Идентификация параметров моделей дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами

А.В. Цыганов
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Ульяновск, Россия
andrew.tsyganov@gmail.com

Ю.В. Цыганова
Ульяновский государственный университет
Ульяновск, Россия
tsyganovajv@gmail.com

А.В. Голубков
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Ульяновск, Россия
kr8589@gmail.com

***Аннотация*—В работе рассмотрена задача идентификации параметров моделей дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Для ее решения построен квадратичный критерий идентификации в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия на основе величин, вычисляемых по алгоритму дискретной линейной фильтрации с учетом мультипликативных шумов в уравнениях состояния и измерения. Для минимизации критерия идентификации применялись методы условной численной оптимизации. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного решения.**

Ключевые слова—дискретные стохастические системы с аддитивными и мультипликативными шумами, параметрическая идентификация, квадратичный критерий идентификации, численные методы оптимизации

1. Введение

Дискретные стохастические системы с аддитивными и мультипликативными шумами рассматриваются при решении ряда практических задач, связанных с обработкой измерительной информации (например, задачи обработки изображений и сигналов, финансовой математики, задачи слежения и др.). Причины появления мультипликативных помех в системе могут иметь различную природу в зависимости от решаемой задачи, моделируемого объекта или процесса, например, это ошибки линеаризации, квантования, физические явления типа фединга и замирания в каналах связи, случайные нарушения в динамике системы или в датчиках, непосредственно сами ошибки моделирования.

Целью данной работы является разработка инструментального метода решения задачи идентификации параметров моделей дискретных стохастических системах с мультипликативными и аддитивными шумами на основе численной минимизации квадратичного критерия идентификации.

2. Постановка задачи

Рассмотрим инвариантную во времени дискретную линейную стохастическую систему:

$$\begin{cases} x_k = \left(F + \tilde{F}\xi_{k-1}\right)x_{k-1} + Gw_{k-1}, \\ z_k = \left(H + \tilde{H}\zeta_k\right)x_k + v_k, \quad k = 1,2,\dots, \end{cases} \tag{1}$$

в которой $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ и $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ – аддитивные шумы, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ и $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$ – мультипликативные шумы.

Алгоритмы дискретной фильтрации калмановского типа для рассматриваемых систем известны (см, например, [1,2,3]). Они позволяют вычислить линейные оптимальные оценки вектора состояния x_k по доступным измерениям z_i, $i = 1,\dots,k$.

Предположим, что матрицы, определяющие уравнения системы (1), зависят от неизвестного параметра θ. Поставим задачу их идентификации по доступным измерениям z_k. Обозначим через $\theta \in \Re^p$ вектор неизвестных параметров. Тогда величина ошибки оценивания $e_k = x_k - \hat{x}_k$ будет зависеть от значения параметра θ, которое задается в уравнениях алгоритма дискретной фильтрации. Минимальное значение ошибки e_k можно получить при условии минимума по θ квадратичного функционала

$$\mathcal{J}_k^o(\theta) = \mathbb{E}\left\{e_k^T(\theta)e_k(\theta)\right\}. \tag{2}$$

Проблема заключается в том, что функционал (2) не является инструментальным, то есть он не реализуем на практике, поскольку ошибки e_k недоступны прямому наблюдению. Наиболее популярным подходом к решению данной проблемы являются методы MPE (Minimum Prediction Error) [4], основанные на минимизации критерия идентификации, зависящего от наблюдаемой невязки измерений $\nu_k = z_k - H\hat{x}_k$. К таким критериям относятся хорошо известные критерии наименьших квадратов и максимального правдоподобия [5]. Альтернативным подходом является метод ВФК (вспомогательного функционала качества) [6].

Таким образом, алгоритм численной минимизации исходного функционала (2) по параметру θ заменяется на алгоритм численной минимизации выбранного инструментального критерия, которые является практически реализуемым.

3. Метод параметрической идентификации

Для решения задачи идентификации параметров системы (1) построим инструментальный критерий в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия:

$$\mathcal{J}_k(\theta) = \frac{Km}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\ln|B_k(\theta)| + \|\nu_k(\theta)\|^2_{B_k^{-1}(\theta)}\right\}, \tag{3}$$

значения которого при заданном θ будем вычислять с помощью дискретного фильтра калмановского типа [3].

Вычисление значения параметра θ в точке минимума критерия идентификации (3) выполним с помощью численного метода условной минимизации.

4. Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель почти равномерного прямолинейного движения объекта с мультипликативными шумами в объекте и измерителе:

$$\begin{cases} x_k = \left(\begin{bmatrix}1 & \theta\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xi_{k-1}\right)x_{k-1} + \begin{bmatrix}\theta^2/2\\ \theta\end{bmatrix}w_{k-1}, \\ z_k = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\zeta_k\right)x_k + v_k, \end{cases}$$

где $x_k=[x,\ v_x]_k^{\mathrm{T}}$, x – координата объекта v_x – скорость объекта, $x_0 \sim N([0,1]^{\mathrm{T}}, 10I_2)$, $w_k \sim N(0, 10^{-2})$, $v_k \sim N(0, I_2)$, $\xi_k \sim N(0, 10^{-4})$, $\zeta_k \sim N(0, 10^{-4})$, θ – параметр модели, подлежащий идентификации. Положим “истинное” значение параметра равным $\theta^* = 0.1$.

С целью подтверждения на практике работоспособности предложенного подхода к решению задачи параметрической идентификации в системе MATLAB проведена серия из 1000 численных экспериментов. В каждом эксперименте выполнена численная идентификация параметра θ по результатам 100 измерений. Для численной минимизации критерия (3) выбран метод fmincon из библиотеки MATLAB Optimization Toolbox. Поиск решения осуществлялся на отрезке [0; 1]. Результаты численной идентификации параметра θ приведены в таблице 1.

Таблица I. Результаты численной идентификации

Mean	RMSE	MAPE
0,0983	0,0112	8,8976

Здесь Mean – среднее значение оценок параметра θ, RMSE – корень из среднеквадратической ошибки оценивания, MAPE – средняя абсолютная ошибка в процентах. Данные таблицы I показывают, что численная минимизация критерия (3) позволила получить несмещенную оценку модельного параметра θ с приемлемой точностью (Mean ≈ θ^*, MAPE ≈ 8,9%).

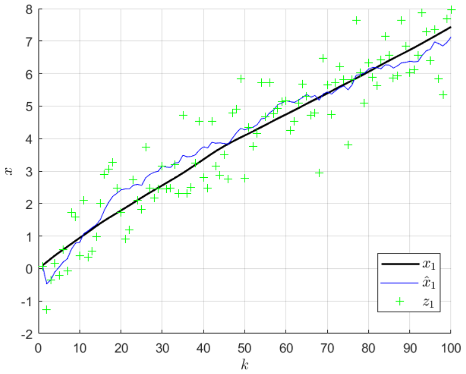

Рис. 1. Графики координаты *x*, ее оценки и измерений

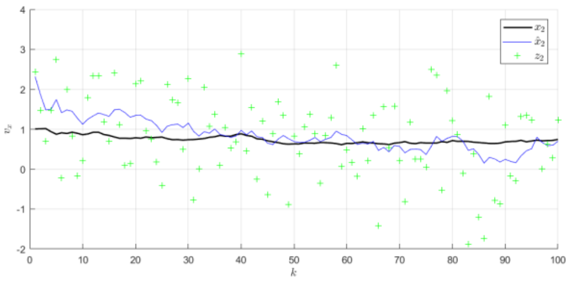

Рис. 2. Графики скорости v_x, ее оценки и измерений

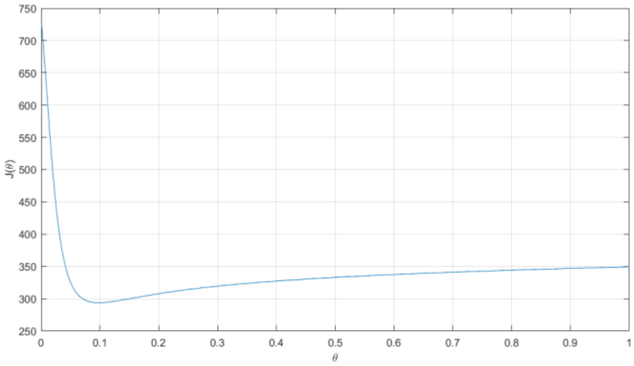

Рис. 3. График критерия идентификации

5. Заключение

В работе предложен инструментальный метод идентификации параметров моделей дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Построен квадратичный критерий идентификации (3) в форме отрицательной логарифмической функции правдоподобия на основе величин, вычисляемых по алгоритму дискретной линейной фильтрации с учетом мультипликативных шумов в уравнениях состояния и измерения. Минимизация критерия идентификации выполнена методом условной численной оптимизации fmincon системы MATLAB. На численном примере показана работоспособность предложенного решения.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–21–00387, https://rscf.ru/project/22-21-00387/.

Литература

[1] Yang, F. Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises / F. Yang, Z. Wang, Y. Hung // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2002. – Vol. 47(7). – P. 1179–1183. DOI: 10.1109/TAC.2002.800668.

[2] Wu, Y. Kalman filtering with multiplicative and additive noises / Y. Wu, Q. Zhang, Z. Shen // In: Proc. of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). – 2016. – P. 483–487. DOI: 10.1109/WCICA.2016.7578352.

[3] Tsyganov, A.V. UD-based Linear Filtering for Discrete-Time Systems with Multiplicative and Additive Noises / A.V. Tsyganov, J.V. Tsyganova, T.N. Kureneva // In: Proc. of the 19th European Control Conference (May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia). – 2020. – P. 1389–1394. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143804.

[4] Astrom, K.-J. Maximum Likelihood and Prediction Error Methods / K.-J. Astrom // Automatica. – 1980. – Vol. 16(5). – P. 551–574.

[5] Gibbs, B. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook / B. P. Gibbs. – Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2011. – 632 p.

[6] Semushin, I. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems—Survey and New Results IV: Seeking Minimum of API in Parameters of Data / I. Semushin, J. Tsyganova // International Journal of Communications, Network and System Sciences. – 2013. – Vol. 6(12). – P. 513-518. DOI: 10.4236/ijcns.2013.612055.