могут ли указанные квадраты проекций спинов быть измерены одновременно?

Решение. Вычисляем $\hat{\sigma}_x^2$: $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$.

Аналогично $\hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$,

$$\hat{\sigma}_z^2 = \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}\,.$$

Квадраты операторов спиновых компонент представляют собой единичные операторы. Следовательно они коммутируют друг с другом. Следовательно квадраты спиновых компонент одновременно измеримы.

Задача 3. Операторы $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$, и $\hat{\sigma}_z$, представляющие компоненты квазиспина, могут быть представлены в терминах повышающих и понижающих спиновых операторов $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ как

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-, \ \hat{\sigma}_y = (\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-)/i, \ \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+.$$

Пусть $|g\rangle$ и $|e\rangle$ – основное и возбужденне состояние двухуровневого атома. Повышающий и понижающий операторы удовлетворяют следующим соотношениям

$$\hat{\sigma}_+ |g\rangle = |e\rangle, \ \hat{\sigma}_- |g) = 0, \ \hat{\sigma}_+ |e\rangle = 0, \ \hat{\sigma}_- |e\rangle = |g\rangle .$$

Используя эти соотношения, найдите матричные представления (матрицы Паули) для операторов $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$, и $\hat{\sigma}_z$ в базисе состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$.

Решение. Матричное представление оператора $\hat{\sigma}_x$ есть

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \langle e|\hat{\sigma}_x|e\rangle & \langle e|\hat{\sigma}_x|g\rangle \\ \langle g|\hat{\sigma}_x|e\rangle & \langle g|\hat{\sigma}_x|g\rangle \end{pmatrix},$$

где матричные элементы есть

$$\langle g|\hat{\sigma}_x|g\rangle = \langle g|(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)|g\rangle = \langle g|e\rangle + \langle g|0\rangle = 0,$$

$$\langle g|\hat{\sigma}_x|e\rangle = \langle g|(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)|e\rangle = \langle g|0\rangle + \langle g|g\rangle = 1,$$

$$\langle e|\hat{\sigma}_x|e\rangle = \langle e|(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)|e\rangle = \langle e|0\rangle + \langle e|g\rangle = 0 .$$

В результате для матричного представления оператора $\hat{\sigma}_x$ получаем $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Аналогично, в базисе состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$ для операторов $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$ получаем $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матричные представления для операторов σ^+ и σ^- в базисе состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$.

2. Рассматривая матрицы Паули, соответствующие квазиспиновым операторам $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$, и $\hat{\sigma}_z$ в базисе состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$:

а) доказать, что операторы $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$, и $\hat{\sigma}_z$ – эрмитовы;

б) показать, что каждый из операторов $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$, и $\hat{\sigma}_z$ имеет собственные значения равные +1, –1. Определить нормализованные собственные вектора для каждого из них. Являются ли $|g\rangle$ и $|e\rangle$ собственными векторами какого-то из этих операторов;

в) вычислите антикоммутаторы $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]_+, [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x]_+, [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z]_+$.

3. Найти коммутатор $[(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y)^2, \hat{\sigma}_z]$.

4. Атом описывается в некотором базисе $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ гамильтонианом $\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -3i & 9 \end{pmatrix}$. Найдите:

а) собственные состояния и собственные значения энергии;

б) энергию этого атома в состоянии $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle + i|v_2\rangle)$.

5. Для частицы с квазиспином s=1/2 найти собственные значения и нормированные собственные функции оператора $\hat{s}_y$. Используя эти

функции найти вероятности различных значений проекции спина на ось y в состоянии $\psi(s_z) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

6. Безразмерная проекция квазиспина на ось z равна +1/2. Какова вероятность обнаружить ориентацию квазиспина вдоль или против оси, составляющей с осью z угол θ? Каковы вероятности возможных значений проекции квазиспина на направление $\vec{n} = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha$.

7. Доказать для операторов квазиспина формулу:

$$(\vec{a}\hat{\vec{\sigma}}) \cdot (\bar{b}\hat{\vec{\sigma}}) = (\vec{a}\vec{b}) + i\hat{\vec{\sigma}}[\vec{\mathrm{a}} \times \vec{b}].$$

8. Система двух спинов 1/2 находится в чистом состоянии

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle].$$

Найти матрицы плотности смешанных спиновых состояний, в которых находится каждая из частиц по отдельности.

9. Гамильтониан системы двух закрепленных спинов 1/2, помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид:

$$\hat{H} = -(\mu_1\hat{\vec{\sigma}}_1 + \mu_2\hat{\vec{\sigma}}_2)\vec{H} + \lambda\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2.$$

Найти уровни энергии системы.

10. При определенных условиях сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами можно рассматривать как двухуровневую систему (кубит). В частности гамильтониан так называемого потокового кубита в базисе состояний кубита, соответствующих состояниям кольца с током, циркулирующих по часовой стрелке $|R\rangle$ и против нее $|L\rangle$, соответственно, может быть представлен в виде

$$H = -\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\varepsilon}{2}\sigma_x, \qquad (4.2)$$

где Δ – амплитуда туннелирования между состояниями $|R\rangle$ и $|L\rangle$, а ε – смещение (параметр, определяющий энергию взаимодействия кубита с внешним магнитным полем).

а) перейти в гамильтониане (4.2) к энергетическому базису $|g\rangle$ и $|e\rangle$, в котором гамильтониан диагонален. Здесь $|g\rangle$ и $|e\rangle$ – основное и первое возбужденное состояния кубита;

б) найти значения энергий этих состояний и переписать гамильтониан кубита в новом базисе;

в) найти связь базисов.

11. В квантовой информатике для организации сильной связи между джозефсоновскими сверхпроводящими кубитами используют так называемые пассивные элементы: конденсаторы и индуктивности. Под пассивными элементами подразумеваются элементы цепи, для которых резонансная частота намного больше, чем частота перехода между первым и вторым уровнями энергии кубитов. В результате при взаимодействии с кубитами пассивные элементы всегда будут оставаться в своем основном состоянии. В зависимости от типа кубита (зарядовый, фазовый или потоковый), а также типов используемых пассивных элементов, между соседними кубитами может быть реализовано прямое взаимодействие, аналогичное спиновому взаимодействию *XX-, YY-* или *ZZ-* типа. В первых двух случаях гамильтониан прямого взаимодействия кубитов обычно приводят к виду, аналогичному обычному диполь-дипольному взаимодействию атомов. В результате гамильтониан двух связанных идентичных сверхпроводящих кубитов в энергетическом базисе свободных кубитов $|g_1,g_2\rangle$, $|e_1,g_2\rangle$, $|g_1,e_2\rangle$, $|e_1,e_2\rangle$ можно представить в виде

$$H = \sum_{i=1}^{2}\hbar\omega_0\sigma_z^i + \hbar J(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_2^+\sigma_1^-)\,, \qquad (4.3)$$

а) найти собственные значения и собственные векторы гамильтониана (4.3);

б) выполнить те же действия для сверхпроводящих кубитов со связью *ZZ*- типа. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{2} \hbar\omega_0 \sigma_z^i + \hbar J \sigma_1^z \sigma_2^z .$$

12. Смешанное состояниедвухкубитной системы в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ дается статистическим оператором $\hat{\rho} = \sum_{i,j=1}^{4} \rho_{i,j} | c_i \rangle \langle c_j |$. Вычислите частичный след по переменным квазиспина 2:

$$\hat{\rho}^{(1)} = \mathrm{Tr}_2(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{2} \langle b_i | \hat{\rho} | b_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \rho_{i,j}^{(1)} | a_i \rangle \langle a_j | .$$

То есть вычислите четыре коэффициента $\rho_{i,j}^{(1)}$ в терминах $\rho_{i,j}$.

13. Рассмотрите чистое состояние $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|c_2\rangle - |c_3\rangle)$. Вычислите статистический оператор $\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Затем, вычислите частичный след $\hat{\rho}_\Psi^{(1)} = \mathrm{Tr}_2(\hat{\rho}_\Psi)$. Является результирующее состояние чистым или смешанным.

5. СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

5.1. Примеры решения задач

Задача 1. В классической оптике фаза электромагнитного поля не является величиной, которую можно непосредственно наблюдать, ее необходимо получить из совокупности измерений. Дирак впервые ввел представлении о фазе как о величине, соответствующей фазовому оператору. Он постулировал существование эрмитова оператора фазы $\hat{\varphi}$, сопряженного оператору числа фотонов $\hat{n}$

$$[\hat{n},\hat{\varphi}]=i \tag{5.1}$$

и что операторы уничтожения и рождения можно представить в полярной форме

$$\hat{a}=\exp(i\hat{\varphi})\sqrt{\hat{n}},\ \ \hat{a}^{\dagger}=\sqrt{\hat{n}}\exp(-i\hat{\varphi})\ . \tag{5.2}$$

Предложенный подход имеет ряд существенных недостатками. Во-первых, не определена операция действия оператора $\exp(i\hat{\varphi})$ на вакуумное состояние $|0\rangle$.

Очевидно, что состояние с хорошо определенным числом фотонов будет иметь неопределенность фазы больше, чем 2л. Это признак того, что коммутатор (1) не учитывает свойства периодичности фазы. Во-вторых, соотношения неопределенностей следует, что $\Delta n\Delta\varphi\geq 1/2$. Отсюда состояние с хорошо определенным числом фотонов будет иметь неопределенность фазы большую чем 2π . И, наконец, основная проблема с подходом Дирака заключается в том, оператор $\exp(i\hat{\varphi})$ не унитарный, а значит оператор фазы не является эрмитовым. Первый недостаток был устранен Л. Саскиндом и Дж. Глогоуэром, которые предложили использовать вместо (4.2)

$$\exp(i\hat{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{n}}}\hat{a}, \ \exp(-i\hat{\varphi}) = \hat{a}^{+}\frac{1}{\sqrt{1+\hat{n}}}. \qquad (5.3)$$

Можно получить, что $\exp(i\hat{\varphi})|\mathrm{e}^{i\varphi}\rangle = \mathrm{e}^{i\varphi}|\mathrm{e}^{i\varphi}\rangle$, где φ определено на интервале $[-\pi, \pi)$. В разложении по фоковским состояниям $|\mathrm{e}^{i\varphi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{in\varphi}|n\rangle$. Введенный оператор фазы также не является эрмитовым, так как $[\exp(i\hat{\varphi}), (\exp(i\hat{\varphi}))^{\dagger}] = |0\rangle\langle 0|$. Его собственные значения не ортогональны, их скалярное произведение можно определить как $\langle \mathrm{e}^{i\varphi}|\mathrm{e}^{i\varphi'}\rangle = (1+\mathrm{e}^{i(\varphi'-\varphi)})^{-1}$, однако они образуют полный набор

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\mathrm{e}^{i\varphi}\rangle\langle\mathrm{e}^{i\varphi}|\frac{d\varphi}{2\pi} = \hat{\mathrm{I}}.$$

Это свойство позволяет очень разумным образом определить распределение фазовых вероятностей для данного состояния $|\Psi\rangle$:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}|\langle\mathrm{e}^{i\varphi}|\Psi\rangle|^2. \qquad (5.4)$$

Данная функция очевидно положительна и нормализована $\int_{-\pi}^{\pi}P(\varphi)d\varphi = 1.$

Задача 2. Доказать, что для когерентных состояний выполняется соотношение (разложение единицы)

$$\pi^{-1}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{d}^2\alpha = \hat{I} \ \ (\ \mathrm{dI}m(\alpha) = |\alpha|\mathrm{d}|\alpha|\mathrm{d}\varphi \ (\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}).$$

Решение. Воспользуемся разложением когерентных состояний по полному набору фоковских состояний

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\,,\ \langle\alpha| = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{*m}}{\sqrt{m!}}|m\rangle\,.$$

Тогда
$$\pi^{-1}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\mathrm{d}^2\alpha =$$

$$=\pi^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\exp[i(n-m)\varphi]\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\frac{|\alpha|^{n+m+1}\,\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{n!m!}}\mathrm{d}|\alpha\|n\rangle\langle m| =$$

$$=\pi^{-1}2\pi\delta_{n,m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|\alpha|^{n+m+1}\,\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}}{\sqrt{n!m!}}\mathrm{d}|\alpha\|n\rangle\langle m| =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}\,\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}}{n!}\mathrm{d}|\alpha|^2|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \hat{I}\,.$$

Задача 3. Докажите следующие соотношения

$$\hat{a}^{\dagger}|\alpha\rangle\langle\alpha| = (\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha})|\alpha)\langle\alpha|,\ \ |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a} = (\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*})|\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

Решение: Во-первых, разложим $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ по состояниями с определенным числом частиц

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n,m}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n^1}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m|,$$

тогда получим

$$\hat{a}^{+}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{a}^{\dagger}\sum_{n,m}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n^1}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| =$$

$$=\sum_{n,m}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n+1)!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}(n+1)|n+1\rangle\langle m| =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\tau n=0}^{\infty}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n)!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}(n)|n\rangle\langle m|.$$

С другой стороны

$$(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha})|\alpha\rangle\langle\alpha| = (\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha})\sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| =$$

$$= \alpha^* \sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n^1}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m^1}}|n\rangle\langle m| - \alpha^* \sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| +$$

$$+ \sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\langle m| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}\, n\,|n\rangle\langle m|.$$

Заметим, что мы использовали $|\alpha|^2 = \alpha\alpha^*$. Также α и α^* считаются линейно независимы. Аналогично доказывается второе соотношение.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя (5.4), показать, что для фоковского состояния $|n\rangle$ мы имеем $P(\varphi) = 1/2\pi$. Таким образом, для фоковского состояния фаза полностью не определена.
2. Рассмотрите суперпозицию вакуумного состояния и состояния с 5 фотонами: $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |5\rangle)$. Вычислите среднее число фотонов в таком состоянии.
3.Найдите среднее число фотонов в состояниях

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|n\rangle + e^{i\phi}|n+1\rangle),\ |\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|n\rangle + e^{i\phi}|n+2\rangle).$$

4. Рассмотрите суперпозиционное состояние $|\psi_{01}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, где α и β – комплексные константы, удовлетворяющие соотношению $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Определим квадратурные омпоненты одномодового состояния как $\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2$ и $\hat{X}_1 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i$. Вычислите неопределенности квадратурных компонет $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$. Рассмотрите

частный случай вакуумного состояния. Могут ли неопределенности для рассматриваемого состояния быть меньше, чем для вакуумного состояния? Рассмотрите аналогичную проблему для $|\psi_{02}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2\rangle$.

5. Показать, что для одномодого поляризованного электромагнитного поля среднее значение напряженности электрического поля

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}(\hat{a}\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} - \hat{a}^+ e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})})$$

для фоковского состояния есть $\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0$, а

$$\langle n|\hat{E}^2|n\rangle = \frac{\pi\omega\hbar c^2}{V}(n+1/2)^2,\ \langle n|\Delta E|n\rangle = \sqrt{\frac{\pi\omega\hbar c^2}{V}}(n+1/2)\,.$$

6. Предположим, что состояние свободного электромагнитного поля в резонаторе в момент времени $t = 0$ есть

$$|\psi(0)\rangle = (1/\sqrt{2})(|n\rangle + e^{i\varphi}|n+1\rangle)\,,$$

φ – некоторая фаза. Найти временную волновую функцию поля $|\psi(t)\rangle$ для $t > 0$.

7. Рассмотрите двухмодовое электромагнитное поле с фоковским базисом $|n_1, n_2\rangle$, и соответствующим оператором a_1, действующим на моду 1 и a_2, действующим на моду 2.

а). Какова наиболее общая форма состояния $|\psi\rangle$ с общим числом фотонов, равным 2, т.е. для которого $(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)|\psi\rangle = 2|\psi\rangle$?

б). Среди всех двухфотонных состояний, найти состояния, для которых $a_1|\psi\rangle = a_2|\psi\rangle$.

8. Вместо пары неэрмитовых операторов (5.3) можно ввести пару эрмитовых операторов вида

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{1}{2}(\exp(i\hat{\varphi}) + \exp(-i\hat{\varphi})),\ \ \sin\hat{\varphi} = \frac{1}{2i}(\exp(i\hat{\varphi}) - \exp(-i\hat{\varphi}))\,.$$

Докажите соотношения

а) $\langle n-1|\cos\hat{\varphi}|n\rangle = \langle n|\cos\hat{\varphi}|n-1\rangle = \frac{1}{2}$;

б) $\langle n-1|\sin\hat{\varphi}|n\rangle = -\langle n|\sin\hat{\varphi}|n-1\rangle = \frac{1}{2}$;

в) $[\cos\hat{\varphi},\sin\hat{\varphi}] = \frac{1}{2i}\{\hat{a}^{+}(\hat{n}+1)^{-1}\hat{a}-1\}$;

г) $\langle n|[\cos\hat{\varphi},\sin\hat{\varphi}]|n\rangle = -\frac{1}{2i}\delta_{n,0}$;

д) $[\hat{n},\cos\hat{\varphi}] = -i\sin\hat{\varphi},\ [\hat{n},\sin\hat{\varphi}] = i\cos\hat{\varphi}$;

е) $\Delta n\Delta\cos\varphi \geq \frac{1}{2}|\langle\sin\varphi\rangle|,\ \Delta n\Delta\sin\varphi \geq \frac{1}{2}|\langle\cos\varphi\rangle|$.

9. В квантовой оптике можно ввести состояния с определенной фазой следующим образом:

$$|\varphi\rangle = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{s}\mathrm{e}^{in\varphi}|n\rangle, \qquad (5.5)$$

где $|n\rangle$ – фоковское состояние, покрывающие (s+1)-мерное пространство состояний Ψ. Состояние с нулевой фазой выбирается как состояние, в котором все фоковские состояния в разложении (5.5) имеют одинаковые веса. Предельный переход необходим для нормирования состояний. При использовании (5.5) сначала надо работать в (s + 1)-мерном пространстве Ψ (где *s* может быть сколь угодно большим), и только после того, как все физические величины (средние значения, дисперсии и т.п.) вычислены, переходить к пределу $s\to\infty$. Показать, что при $s\to\infty$

а) $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$;

б) $\langle\varphi|\cos\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \cos\varphi(1-\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}) = \cos\varphi$;

в) $\langle\varphi|\sin\hat{\varphi}|\varphi\rangle = \sin\varphi(1-\lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1}) = \sin\varphi$;

г) $\langle\varphi|\cos^2\hat{\varphi}|\varphi\rangle=\cos^2\varphi,\ \langle\varphi|^2\sin^2\hat{\varphi}|\varphi\rangle=\sin^2\varphi$.

Докажите соотношения для состояний с определенной фазой (5.5):

$$\langle\varphi|\hat{n}|\varphi\rangle=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}n=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2}s,$$

$$\langle\varphi|\hat{n}^2|\varphi\rangle=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}n^2=\lim_{s\to\infty}\frac{s(2s+1)}{6},\quad \frac{\Delta n}{\langle\varphi|\hat{n}|\varphi\rangle}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

10. Показать, что для одномодого поляризованного электромагниного поля среднее значение напряженности электрического поля

$$\vec{E}(\vec{r},t)=i\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}(\hat{a}\ e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}-\hat{a}^{\dagger}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}),$$

в состоянии с определенной фазой (5.5) имеет вид

$$\langle\varphi|\vec{E}|\varphi\rangle=-2\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}(\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\varphi)\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s+1}\sum_{n=0}^{s}(n+1)^{1/2}.$$

11. Д. Пегг и С. Барнетт при построении эрмитова оператора фазы исходили из существования состояний (5.5). При этом параметр φ в фазовом состоянии (5.5) может принимать любое действительное значение, но различимые фазовые состояния существуют для всех значений φ только в заданном интервале $[\varphi_0,\varphi_0+2\pi]$, где φ_0 – относительная фаза. Существует несчетное множество различных фазовых состояний даже в конечномерном пространстве состояний Ψ. Фазовые состояния образуют переполненный базис и не являются ортогональными. Однако можно показать, что состояния со значениями φ, отличающимися друг от друга на величину $2\pi/(s+1)$, умноженную на целое число, ортогональны. В результате можно ввести полный ортонормированный набор $s+1$ состояний

$$|\varphi_m\rangle=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{s}\mathrm{e}^{in\varphi_m}|n\rangle\ \ (m=0,1,...s),\tag{5.6}$$

где $\varphi_m = \varphi_0 + 2\pi m/(s+1)$ $(m = 0,1,...,s)$.

На основе ортонормированных фазовых состояний (5.6) можно построить эрмитов оператор фазы $\hat{\varphi}_{\text{PB}} = \sum_{m=0}^{s} \varphi_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$, удовлетворяющий уравнению $\hat{\varphi}_{\text{PB}} |\varphi_m\rangle = \varphi_m |\varphi_m\rangle$. Можно также ввести распределение вероятносте $P_m = |\langle\varphi_m|\psi\rangle|^2$ для любого состояния $|\psi\rangle$ в $\mathcal{H}_s$. В пределе $s \to \infty$ оператор $\hat{\varphi}_{\text{PB}}$ не сходится к какму-либо эрмитову оператору, но определяя $\varphi = \lim_{m,s\to\infty} \varphi_m$, мы имеем $P(\varphi) = \lim_{s,m\to\infty} [2\pi P_m/(s+1)]$.

Докажите следующие соотношения

а) $\exp(\pm\hat{\varphi}_{\text{PB}})|\varphi_m\rangle = \exp(\pm\varphi_m)|\varphi_m\rangle$;

б) $\exp(\pm\hat{\varphi}_{\text{PB}})|n\rangle = |n-1\rangle$ $(n > 0)$;

в) $\cos^2\hat{\varphi}_{\text{PB}} + \sin^2\hat{\varphi}_{\text{PB}} = 1$, $[\cos\hat{\varphi}_{\text{PB}}, \sin\hat{\varphi}_{\text{PB}}] = 0$;

г) $\langle n|\cos^2\hat{\varphi}_{\text{PB}}|n\rangle = \langle n|\sin^2\hat{\varphi}_{\text{PB}}|n\rangle = 1/2$;

д) $\langle n|\hat{\varphi}_{\text{PB}}|n\rangle = \varphi_0 + \langle n|\hat{\varphi}_{\text{PB}}|n\rangle$, $\langle n|\Delta\hat{\varphi}^2_{\text{PB}}|n\rangle = \pi^2/3$.

12. Определим когерентное состояние как собственное состояние для оператора уничтожения $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, где $|\alpha\rangle$ – произвольное комплексное число. Покажите, что

а) когерентное состояние может быть представлено через фоковские состояния в виде

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle;$$

б) вероятность обнаружить *n* фотонов в когерентном состоянии дается распределением Пуассона

$$P(n)=e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!};$$

в) среднее счисло фотонов $\langle\hat{n}\rangle=|\alpha|^2$, неопределенность

$\Delta\hat{n}=\sqrt{\langle\hat{n}\rangle}=|\alpha|$. Так, что $\Delta\hat{n}/\langle\hat{n}\rangle=1/|\alpha|=1/\sqrt{\langle\hat{n}\rangle}$.

13. Докажите, что когерентные состояния неортогональны, т.е.

$$\langle\alpha|\beta\rangle=exp[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha^*\beta)].$$

14. Показать, что для когерентных состояний $\langle x\rangle\sim\cos\omega t$ и $\langle p\rangle\sim\sin\omega t$ и волновой пакет не расплывается.

17. Доказать для оператора смещения

$$\hat{D}(\alpha)=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\exp(-\alpha^*\hat{a})$$

следующие свойства

$\hat{D}\dagger(\alpha)=\hat{D}^{-1}(\alpha)=\hat{D}(-\alpha)$ – унитарность,

$\hat{D}(\alpha)=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\exp(-\alpha^*\hat{a})$ – виковская форма,

$\hat{D}(\alpha)=\exp(|\alpha|^2/2)\exp(-\alpha^*\hat{a})\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\exp(-\alpha^*a)$ – я форма,

$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)=\exp[i\ \mathrm{I}m(\alpha\beta^*)]\hat{D}(\alpha+\beta)$ – закон композиции,

$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)=\hat{a}+\alpha,\ \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha)=\hat{a}^\dagger+\alpha^*$ – *смешения*

15. Показать, что среднее значение напряженности электрического поля для когерентного состояния

$$\langle\alpha|\hat{\vec{E}}|\alpha\rangle=\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}\vec{e}\left(\alpha e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+\alpha^*e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)=$$

$$=2\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}|\alpha|\vec{e}\sin\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi\right)=\vec{E}_0\sin\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi\right),$$

где $\vec{E}_0 = 2\sqrt{\frac{2\pi\omega\hbar c^2}{V}}|\alpha|\vec{e}$.

16. Рассмотрите одномодовое поле в нелинейной среде с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hbar[\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \lambda(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2].$$

а) какова временная эволюция поля для начального когерентного состояния $|\alpha\rangle$;

б) запишите состояние в момент времени $t = \pi/2\lambda$ в виде суммы двух когерентных состояний. Что это за состояние?

Подсказка: вначале рассмотрите состояния с четными и нечетными n *отдельно.*

17. В квантовой оптике рассматривается важный класс неклассических состояний поля, называемых возбужденными когерентными состояниями $|\alpha, m\rangle$, которые получаются в результате повторяющихся действий (m раз) оператора $\hat{a}^\dagger$ на когерентные состояния $|\alpha\rangle$. Найдите фотонную статистику $\mathrm{p}(n)$ для частного случая $m=1$.

18. Покажите, что классический ток, возбуждающий одну моду поля, резонансно генерирует когерентное состояние. Для этого рассмотрите эволюцию вакуумного состояния под действием гамильтониана

$$\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a + ig(t)\left(\beta^* a e^{i\omega t} - \beta a^\dagger e^{-i\omega t}\right),$$

где $g(t)$ – вещественная функция, а β – комплексное число.

19. Используя пакет Mathematica вычислите флуктуацию числа фотонов $\langle(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2\rangle$ для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

20. Рассмотреть одномодовое тепловое излучение со статистическим оператором $\hat{\rho} = Z^{-1}\exp(-\lambda\hat{a}^+\hat{a})$,

где $\lambda = \hbar\omega\beta$, $\beta = 1/(k_B T)$ - обратная температура и статистическая сумма $Z = Sp\left[e^{-\lambda a^\dagger a}\right] = \left[1-e^{-\lambda}\right]^{-1}$. Показать, что

а) среднее число тепловых фотонов есть $\bar{n} = e^{-\beta\hbar\omega}/(1-e^{-\beta\hbar\omega})$;

б) статистический оператор можно переписать в виде

$$\rho = \frac{1}{\bar{n}+1}\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^{a^\dagger a};$$

в) распределение по числу фотонов в тепловом состоянии как

$$p_n = \frac{1}{\bar{n}+1}\left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}\right)^{n};$$

г) средний квадрат числа фотонов $\overline{n^2} = 2\bar{n}^2 + \bar{n}$;

д) дисперсия числа фотонов $(\Delta n)^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$;

е) полагая $\langle n\rangle = 1$ построить график зависимости температуры T от частоты моды ω в диапазоне от радиочастот до рентгеновских лучей. Занята ли мода оптического диапазона (частота в видимом диапазоне) при комнатной температуре?

21. Покажите, что среднее значение оператора смещения $D(\alpha)$ для поля теплового источника определяется выражением $\langle D(\alpha)\rangle = \exp\left[-|\alpha|^2\left(\langle n\rangle + \frac{1}{2}\right)\right]$, где $\langle n\rangle$ – среднее число фотонов.

22. Рассмотрите смешанное состояние, описываемое статистическим оператором $\hat{\rho} = (1/2)(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ и чистое суперпозиционное состояние вида $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)$. Рассчитайте соответствующие фазовые распределения $\mathcal{P}(\phi)$ для двух состояний и сравните их.

23. Покажите, что для теплового состояния $\mathcal{P}(\phi) = 1/2\pi$.

24. Определим сжатые состояния $|\alpha,\zeta\rangle$ (α и ζ – комплексные числа) как результата последовательного действия на вакуумное состояние оператора сдвига $\hat{D}(\alpha)$ и оператора сжатия $\hat{S}(\zeta)=\exp[\frac{1}{2}(\zeta^*\hat{a}^2-\zeta\hat{a}^{+2})]$:

$$|\alpha,\zeta\rangle=\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle .$$

Покажите, что

а) оператор сжатия $\hat{S}(\zeta)$ преобразует операторы уничтожения и рождения согласно формулам:

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)=\hat{a}\cosh r-\hat{a}^\dagger e^{-i2\phi}\sinh r,$$

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\zeta)=\hat{a}^\dagger\cosh r-\hat{a}e^{i2\phi}\sinh r,$$

где $\zeta=re^{-i2\theta}$;

б) для сжатого состояния имеют место соотношения:

$\langle\hat{a}\rangle_\alpha^{(sq)}=\alpha,\langle\hat{a}^2\rangle_\alpha^{(sq)}=\alpha^2-\cosh r\sinh r\exp(i\theta),\langle\hat{N}\rangle_\alpha^{(sq)}=|\alpha|^2+\sinh^2 r;$

в) для сжатого состояния неопределенности повернутых квадратурных компонент

$$\hat{X}_1=\hat{T}_1(\phi)\hat{X}\hat{T}_1(-\phi)=\hat{X}\cos\phi+\hat{Y}\sin\phi,$$

$$\hat{Y}_1=\hat{T}_1(\phi)\hat{Y}\hat{T}_1(-\phi)=-\hat{X}\sin\phi+\hat{Y}\cos\phi,$$

имеют вид

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle_\alpha^{(sq)}=\{1+2\sinh r[\sinh r-\cosh r\cos(\theta-2\phi)]\}/4,$$

$$\langle(\Delta Y_1)^2\rangle_\alpha^{(sq)}=\{1+2\sinh r[\sinh r+\cosh r\cos(\theta-2\phi)]\}/4.$$

г) в частном случае, когда $\theta=2\phi$, имеют место соотношения

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle_\alpha^{(sq)}=1/4\exp(-2r),\langle(\Delta Y_1)^2\rangle_\alpha^{(sq)}=1/4\exp(2r)$$

6. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО ФЕРМИ

6.1. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотреть задачу об возбуждении гармонического осциллятора под действием электрического поля $E(t) = E_0 e^{-t^2/\tau^2}$, направленного вдоль оси колебаний. Гамильтониан системы

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eE_0 x e^{-t^2/\tau^2} .$$

Допустим, при $t \to -\infty$ осциллятор находится в основном состоянии осциллятора. Найти мы вероятность перехода в первое возбуждённые состояния при $t \to +\infty$.

Решение. Используя связь оператора координаты с операторами рождения и уничтожения, определяем отличные от нуля матричные элементы

$$V_{nm}(t) = -eE_0 \langle n | x | m \rangle e^{-t^2/\tau^2} = -\frac{eE_0 \sqrt{\hbar} e^{-t^2/\tau^2}}{\sqrt{2m\omega}} \begin{cases} \sqrt{n} & m = n-1, \\ \sqrt{n+1} & m = n+1. \end{cases}$$

Отсюда видно, что в первом порядке теории возмущений, вероятность перехода из основного в первое возбужденное состояние есть

$$P = \frac{1}{\hbar^2} \left| -\frac{eE_0 \sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\tau^2} e^{i\omega t} dt \right| = \frac{\pi \hbar (eE_0)^2 \tau^2}{2m\hbar\omega} e^{-\omega^2 \tau^2/2} .$$

Задача 2. Найти время спонтанного излучения двухуровневого атома в свободном пространстве.

Решение. Рассмотрим одиночный двухуровневый атом, взаимодействующий с квантовым электромагнитным полем. Представим гамильтониан такого атома в виде

$$H = H_0 + V,$$

где невозмущенный гамильтониан $H_0 = \hbar\omega_0\sigma_z + \sum_{\vec{k},\lambda}\hbar\omega_k a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}a_{\vec{k},\lambda}$ включает в себя энергию свободного двухуровневого атома и свободного поля, а оператор возмущения имеет вид

$$V = e/(mc)\vec{p}\vec{A} = \sum_{\vec{k}\lambda}\hbar g_k(\sigma_+ a_{\vec{k}\lambda}e^{i\vec{k}\vec{r}} + \sigma_- a^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}e^{-i\vec{k}\vec{r}}), \tag{6.1}$$

где $g_k = g_{\vec{k}\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega_k\hbar}}d\omega_0\vec{e}_\lambda\vec{e}_d$. В формуле (6.1) мы учли, что

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}}\{a_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} + a^{+}_{\vec{k},\lambda}\vec{e}_{\vec{k},\lambda}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)}\}$$

– векторный потенциал свободного электромагнитного поля (рамках теории возмущений мы будем считать оператор возмущений определеной функций времени), $\vec{k}$ – волновой вектор, λ – индекс поляризации и ω_k – частота. Поскольку мы имеем дело с одиночным атомом, то удобно совместить начало отсчета радиуса-вектора с ядром атома, тогда в выражении (6.1) мы можем положить $\vec{r} = 0$. Тогда гамильтониан возмущения принимает вид

$$V_1 = \sum_{\vec{k},\lambda}\hbar g_k(\sigma_+\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}^{+}_{\vec{k},\lambda}\sigma_-).$$

Выберем начальное состояние рассматриваемой системы. Пусть в начальный момент времени атом находится в возбужденном состоянии $|e\rangle$, а поле находится в многомодовом состоянии с определенным числом фотонов в каждой из мод $|\ldots,n_{\vec{k},\lambda},\ldots\rangle$.

Поскольку в начальный момент времени атом и поле не взаимодействовали, то $|\Psi_{нач}\rangle = |e\rangle\,|...,n_{\vec{k},\lambda},...\rangle.$

Предположим вначале, что атом испускает фотон с определенным направлением импульса $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ и поляризацией λ. Впоследствии мы усредним полученное выражение по всем направлениям вылета фотонов и их поляризациям. Тогда конечное состояние рассматриваемой системы $|\Psi_{кон}\rangle = |g\rangle\,|...,n_{\vec{k},\lambda}+1,...\rangle.$

Вероятность перехода из начального в конечное состояние за единицу времени будет определяться золотым правилом Ферми

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle\Psi_{кон}\,|V_1\,|\Psi_{нач}\rangle|^2\,\rho(E_{кон})\,\big|_{E_{кон}=E_{нач}}. \qquad (6.2)$$

Принимая во внимание соотношения $\sigma_+\,|e\rangle = 0, \quad \sigma_-\,|e\rangle = |g\rangle,$

$$\hat{a}^{\dagger}_{k'}\,|...,n_{k'},...,n_k,...\rangle = \sqrt{n_{k'}+1}\,|...,n_{k'}+1,...,n_k,...\rangle,$$

где $k \equiv (\vec{k},\lambda), k' \equiv (\vec{k}',\lambda')$ легко вычислить матричный элемент, входящий в формулу (6.2),

$$\langle\Psi_{кон}\,|V_1\,|\Psi_{нач}\rangle = \sum_{k'}\hbar g_{k'}\langle g\,|\,g\rangle\langle...,n_{k'},...,n_k+1,...\,|\,...,n_{k'}+1,...,n_k,...\rangle. \quad (6.3)$$

При записи формулы (6.3) мы для сокращения записей не учли временные экспоненциальные функции времени, входящие в оператор возмущений, так при вычислении вероятности нам придется взять матричные элементы по модулю в квадрате.
В формуле (6.3) имеем

$$\langle g\,|\,g\rangle = 1, \qquad \langle...,n_{k'},...,n_k+1,...\,|\,...,n_{k'}+1,...,n_k,...\rangle = \delta_{k,k'}.$$

Тогда вероятность перехода в единицу времени равна

$$\Gamma = 2\pi\hbar g_k^2(n_k+1)^2\rho(E_{кон}) \qquad (\textit{при условии } E_{кон} = E_{нач}). \quad (6.4)$$

Условие $E_{кон} = E_{нач}$ означает, что испускаться могут только фотоны, для которых $\hbar\omega_0 = \hbar\omega_{k_0}$, где $k_0 = \omega_0 / c$.

Ограничимся рассмотрением случая спонтанного излучения двухуровневого атома, т.е. будем полагать, что в начальный момент времени число фотонов в каждой из мод поля равно нулю $n_k = 0$. В этом случае формула (6) принимает вид

$$\Gamma = 2\pi\hbar g_k^2 \rho(E_{кон}) \qquad (E_{кон} = E_{ная}).$$

Рассчитаем теперь плотность числа конечных состояний системы по энергии $\rho(E_{кон})$. В результате испускания фотона атом переходит в определенное квантовое состояние $|g\rangle$. Тогда число возможных конечных состояний системы будет определяться числом конечных состояний электромагнитного поля. Число состояний поля с модулем волнового вектора в интервале ($k, k+dk$) и направлением волнового вектора, лежащим в телесном угле $d\Omega$, определяется формулой

$$dN_k = \frac{V}{(2\pi)^3} dk k^2 d\Omega, \text{ где } d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi .$$

Учитывая соотношение между импульсом и волновым вектором $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, мы можем записать число состояний поля с модулем импульса в интервале ($p, p+dp$) и направлением импульса, лежащим в телесном угле $d\Omega$, как $dN_p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} k^2 dk d\Omega.$

Соответственно, число состояний поля с энергией в интервале ($\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$) и направлением импульса в телесном угле $d\Omega,$ есть

$$dN_\varepsilon = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \varepsilon^2 d\varepsilon d\Omega, \qquad (\varepsilon = cp) .$$

Тогда плотность числа состояний поля по энергии есть

$$d\rho_\varepsilon = \frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3}\varepsilon^2 d\Omega\,. \tag{6.5}$$

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем для вероятности испускания в единицу времени фотона с направлением импульса в телесный угол $d\Omega$ и определенной поляризацией

$$d\Gamma = 2\pi\hbar\frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} g_{k_0}^2 \varepsilon_0^2 d\Omega\,, \tag{6.6}$$

где $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0,\quad k_0 = \omega_0 / c.$ Подставляя в (6.6) явный вид константы диполь-фотонного взаимодействия, получим

$$d\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3}(\vec{e}_d\vec{e}_\lambda)^2 d\Omega\,. \tag{6.7}$$

Усредним выражение (6.7) по всем возможным направлениям импульсов фотонов и всем возможным поляризациям:

$$\Gamma = \sum_{по\ поляризациям}\int\frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3}(\vec{e}_d\vec{e}_\lambda)^2 d\Omega. \tag{6.8}$$

Проведем вначале усреднение по поляризациям. Для этого нам необходимо вычислить сумму $\sum_{\lambda=1,2}(\vec{e}_d\vec{e}_\lambda)^2$.

Для каждого возможного направления волнового вектора или импульса фотона имеются две независимые поляризации $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. В плоскости перпендикулярной вектору $\vec{k}$ единичные векторы можно выбрать произвольным образом. Выберем базисные векторы поляризации $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ так, чтобы вектор $\vec{e}_1$ лежал в одной плоскости вектором $\vec{e}_d$, а вектор $\vec{e}_2$ был перпендикулярен этой плоскости (см. рис.). Тогда

$$\sum_{\lambda=1,2}(\vec{e}_d\vec{e}_\lambda)^2 = (\vec{e}_d\vec{e}_1)^2 + (\vec{e}_d\vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_d\vec{e}_1)^2 = \cos^2\psi = \sin^2\theta. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) в (6.8), получаем $\Gamma = \dfrac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3}\int \sin^2\theta d\Omega.$

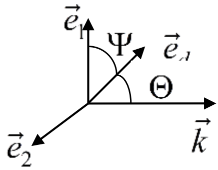

Рис. 1. Направления волнового вектора и векторов поляризаций испущенного фотона

Для вычисления интеграла в правой части выберем сферическую систему координат в $\vec{k}$ -пространстве так, чтобы ось z совпадала по направлению с вектором $\vec{e}_d$. Тогда угол θ будет представлять собой азимутальный угол выбранной системы координат. В результате имеем $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ и

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3\theta = \frac{d^2\omega_0^3}{2\pi\hbar c^3}\frac{8\pi}{3}.$$

Окончательно для вероятности испускания двухуровневым атомом в единицу времени фотона с произвольными направлением вылета и поляризацией есть $\Gamma = \dfrac{4d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}.$ Теперь мы можем выразить время спонтанного излучения атома $\dfrac{1}{\tau} = \Gamma = \dfrac{4d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}.$

6.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Во втором порядке теории возмущения в условиях задачи 1 найти вероятность перехода из основного начального состояния осциллятора в состояние $|2\rangle$.

2. На атом водорода, находившийся в состоянии 1s, подействовал импульс электрического поля $\vec{E}$ длительностью τ. В первом порядке теории возмущений найти вероятность перехода в $2p$ состояние .

3. На плоский ротатор с моментом инерции I и дипольным моментом d, находившийся в основном состоянии, подействовал импульс электрического поля $\vec{E}$ длительностью. Найти вероятность возбуждения ротатора. (Поле лежит в плоскости вращения ротатора). Рассчитать вероятность перехода из произвольного состояния $|m\rangle$ в другие состояния ротатора.

4. В условиях задачи 5 рассмотреть случаии, когда напряженность электрического поля меняется со временем по закону

а) $E(t) = E_0 e^{-t^2/\tau^2}$;

б) $E(t) = E_0 \dfrac{1}{1+t^2/\tau^2}$;

в) $E(t) = E_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t)$.

5. В условиях задачи 5 и 6 рассмотреть сферический ротатор. Начальное состояние ротатора $|l,m\rangle$. Поле направлено вдоль оси z.

6. Найти вероятность перехода между состояниями дискретного спектра под действием возмущения $\hat{V}(t) = \dfrac{\hat{V}_0}{2}(1+\dfrac{2}{\pi} arctg \dfrac{t}{\tau})$.

7. Система обладает только двумя стационарными состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ ($\hbar\omega_1 < \hbar\omega_2$). В момент времени $t = 0$, когда система находилась в основном состоянии, было включено не зависящее от времени возмущение W. Вычислить вероятность обнаружения системы в том или ином из ее возможных состояний в момент времени t.

8. Имеется та же самая двухуровневая система, что и в предыдущей задаче. В момент времени $t = 0$ включается периодическое

возмущение $W\cos(\omega t)$ (например, световая волна), частота которого почти совпадает с частотой, соответствующей разности энергии двух уровней. Вычислить вероятность обнаружения системы в том или ином из ее возможных состояний в момент времени t после включения периодического возмущения.

9. На заряженный осциллятор, находящийся в основном состоянии, внезапно наладывается однродное электрическое поле, направленное вдоль оси колебаний. Найти вероятность возбуждения различный состояний осциллятора после кключения поля.

10. Рассмотреть связанно-свободные переходы в атоме под действием внешнего электромагнитного поля. Пусть электрон находится в связанном состоянии в атоме с вектором состояния $|\psi_i\rangle$ и энергией E_i и взаимодействует с монохроматической линейно поляризованной световой волной. Если частота волны такова, что $\hbar\omega > |E_i|$, то электрон в соответствии с законом сохранения энергии при квантовых переходах (золотое правило Ферми) может поглотить фотон и перейти в непрерывный спектр. В этом случае говорят о фотоэффекте, или фотоионизации системы. Провести расчет сечения ионизации для 1S состояния электрона в атоме водорода. Волновые функции электрона в непрерывном спектре считать плоскими волнами в объеме квантования. В дипольном приближении оператор возмущения можно выбрать в виде резонансной (отрицательно частотной) части первого слагаемого *pA*-формулы $V(t) = \frac{e\vec{E}}{m\omega}\vec{p}\sin(\omega t) = \frac{e\vec{E}}{m\omega}\vec{p}e^{-i\omega t}$.

11. Рассмотреть модель *потенциала нулевого радиуса*, в которой начальная волновая функция единственного связанного состояния имеет вид $\psi_n(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{e^{-\kappa r}}{r}$, $\kappa = \sqrt{2m|E_0|/\hbar^2}$.

где $|E_0|$ энергия связи. Модель есть трехмерный аналог одномерной модели дельтаобразной ямы. Ее можно применять, например, для описания фотоотрыва электрона от отрицательного иона водорода ($|E_0|$ = 0.75$эВ$). Ввиду слабости связи конечное состояние электрона в непрырывном спектре считать плоской волной $\psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Найти полное сечение ионизации.

12. Рассмотреть систему, основное состояние которой описывается вектором состояния $|g\rangle$ и имеет энергию ε_0, а возбужденные состояния представляют собой квазинепрерывный набор состояний $|\mathrm{e}_k\rangle$, с энергиями ε_k. Плотность числа возбужденных состояний описывается функцией $D(\varepsilon)$ (число состояний в энергетическом интервале d_ε есть $D(\varepsilon)d_\varepsilon$). Система взаимодействует с зависящим от времени электромагнитным полем, так что ее гамильтониан можнозаписать в виде

$$H(t) = \varepsilon_0 |g\rangle\langle g| + \sum_k \varepsilon_k |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k| - \sum_k \frac{\hbar\Omega_{Rk}}{2}[\exp(i\omega t)|e_0\rangle\langle \mathrm{e}_k| + \exp(-i\omega t)|e_k\rangle\langle g|].$$

Начальное состояние системы в момент $t=0$ $|\psi(t=0)\rangle = |e_0\rangle$.

Состояние системы в момент времени t можно записать как

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{c}_0(t)|e_0\rangle + \sum_k \mathrm{c}_k(t)|\mathrm{e}_k\rangle;$$

а) Покажите, что вероятность $P(t)$ того, что система остается в начальном состоянии распадается примерно как

$$\frac{dP(t)}{dt} \approx -\gamma P(t),$$

где γ есть

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_k \left(\frac{h\Omega_{Rk}}{2}\right)^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_o - \hbar\omega) = \frac{2\pi}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{\hbar\Omega_R(\varepsilon)}{2}\right)^2 D(\varepsilon)\delta(\varepsilon - \varepsilon_0 - \hbar\omega) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}\left[\frac{\hbar\Omega_R(\varepsilon_0 + \hbar\omega)}{2}\right]^2 D(\varepsilon_0 + \hbar\omega).$$

13**.** Расчитать дифференциальное сечение для комптоновского рассеяния фотонов на свободных электронов. Рассмотреть случай поляризованного и неполяризованного излучения.

7. ДВУХУРОВНЕВЫЕ АТОМЫ В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

7.1. Примеры решения задач

Задача 1. Рассмотрим двухуровневую систему с вектором основного состояния $|g\rangle$ и возбужденного состояния $|e\rangle$. Частота перехода между состояниями $\omega_0 = (E_e - E_g)/h$. Частота перехода близка к частоте внешнего классического электромагнитного поля ω (рис. 1). Гамильтониан взаимодействия

$$\hat{H}^{(1)}(t) = \hat{V}_0 \cos\omega t\,, \tag{7.1}$$

где $\hat{V}_0 = -\hat{\mathrm{d}} \cdot \mathrm{E}_0$. Временной вектор состояния запишем как

$$|\psi(t)\rangle = C_g(t)e^{-iE_g t/\hbar}\,|g\rangle + C_e(t)e^{-iE_e t/\hbar}\,|e\rangle.$$

Из уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle\,,$$

где

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}^{(1)}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}_0\cos\omega t,$$

Мы получаем систему уравнений для амплитуд C_g и C_e:

$$\dot{C}_g = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{V}\cos\omega t e^{-i\omega_0 t}C_e\,,$$

$$\dot{C}_e = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{V}\cos\omega t e^{i\omega_0 t}C_g\,, \tag{7.2}$$

где $\mathcal{V} = \langle e | \hat{V}_0 | g \rangle = -\hat{\vec{\mathrm{d}}}_{eg} \cdot \mathrm{E}_0$, который можем взять действительным. В уравнениях (7.2) разложим $\cos\omega t$ согласно формулам Эйлера и оставим только те слагаемые, которые осциллируют на частоте $\omega_0 - \omega$:

$$\dot{C}_g = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{V}e^{i(\omega-\omega_0)t}C_e,$$

$$\dot{C}_e = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{V}e^{-i(\omega-\omega_0)t}C_e. \qquad (7.3)$$

При выводе уравнений (7.3) мы отбросили члены, которые осциллирующие на частоте $\omega_0 + \omega$, что соответствует так называемому приближению вращающейся волны. Исключая C_g, получаем для C_e:

$$\ddot{C}_e + i(\omega - \omega_0)C_e + \frac{1}{4}\frac{\mathcal{V}^2}{\hbar^2}C_e = 0. \qquad (7.4)$$

Будем искать решение (7.4) в виде $C_e(t) = e^{i\lambda t}$. С его помощью получаем решения характеристического уравнения в виде

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\{\Delta \pm [\Delta^2 + \mathcal{V}^2/\hbar^2]^{1/2}\},$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega$ - расстройка между частотой атомного перехода и частотой поля. Тогда общее решение уравнения (7.4) есть

$$C_e(t) = A_+ e^{i\lambda_+ t} + A_- e^{i\lambda_- t}. \qquad (7.5)$$

Предположим, что в начальный момент времени $C_g(t=0) = C_g(0)$ и $C_e(t=0) = C_e(0)$, $|C_e(0)|^2 + |C_g(0)|^2 = 1$. В этом случае коэффициенты в (7.5) имеют вид $A_{\pm} = \mp\frac{1}{2h}\mathcal{V}[\Delta^2 + \mathcal{V}^2/\hbar^2]^{-1/2}$.

Окончательно, решения уравнений (7.3) есть

$$C_e(t) = e^{\mathrm{i}\Delta t/2}[C_e(0)\cos\frac{\Omega_R t}{2} + \frac{\mathrm{i}}{\Omega_R}(\Delta C_e(0) - \Omega C_g(0))\sin\frac{\Omega_R t}{2}],$$

$$C_g(t) = e^{\mathrm{i}\Delta t/2}[C_g(0)\cos\frac{\Omega_R t}{2} - \frac{\mathrm{i}}{\Omega_R}(\Delta C_g(0) + \Omega C_e(0))\sin\frac{\Omega_R t}{2}], \quad (7.6)$$

где $\Omega = \mathcal{V}/\hbar$ и $\Omega_\mathrm{R} = [\Delta^2 + \Omega^2]^{1/2}$ – частота Раби.

В частности для начального ссояния, в котором атом находится в основном состоянии $C_g(0) = 1, C_e(0) = 0$ (7.6) имеем

$$C_e(t) = i\frac{\Omega}{\Omega_\mathrm{R}} e^{i\Delta t/2}\sin(\Omega_\mathrm{R} t/2),$$

$$C_g(t) = e^{i\Delta t/2}\{\cos(\Omega_\mathrm{R} t/2) - i\frac{\Delta}{\Omega_\mathrm{R}}\sin(\Omega_\mathrm{R} t/2)\}.$$

Вероятность того, что атом находится в возбужденном состоянии

$$P_e(t) = |C_e(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2}\sin^2(\Omega_\mathrm{R} t/2). \quad (7.7)$$

В случае точного резонансна $\Delta = 0$ получаем

$$P_e(t) = |C_e(t)|^2 = \sin^2(\mathcal{V}t/2\hbar).$$

Задача 2. Модель Джейнса-Каммингса описывает взаимодействие двухуровневого атома с одной модой поля полости. Эта модель была экспериментально реализована в резонаторной квантовой электродинамике атомов, ионов, спинов и сверхпроводящих цепей. Гамильтониан модели Джейнса-Каммингса в приближении RWA имеет вид

$$H = H_0 + H_\mathrm{int}, \quad (7.8)$$

$$H_0 = \hbar\omega\, a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z,, \; H_\mathrm{int} = \hbar g\,(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger),$$

где σ_+, σ_- и σ_Z – квазиспиновые операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям вида

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z\,,\ [\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-\,.$$

Запишите точное решение для модели Джейнса-Каммингса.

1. Метод амплитуд вероятностей.

Для нахождения временной эволюции системы удобно перейти в представление взаимодействия. Гамильтониан в этом представлении есь

$$V = e^{iH_0 t/\hbar} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t/\hbar}\,.$$

Используя соотношения

$$e^{i\omega a^\dagger a t} a e^{-i\omega a^\dagger a t} = a e^{-i\omega t},\ \ e^{i\omega \sigma_z t/2} \sigma_+ e^{-i\omega \sigma_z t/2} = a e^{-i\omega t},$$

получаем $V = H_{\text{int}} = \hbar g\ (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}),$ где $\Delta = \omega - \omega_0$.

Пусть двухуровневый атом в начальный момент времени находится в суперпозиции возбужденного $|\,e\rangle$ и основного $|\,g\rangle$ состояний, а поле находится в чистом состоянии вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(0)\,|\,n\rangle$, где $|\,c_n(0)\,|^2 = p_n$ – вероятность обнаружить при измерении в чистом полевом состоянии n фотонов. В любой момент времени t вектор состояния системы $|\,\psi(t)\rangle$ является линейной комбинацией состояний $|\,e, n\rangle$ и $|\,g, n\rangle$. Здесь $|\,e, n\rangle$ – состояние, в котором атом находится в возбужденном состоянии $|\,e\rangle$, а поле имеет $|\,n\rangle$ фотонов. Аналогично описывается состояние $|\,g, n\rangle$.

Тогда зависящий от времени вектор состояния можно представить в виде

$$|\,\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{e,n}(t)\,|\,e, n\rangle + c_{g,n}(t)\,|\,g, n\rangle],$$

где $c_{e,n}(t)=\{c_{e,n}(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2})-\frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})]-\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{b,n+1}(0)\sin(\frac{\Omega_n t}{2})e^{i\Delta t/2}$,

$$c_{b,n+1}(t)=\{c_{b,n+1}(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2})+\frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})]-\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}c_{a,n}(0)\sin(\frac{\Omega_n t}{2})e^{-i\Delta t/2}$$

и $\Omega_n^2=\Delta^2+4g^2(n+1)$.

Если атом находится первоначально в возбужденном состоянии $|e\rangle$, тогда $c_{a,n}(0)=c_n(0)$ и $c_{b,n+1}(0)=0$. Тогда мы получаем

$$c_{a,n}(t)=c_n(0)[\cos(\frac{\Omega_n t}{2})-\frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})]e^{i\Delta t/2},$$

$$c_{b,n+1}(t)=-c_n(0)\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}\sin(\frac{\Omega_n t}{2})e^{-i\Delta t/2}.$$

2. Картина Гейзенберга.

Временная зависимость атомных и полевых операторов имет вид

$$\sigma_-(t)=[\sigma_+(t)]^\dagger=e^{-ivt}e^{iCt}[(\cos\kappa t+iC\frac{\sin\kappa t}{\kappa})\sigma_-(0)-ig\frac{\sin\kappa t}{\kappa}a(0)],$$

$$a(t)=e^{-ivt}e^{iCt}[(\cos\kappa t-iC\frac{\sin\kappa t}{\kappa})a(\mathrm{O})-ig\frac{\sin\kappa t}{\kappa}\sigma_-(0)],$$

где операторы $C=\frac{1}{2}\Delta\sigma_z+g(\sigma_+a+a^\dagger\sigma_-)$, $\kappa=[\frac{\Delta^2}{4}+g^2(N+1)]^{1/2}$ и $N=a^\dagger a+\sigma_+\sigma_-$.

3. Оператор эволюции.

Оператор эволюции для резонансной модели Дженйса-Каммингса есть

$$U(t)=\cos(gt\sqrt{a^\dagger a+1})|e\rangle\langle e|+\cos(gt\sqrt{a^\dagger a})|g\rangle\langle g|-$$
$$-i\frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a+1})}{\sqrt{a^\dagger a+1}}a|e\rangle\langle g|-ia^\dagger\frac{\sin(gt\sqrt{a^\dagger a+1})}{\sqrt{a^\dagger a+1}}|g\rangle\langle e|.$$

7.2. Задачи для самостоятельного решения

1. Используя формулу (10), построить графики зависимости $P_e(t)$ для трех значений расстройки $\Delta = 0, \Delta = 0,5\Omega_R, \Delta = \Omega_R$.

2. Получите решение уравнений (6) для атома изначально находящегося в возбужденном состоянии, т.е. $C_g(0) = 0$ и $C_e(0) = 1$.

3. Используя результат задачи 1, получить зависящее от времени среднее значение оператора атомного дипольного момента $\hat{d} = d(\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-)$ для случая точного резонанса и атома, приготовленного изначально в основном и возбужденном состоянии. Сравните эволюцию дипольного момента с атомной инверсией для условия резонанса.

4. Во многих приложениях требуется точное измерение расстройки Δ. Этого можно достичь с помощью интерферометрической схемы Рамсея. Пусть при $t = 0$ атом находится в основном состоянии $|\, g\rangle$ и к атому приложен импульс электромагнитного поля длительностью τ. Затем атому дают возможность свободно эволюционировать в течение T секунд. После этого на атом подается еще один импульс продолжительностью τ. Покажите, что вероятность измерения атома в возбужденном состоянии сразу после второго импульса определяется выражением

$$P_e = 4\frac{\Omega^2}{\Omega_R^2}\sin 2(\frac{\Omega_R\tau}{2})[\cos(\frac{\Delta T}{2})\cos(\frac{\Omega_R\tau}{2}) - \frac{\Delta}{\Omega_R}\sin(\frac{\Delta T}{2})\sin(\frac{\Omega_R\tau}{2})]^2 .$$

В частном случае, когда $\Omega \gg \Delta$ и когда к атому приложена $\pi/2$ – импульс, т.е. импульс удовлетворяющий условию $\Omega\tau = \pi/2$, покажите, что вероятность обнаружить атом в возбужденном состоянии сразу после окончания действия второго испульса дается формулой $P_e \approx \frac{1}{2}(1+\cos\Delta T)$. Это соотношение, описывающее так называемые биения Рамзея, позволяет измерять Δ с точностью, пропорциональной времени T.

5. Покажите, что спектр модели Джейнса-Каммингса с гамильтонианом (7.8) имеет вид

$$E_{n,\pm}/\hbar = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2(n+1)}.$$

Найти одетые состояния для нерезонансной модели Джейнса-Каммингса.

6. Пусть в начальный момент времени атом находится в возбужденном состоянии, а поле в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Полагая $\Delta=0$, получить аналитическое выражение для вероятности обнаружить атом в возбужденном состоянии в произвольный момент времени $P(t)$. Построить графики зависимости вероятности $P(t)$ от приведенного времени gt lkz $|\alpha|^2=10$ и 100. Пронаблюдайте коллапсы и восстановления осцилляций Раби. Оцените аналитически время коллапсов и восстановлений осцилляций Раби.

7. В полностью квантованной модели Джейнса-Каммингса, точное резонансное решение для начального состояния, в котором атом возбужден, а поле находится в фоковском состоянии

$$|\psi(t)\rangle=\cos(\sqrt{n+1}\ gt)\,|e,n\rangle - i\sin(\sqrt{n+1}\ gt)\,|g,n+1\rangle\,.$$

Используйте это решение, чтобы получить среднее значение оператора атомного дипольного момента. Похожа ли временная эволюция дипольного момента атома на ту, что получена в квазиклассическом случае? Прокомментируйте результат.

8. Получите среднее значение дипольного момента атома, заданное моделью Джейнса-Каммингса, в случае, когда поле изначально находится в когерентном состоянии. Чем результат отличается от

предыдущего случая? Постройте график зависимости дипольного момента от времени.

9. Рассмотреть динамику модели Джейнса-Каммингса для нерезонансного случая. Получите графики атомной инверсии и обратите внимание на влияние ненулевой расстройки на коллапс и возрождение осцилляций Раби.

10. Рассмотреть резонансную модель Джейнса-Каммингса для начального теплового состояния. Предположить, что атом изначально находится в возбужденном состоянии. Проанализируйте коллапс осцилляций Раби и определите зависимость времени коллапса от среднего числа фотонов теплового поля. Постройте графики временной зависимости вероятности обнаружить атом в возбужденном состоянии для начального состояния атома в основном и возбужденном состоянии.

11. Рассмотрите динамику модели Джейнса Каммингса для больших расстроек, когда $\Delta \gg g$ (дисперсионный режим). Эффективный гамильтониан в рассматриваемом случае можно представить $\hat{H}_{eff} = \hbar\chi(\hat{\sigma}^{+}\hat{\sigma}^{-} + \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\sigma}_{z})$, где $\chi = g^{2}/\Delta$.

а) сравнить действие этого гамильтониана с действием резонансного гамильтониана $(\Delta = 0)$ модели Джейнса-Каммингса

$$H_{JC} = \hbar g\,(\sigma^{+}a + \sigma^{-}a^{\dagger});$$

б) пусть в начальный момент атом находится в возбужденном состоянии $|e\rangle$, а поле находится в фоковском состоянии $|n\rangle$. Сравните динамику моделей с гамильтонианом Дженйса-каммингса H_{JC} и гамильтониана H_{disp}. Покажите, что в дисперсионном режиме вектор состояния в любой момент времени представляет собой тензорное произвенение атомного и полевого вектора состояний;

в) пусть атом первоначально приготовлен в состоянии $(|e\rangle+|g\rangle)/\sqrt{2}$, а поле – в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти вектор состояния в мосент времени t в дисперсионном режиме;

г) используя пакет Mathematics, рассмотрите динамику модели с гамильтонианом H_{JC} для больших интенсивностей поля на временах порядка $gt \sim 1$.

12. Рассмотрите простую модель вырожденного рамановского рассеяния при условии $E_g = E_e$ (рис. 2) и описываемую гамильтонианом взаимодействия $\hat{H} = \hbar\lambda\hat{a}^{+}\hat{a}(\hat{\sigma}^{+} + \hat{\sigma}^{-})$, где как обычно $\sigma + = |e\rangle\langle g|$ и $\sigma_{-} = |g\rangle\,\langle e|$.

а) получите одетые состояния для этой модели;

б) предполагая, что поле в начальный момент поле находится в когерентном состоянии, а атом в основном состоянии, найти временное поведение атомной инверсии и покажите, что восстановление осцилляций Раби носит регулярный характер.

в) изучите динамику атомной инверсии для начального теплового состояния.

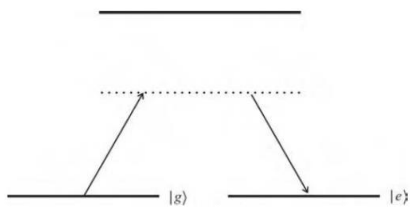

Рис. 2. Диаграмма уровней энергии вырожденного рамановского рассеяния: пунктирная линия представляет собой «виртуальный» промежуточный уровень далекий от резонанса

13. Двуфотонная резонансная модель Джейнса-Каммингса описывается эффективным гамильтонианом взаимодействия

$$\hat{H} = \hbar\lambda(\hat{a}^2\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^{+2}\hat{\sigma}^-).$$

а) получите одетые состояния для этой модели;

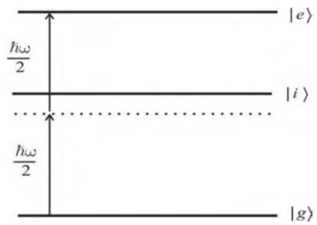

Рис. 3. Диаграмма уровней энергии для резонансного двухфотонного процесса. Состояния $|e\rangle$ и $|g\rangle$ имеют одинаковую четность, тогда как промежуточное состояние $|i\rangle$ имеет противоположную четность, пунктирная линия представляет собой виртуальный атомный уровень, отстроеный от состояния $|i\rangle$

б) предполагая, что поле в начальный момент поле находится в фоковском состоянии, а атом в основном состоянии, найти временное поведение атомной инверсии Исследовать коллапс и восстановление осцилляций Раби. Повторить расчеты для когерентного состояния;

в) изучите динамику атомной инверсии для начального теплового состояния.

14. Двухмодовая вариация резонансной двухфотонной модели описывается гамильтонианом взаимодействия

$$\hat{H} = \hbar\lambda(\hat{a}\hat{b}\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^+\hat{b}^+\hat{\sigma}^-).$$

Рассмотреть динамику атомной инверсии для случая, когда обе моды в начальный момент времени находятся в когерентном состоянии. Проанализируйте явления коллапса и восстановления осцилляций. Рассмотреть различные начальные состояния атома.

15. Модель, которую иногда рассматривают для изучения взаимодействия атома с полем в резонаторе без потерь, описывается гамильтонианом

$$H = \hbar\omega a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_Z + \hbar g[\sigma_+ a(a^{\dagger}a)^{1/2} + (a^{\dagger}a)^{1/2}a^{\dagger}\sigma_-],$$

в обычных обозначениях. Отметим, что взаимодействие зависит от интенсивности. Вычислите атомную инверсию и рассмотрите ее эволюцию на различных временных масштабах, т.е. на периоде осцилляций Раби, временах коллапса и временах возрождения для случаев, когда в начальных момент времени поле находится (а) в когерентном состоянии и (б) в тепловом состоянии.

16. Вычислите в дипольном приближении и приближении вращающейся волны инверсию населенности двухуровневого атома, взаимодействующего с одномодовым квантованным полем излучения, для произвольного времени t, при условии, что при $t = 0$ поле находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, а атом находится в состоянии| $|\psi\rangle_{\text{atom}} = (|e\rangle + e^{-i\phi)}|g\rangle)$. Обсудите условия, при которых населенности обоих состояний остаются «плененными».

17. Покажите, что для гамильтониана Джейнса–Каммингса имеет место интеграл движения $a^{+}\sigma^{-} + a\ \sigma^{+} = const$.

18. Найти оператор эволюции для нерезонансной модели Джейнса-Каммингса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лоудон, Р. Квантовая теория света / Р. Лоудон. – М.: Мир, 1976. – 488 с.
2. Шляйх, В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве / В.П. Шляйх – М.: Физматлит, 2005. – 780 с.
3. Скалли, М.О. Квантовая оптика / М.О. Скалли, М.С. Зубайри. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
4. Мандель, Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Л. Мандель, Э. Вольф. – М.: Физматлит, 2000. – 896 с.
5. Аллен, Л. Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли – М.: Мир, 1978. – 224 с.
6. Килин, С.Я. Квантовая оптика: поля и их детектирование / С.Я. Килин – М.: Едиториал УРСС, 2003. –176 с.
7. Башкиров, Е.К. Введение в квантовую оптику. Часть 1. / Е.К. Башкиров, А.В. Горохов – Самара: Самарский университет, 2013. – 74 с.
8. Башкиров Е.К., Горохов А.В. Когерентные процессы в квантовой оптике / Е.К. Башкиров, А.В. Горохов – Самара: изд-во СамНЦ РАН, 2014. – 142 с.
9. Андрианов Е.С., Виноградов А.П., Пухов А.А. Лекции по квантовой оптике / Е.С. Андрианов, А.П. Виноградов, А.А. Пухов – М.: МФТИ, 2018. – 226 с.
10. Киселев, А.П. Элементы квантовой оптики / А.Д. Киселев, Г.П. Мирошниченко – СПб.: Университет ИТМО, 2019. – 83 с.

11. Louisell, W.H. Quantum Statistical Properties of Radiation / W.H. Louisell. – New York: Willey-Interscience Publication, 1990. – 524 p.
12. Walls, D.F.Quantum Optics / D.F. Walls D.F., J.G. Milburn. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 425 p.
13. Gerry, C.C. Introductory Quantum Optics / C.C. Gerry, P.L. Knight P.L. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 317 p.

Учебное издание

Башкиров Евгений Константинович

КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Задачник

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 10.10.2024. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.
Тираж 27 экз. Заказ №   . Арт. – 3(Р23)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.