Инварианты на проективно-перестановочных классах эквивалентности фреймов Парсеваля

В.В. Севостьянова[1]
Самарский университет
berlua@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}^d$ — евклидово (унитарное) пространство размерности d над вещественным (соотв. комплексным) полем $\mathbb{F}$. Конечным фреймом в $\mathbb{H}^d$ называется набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $n \geqslant d$, для которого $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$, другими словами, конечный фрейм — это обобщение понятия базиса без свойства минимальности. Дадим другое определение.

Определение 1 Набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть фреймом, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Данные два определения эквивалентны, [1].

Фреймы находят широкое применение в анализе сигналов, обработке изображений, кодировании и восстановлении данных, квантовой теории информации и теории сжатых измерений.

В анализе традиционно выделяют ряд связанных с фреймами операторов. Оператором *синтеза* фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ называется $\mathbf{\Phi} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ — j-я координата $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Матрица оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ — $d \times n$-матрица, столбцами которой являются векторы фрейма. Оператором *анализа* называется оператор $\mathbf{\Phi}^* : \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$, $j = 1, \ldots, n$. Подробнее о фреймах см. [2].

Если $a = b$ в определении 1, то имеет место равенство $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\mathbf{I}$, и такие фреймы называются *a-жесткими*. 1-жесткие фреймы будем называть *фреймами Парсеваля*.

Введем на множестве фреймов различные классы эквивалентности. Например, в вещественном случае естественно отождествить те фреймы, которые совмещаются друг с другом в результате поворота.

Определение 2 Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, такое, что $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i$, $\forall i$.

[1]Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1456).

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются значениями скалярных произведений $\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle$, $i \leqslant j$.

Заметим, что класс унитарно эквивалентных фреймов зависит от порядка, в котором расположены векторы фрейма.

Определение 3 Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.

В работе [3] изучены инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля, в частности, найдены инварианты, разделяющие такие классы эквивалентности в общем положении.

Определение 4 Фреймы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$ и числа $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, для которых $\psi_i = \alpha_i\,\mathbf{U}\varphi_i$.

Заметим, что из унитарной эквивалентности не следует проективно унитарная эквивалентность. Инвариантами на проективно унитарных классах эквивалентности являются так называемые m-произведения, т.е. произведения вида

$$\Delta(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_m}) = \langle\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}\rangle\langle\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}\rangle \ldots \langle\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1}\rangle.$$

В работе [4] показано, что фреймы в $\mathbb{H}^d$ — проективно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают все их m-произведения.

Определение 5 Фреймы Парсеваля $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно-перестановочно унитарно эквивалентными*, если существуют унитарное $\mathbf{U}$, $\sigma \in S_n$ и числа $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, для которых $\psi_i = \alpha_i\,\mathbf{U}\varphi_{\sigma(i)}$.

В докладе пойдет речь об инвариантах на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности на фреймах Парсеваля. В частности, будут показаны регулярные функции, постоянные на таких классах, которые в общем положении разделяют проективно-перестановочно унитарные классы эквивалентности фреймов Парсеваля.

Список литературы

[1] O. Christensen. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston, Birkhäuser, 2002.

[2] S.F.D. Waldron. An Introduction to Finite Tight Frames. Boston, Birkhäuser, 2018.

[3] Севостьянова В.В. Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов. Математика и теоретические компьютерные науки, т. **1** (2023), вып. 3, 46–58.

[4] Abdollahi A., Najafi H. Frame Graphs.// Linear and Multilinear Algebra, v. **66** (2018), iss. 6, 2018, 1229–1243.

О характерах неприводимых представлений супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$

А.Н. Сергеев
Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
`sergeevan@info.sgu.ru`

Доклад основан на работе автора [1].

В докладе приводится новая формула для характеров конечномерных неприводимых представлений для супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m,n)$. Мы следуем схеме доказательства Су и Жанга [2] со следующими нововведениями. Во первых дается новое доказательство и новая формулировка гипотезы Ван Дер Югта, Ходжеса, Кинга и Терри-Мег. Далее используются весовые диаграммы и кэп диаграммы введенные Дж. Брандоном и К. Строппел. Затем определяется полиэдр связанный с весовой диаграммой. Характер неприводимого представления интерпретируется как производящая функция целых точек содержащихся в полиэдре. Для вычисления этой функции используется теорема Бриона.

Список литературы

[1] A.N. Sergeev. Combinatorics of irreducible characters for Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m,n)$. arXiv: `math.RT/2401.12534` (2024).

[2] Yucai Su, R.B. Zhang. Character and dimension formulae for general linear superalgebra. Adv. in Math. **211** (2007).