

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. В. СЕДЕЛЬНИКОВ, А. В. АЛЕКСЕЕВ

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 15.03.03 Прикладная механика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2024

УДК 531.01(075)+539.3(075)+517.97(075)

ББК В21я7+В251я7+В161.8я7

С284

Рецензенты: д-р техн. наук, доц. А. Н. Б о р м о т о в,

д-р техн. наук, доц. О. Л. С т а р и н о в а

Седельников, Андрей Валерьевич

С284

Основы вариационного исчисления в приложениях к задачам теоретической механики и механики деформируемого твёрдого тела: практикум / *А. В. Седельников, А. В. Алексеев.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024 – 100 с.: 12 ил.

ISBN 978-5-7883-2090-8

Проводится системный анализ вариационных задач применительно к теоретической механике и механике деформируемого твёрдого тела. Даны основные понятия теории вариационного исчисления. Рассматриваются различные методы решения вариационных задач. Приведены примеры решения задач теоретической, прикладной и небесной механики.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная механика» и «Механика и математическое моделирование», в рамках дисциплин, связанных с вариационным исчислением и выполнения выпускной квалификационной работы.

Разработан на кафедре теоретической механики.

УДК 531.01(075)+539.3(075)+517.97(075)

ББК В21я7+В251я7+В161.8я7

Оглавление

Введение	4
1 Основные понятия вариационного исчисления.....	5
1.1 Задача о брахистохроне	5
1.2. Понятие функционала. Непрерывность функционала.....	10
1.3. Вариация функционала.....	23
1.4. Экстремум функционала	28
2. Простейшая задача вариационного исчисления.....	34
2.1. Формулировка задачи	34
2.2. Уравнение Эйлера	35
2.3. Частные случаи уравнения Эйлера.....	38
2.4. Некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления	53
3. Достаточные условия экстремума функционала.....	62
3.1. Сильный и слабый экстремумы функционала	62
3.2. Поле экстремалей	63
3.3. Достаточные условия Вейерштрасса.....	74
3.4. Достаточные условия Лежандра.....	76
3.5. Возможность включения экстремали в поле экстремалей. Достаточное условие Якоби.....	86
3.6. Возможность включения экстремали в поле экстремалей. Усиленное достаточное условие Лежандра.....	89
4. Приложения вариационного исчисления к решению задач механики.....	93
4.1. Задача Эйлера	93
Заключение.....	98
Библиографический список	99

Введение

Настоящее учебное издание призвано заложить теоретические и практические основы для анализа вариационных задач, играющих важную роль в различных разделах механики: теоретической механике, механике деформируемого твёрдого тела, механике космического полёта. Вариационное исчисление является особым инструментом и требует отдельного основательного изложения.

Целью дисциплины является знакомство с основными понятиями и методами вариационного исчисления, а также выработка навыков постановки и решения конкретных задач.

В рамках данного практикума введены основные понятия вариационного исчисления, рассмотрена простейшая вариационная задача (задача с закреплёнными границами) с учётом некоторых обобщений этой задачи, изложены достаточные условия экстремума функционала Вейерштрасса и Лежандра. В конце практикума в качестве приложения к решению задач механики представлена задача Эйлера об определении критической силы при потере устойчивости однородного тонкого стержня при его сжатии. Каждый подраздел содержит примеры и задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов-бакалавров, обучающихся по направлениям, связанным с механикой и может быть рекомендовано в качестве начального материала для изучения основ вариационного исчисления.

1 Основные понятия вариационного исчисления

1.1 Задача о брахистохроне

Свой отсчёт вариационное исчисление ведёт с 1696 года. В июне этого года в журнале «Acta Eruditorum» было опубликовано письмо Ивана Бернулли, содержащее формулировку задачи о брахистохроне и предложение решить её лучшим математикам мира. Пусть даны две точки, принадлежащие некоторой вертикальной плоскости и не лежащие на одной горизонтали. По какой кривой тяжёлая материальная точка, всё время оставаясь в этой плоскости, скатится из верхней точки в нижнюю за наименьший промежуток времени?

Направим оси координат так, как показано на рисунке 1, совместив начальную точку с началом системы координат.

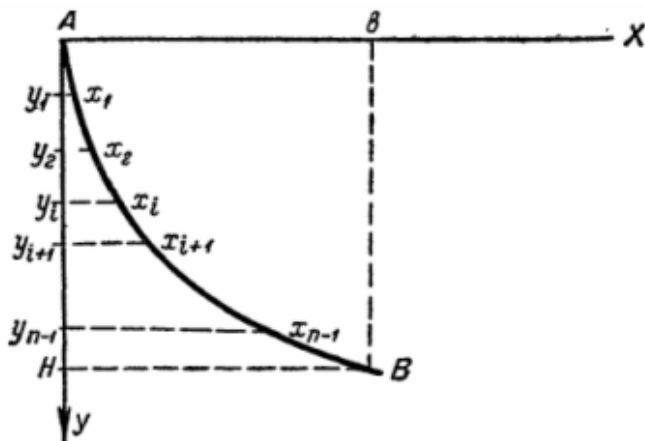


Рисунок 1 – К задаче о брахистохроне

Координаты второй точки B положим (b, H) . Предположим, что начальная скорость материальной точки в точке A была равна

нулю. Применим закон сохранения полной механической энергии, пренебрегая диссипативными силами, возникающими при движении материальной точки:

$$T + \Pi = \text{const} . \quad (1)$$

Будем считать, что $\Pi = 0$, когда материальная точка находится на оси Ax . В этом случае выражение (1) преобразуется к виду:

$$T + \Pi = 0 . \quad (2)$$

Исходя из рисунка 1, имеем:

$$\Pi = -mgy , \quad (3)$$

где m – масса материальной точки, а y – её текущая координата. Очевидно, что кинетическая энергия материальной точки определится выражением:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 , \quad (4)$$

где v – скорость материальной точки.

Подставляя (3) и (4) в (2) и сокращая массу материальной точки, имеем:

$$v = \sqrt{2gy} . \quad (5)$$

По определению скорость материальной точки:

$$v = \frac{ds}{dt} , \quad (6)$$

где ds – дифференциал дуги кривой, по которой движется материальная точка. Считая этот дифференциал бесконечно малым и заменяя его хордой, получим:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y_x'^2} . \quad (7)$$

Тогда, подставляя (7) в (6), имеем:

$$v = \frac{dx\sqrt{1 + y_x'^2}}{dt} , \quad (8)$$

Сравнивая (5) и (8), можно записать:

$$\frac{dx\sqrt{1+y_x'^2}}{dt} = \sqrt{2gy}. \quad (9)$$

Выражая из (9) явно dt и интегрируя в пределах от 0 до t по времени и от 0 до b по координате x , получим:

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y_x'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (10)$$

Теперь, чтобы решить задачу, необходимо сформулировать условия, при которых интеграл (10) имел бы минимальное значение. Здесь и наблюдается оригинальность данной задачи. Поскольку нужно подобрать такую функцию $y = y(x)$, которая доставит минимум интегралу (10). Это означает, что в задаче аргументом является не переменная величина, а функция.

Для решения задачи о брахистохроне разделим отрезок $АН$ (рисунок 1) на n равных частей и обозначим точки на искомой кривой координатами (x_i, y_i) . Если выбрать n достаточно большим, то дугу кривой можно приблизительно заменить хордой. Тогда дифференциал дуги приблизительно будет равен:

$$ds_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}. \quad (11)$$

Суммируем по всем участкам, разделив каждое слагаемое на $\sqrt{y_i}$:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{\sqrt{y_i}}. \quad (12)$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y_x'^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (13)$$

Интеграл (13) отличается от интеграла (10) лишь постоянным множителем $1/\sqrt{2g}$. Это отличие никак не отражается на поиске

минимума интеграла (10), дающего решение задачи о брахистохроне. Для того, чтобы сумма (12) была минимальна, потребуем минимум каждого слагаемого (11), входящего в эту сумму:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0. \quad (14)$$

Вычислим частные производные, учитывая, что переменная x_i будет дважды встречаться в сумме (12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = & \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \frac{1}{\sqrt{y_{i-1}}} - \\ & - \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} \frac{1}{\sqrt{y_i}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Или с учётом требований (14):

$$\begin{aligned} & \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \frac{1}{\sqrt{y_{i-1}}} = \\ & = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} \frac{1}{\sqrt{y_i}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что в (16) отношение $\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}$ представляет собой косинус угла наклона соответствующей хорды к оси AX . Обозначив этот угол через φ_i , перепишем выражение (16) в виде:

$$\frac{\cos \varphi_{i-1}}{\sqrt{y_{i-1}}} = \frac{\cos \varphi_i}{\sqrt{y_i}}. \quad (17)$$

Таким образом, сумма (12) имеет минимум, когда все соотношения (17) равны между собой. Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, имеем:

$$\frac{\cos \varphi}{\sqrt{y}} = C, \quad (18)$$

где C – константа, а φ – угол наклона касательной к оси AX .
Очевидно, что:

$$\operatorname{tg} \varphi = y'_x, \text{ а } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}}.$$

Используя это, преобразуем (18) к виду:

$$\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2_x} = C^*, \quad (19)$$

где $C^* = \frac{1}{C}$.

Для интегрирования (19) и решения задачи о брахистохроне сделаем замену переменных в дифференциальном уравнении (19):

$$y' = \operatorname{ctg} \psi; \quad \frac{1}{1 + y'^2_x} = \sin^2 \psi. \quad (20)$$

Преобразуем (19):

$$y = \frac{C^{*2}}{1 + y'^2_x} = C^{*2} \sin^2 \psi. \quad (21)$$

Тогда из (20) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \psi \Rightarrow dx = \operatorname{tg} \psi \, dy. \quad (22)$$

Из (21) путём взятия дифференциала от обеих частей равенства получим:

$$dy = 2C^{*2} \sin \psi \cos \psi \, d\psi. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), можно записать:

$$dx = 2C^{*2} \sin^2 \psi \, d\psi. \quad (24)$$

Интегрируя (24), получим:

$$x = C^{*2} \left(\psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) + C_1, \quad (25)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Обозначив $\theta = 2\varphi$, запишем уравнение искомой кривой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}C^{*2}(\theta - \sin \theta) + C_1; \\ y = \frac{1}{2}C^{*2}(1 - \cos \theta). \end{cases} \quad (26)$$

Уравнения (26) описывают циклоиду. Остаются две неизвестные константы C^* и C_1 . Для их определения необходимо использовать граничные условия, затребовав, чтобы найденная кривая проходила через две заданные точки: $A(0, 0)$ и $B(b, H)$.

Важную роль в становлении вариационного исчисления сыграли и другие классические задачи: задача о геодезической линии, задача Дидоны и задача о преломлении свет. Решение этих задач будет приведено далее после формулировки простейшей задачи вариационного исчисления.

1.2. Понятие функционала. Непрерывность функционала

Понятие функционала является обобщением понятия функция. Функция одной переменной $y = y(x)$ ставит в соответствие одной переменной величины x другую переменную величину y . Функция нескольких переменных $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где n – конечное число, ставит в соответствие конечной совокупности n переменных величин переменную величину y .

Если на некотором множестве (семействе) функций $y = y(x)$ каждой функции поставлено в соответствие некоторое число $V[y(x)]$, то говорят, что на этом множестве задан *функционал*.

Таким образом, бесконечному числу переменных (функции) $y = y(x)$ ставится в соответствие переменная величина V .

Основная задача вариационного исчисления может быть сформулирована как исследование функционала на экстремум и отыскание тех функций, на которых этот экстремум достигается.

Множество функций $y = y(x)$, на котором существует функционал $V[y(x)]$, называют *областью определения* функционала. «Точкой» для функционала является конкретная функция $y_1 = y_1(x)$. Поэтому следует ввести понятие расстояние между точками в линейном нормированном пространстве. Будем обозначать через $C[a, b]$ пространство функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$, а через $C^k[a, b]$ – пространство непрерывных функций, k раз непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a, b]$.

Расстояние между двумя точками-функциями $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ в пространстве $C[a, b]$ будем рассчитывать следующим образом:

$$\rho_C(y_1, y_2) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)|. \quad (27)$$

Формула (27) определяет метрику пространства $C[a, b]$. *Сильной окрестностью* кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ будем называть множество всех непрерывных кривых $y = y(x)$, находящихся в ε -окрестности кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, т.е. для которых справедливо:

$$\rho_C(y, \tilde{y}) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon. \quad (28)$$

Кривые $y = y(x)$, удовлетворяющие неравенству (28), называются *близкими* кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ в метрике $C[a, b]$. Также говорят, что между $y = y(x)$ и $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ имеет место *близость нулевого порядка*.

Расстояние между двумя точками – непрерывно дифференцируемыми функциями $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ в пространстве $C^1[a, b]$ будем рассчитывать следующим образом:

$$\rho_{C^1}(y_1, y_2) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1'(x) - y_2'(x)|. \quad (29)$$

Слабой окрестностью кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ будем называть множество всех непрерывно дифференцируемых кривых $y = y(x)$, находящихся в ε -окрестности кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, т.е. для которых справедливо:

$$\rho_{C^1}(y, \tilde{y}) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1'(x) - y_2'(x)| < \varepsilon. \quad (30)$$

Кривые $y = y(x)$, удовлетворяющие неравенству (30), называются близкими кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ в метрике $C^1[a, b]$. Также говорят, что между $y = y(x)$ и $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ имеет место близость первого порядка.

Аналогично формулам (27) и (29) вводится расстояние в пространстве $C^k[a, b]$ для функций k раз непрерывно дифференцируемых, а также аналогично неравенствам (28) и (30) вводится понятие близости k -го порядка.

Следует отметить, что сильная окрестность кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ содержит больше кривых $y = y(x)$, чем её слабая окрестность. Действительно, для попадания в сильную окрестность достаточно выполнение условия (28), т.е. чтобы сами кривые были близки друг к другу. Для попадания в слабую окрестность необходимо уже выполнения как минимум условия (30), которое требует не только близость самих кривых, но и их первых производных.

Функционал $V[y(x)]$ непрерывен на кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ в её сильной окрестности, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$|V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)]| < \varepsilon, \quad (31)$$

если

$$\rho_C(y, \tilde{y}) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \tilde{y}(x)| < \delta. \quad (32)$$

Функционал $V[y(x)]$ непрерывен на кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ в её слабой окрестности, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$|V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)]| < \varepsilon, \quad (33)$$

если

$$\rho_{C^1}(y, \tilde{y}) = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'_1(x) - y'_2(x)| < \delta. \quad (34)$$

Причём, если выполняются условия (31) и (32), то условия (33) и (34) будут выполнены автоматически. Те свойства, которыми обладает функционал $V[y(x)]$ в сильной окрестности кривой $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, он будет обладать и в её слабой окрестности.

Примеры

1. *Определение расстояния между функциями.*

1.1. Определить расстояние в пространстве $C[0, 2]$ между кривыми

$$y_1 = xe^{-x} \text{ и } y_2 = 0.$$

Для решения поставленной задачи будем использовать формулу (27). В нашем случае:

$$\rho_C(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 2} |xe^{-x} - 0| = \max_{0 \leq x \leq 2} |xe^{-x}|.$$

Для отыскания экстремума функции $y_1 = xe^{-x}$ найдём её производную и приравняем к нулю:

$$(y_1)'_x = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) = 0.$$

Откуда:

$$x_0 = 1.$$

На интервале $x \in [0, 2]$ функция $y_1 = xe^{-x}$ неотрицательна и имеет минимум в точке $x=0$ ($y(0)=0$). Значение $x_0=1$ принадлежит указанному интервалу. Следовательно, на интервале $x \in [0, 1]$

функция возрастает, а $x_0=1$ является точкой её максимума. Определяем максимальное значение $y_1 = xe^{-x}$ на интервале $x \in [0, 2]$:

$$\max_{0 \leq x \leq 2} \left| xe^{-x} \right|_{x=1} = \max_{0 \leq x \leq 2} \left| 1 \cdot e^{-1} \right| = e^{-1}.$$

Таким образом:

$$\rho_C(y_1, y_2) = e^{-1}.$$

1.2. Определить расстояние в пространстве $C^1[e, e^2]$ между кривыми $y_1 = \ln x$ и $y_2 = x^2$.

Для решения поставленной задачи будем использовать формулу (29). В нашем случае:

$$\rho_{C^1}(y_1, y_2) = \max_{e \leq x \leq e^2} \left| \ln x - x^2 \right| + \max_{e \leq x \leq e^2} \left| \frac{1}{x} - 2x \right|.$$

Рассмотрим сначала функцию $\ln x - x^2$. Её производная $\frac{1}{x} - 2x$ на интервале $x \in [e, e^2]$ отрицательна, следовательно, на этом интервале она монотонно убывает. Причём её экстремальные значения находятся на границах интервала: $\ln e - e^2 = 1 - e^2$ и $\ln e^2 - e^4 = 2 - e^4$. Поэтому:

$$\max_{e \leq x \leq e^2} \left| \ln x - x^2 \right| = -2 + e^4.$$

Далее рассмотрим функцию $\frac{1}{x} - 2x$. Её производная $-\frac{1}{x^2} - 2$ на интервале $x \in [e, e^2]$ также отрицательна, следовательно, на этом интервале она, как и первая функция, монотонно убывает. Граничные значения на концах интервала: $\frac{1}{e} - 2e$ и $\frac{1}{e^2} - 2e^2$.

Поэтому:

$$\max_{e \leq x \leq e^2} \left| \frac{1}{x} - 2x \right| = -\frac{1}{e^2} + 2e^2.$$

Таким образом:

$$\rho_{C^1}(y_1, y_2) = -2 + e^4 - \frac{1}{e^2} + 2e^2.$$

Задания для самостоятельного решения

1.3. Определить расстояние в пространстве $C[0, \pi]$ между кривыми $y_1 = \sin 2x$ и $y_2 = \sin x$.

1.4. Определить расстояние в пространстве $C[1, 2]$ между кривыми $y_1 = \frac{x-1}{x^2}$ и $y_2 = 2x$.

1.5. Определить расстояние в пространстве $C\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ между кривыми $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \operatorname{tg} x$.

1.6. Определить расстояние в пространстве $C[1, 3]$ между кривыми $y_1 = \frac{x}{x^2 - 2}$ и $y_2 = x^2 - 2x$.

1.7. Определить расстояние в пространстве $C\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ между кривыми $y_1 = \cos 2x$ и $y_2 = 3 - x$.

1.8. Определить расстояние в пространстве $C\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ между кривыми $y_1 = \frac{1}{\sin x}$ и $y_2 = \cos x$.

1.9. Определить расстояние в пространстве $C[0, \pi]$ между кривыми $y_1 = x \sin x$ и $y_2 = x - \sin x$.

1.10. Определить расстояние в пространстве $C[0, 1]$ между кривыми $y_1 = x^2 - x + 3$ и $y_2 = \frac{1}{x+2}$.

1.11. Определить расстояние в пространстве $C[0, 1]$ между кривыми $y_1 = \arcsin x$ и $y_2 = \pi x$.

1.12. Определить расстояние в пространстве $C[-1, 1]$ между кривыми $y_1 = x^3$ и $y_2 = \sin \pi x$.

1.13. Определить расстояние в пространстве $C[-1, 0]$ между кривыми $y_1 = \frac{x}{x-1}$ и $y_2 = x^2 + 2x + 3$.

1.14. Определить расстояние в пространстве $C[-\pi, \pi]$ между кривыми $y_1 = \sin 2x$ и $y_2 = \cos x$.

1.15. Определить расстояние в пространстве $C[0, 2\pi]$ между кривыми $y_1 = x - \sin x$ и $y_2 = x^2 + \sin x$.

2. Определение порядка близости.

2.1. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{1 - \cos nx}{n^2}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

Исследуем близость нулевого порядка, используя формулу (28):

$$\rho_C(y_n, \tilde{y}) = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{1 - \cos nx}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |1 - \cos nx| < \varepsilon.$$

Очевидно, что $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |1 - \cos nx| = 2$, поэтому имеем:

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon.$$

Это условие выполняется, если $n > \sqrt{2/\varepsilon}$. Для произвольного значения $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое значение n , чтобы выполнялось данное условие. Поэтому близость нулевого порядка наблюдается.

Исследуем близость первого порядка, используя формулу (30):

$$\begin{aligned}\rho_{C^1}(y, \tilde{y}) &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{1 - \cos nx}{n^2} - 0 \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{1 - \cos nx}{n^2} \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| = \frac{1}{n}$, поэтому имеем: $\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n} < \varepsilon$.

Это условие выполняется, если $n > 3/\varepsilon$. Для произвольного значения $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое значение n , чтобы выполнялось данное условие. Поэтому близость первого порядка наблюдается.

Исследуем близость второго порядка, используя формулу:

$$\begin{aligned}\rho_{C^2}(y, \tilde{y}) &= \\ &= \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1'(x) - y_2'(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y_1''(x) - y_2''(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned}\rho_{C^2}(y, \tilde{y}) &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{1 - \cos nx}{n^2} - 0 \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\cos nx - 0| = \\ &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{1 - \cos nx}{n^2} \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\cos nx| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Или с учётом очевидных максимальных значений тригонометрических функций:

$$\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 < \varepsilon.$$

Это неравенство не может быть выполнено при любых значениях $\varepsilon > 0$. Выберем $\varepsilon = 0,5$. Тогда должно быть: $\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 < 0,5$. Однако выражение, стоящее слева от знака неравенства, не меньше 1. Следовательно, условие не выполняется и близости второго порядка, как и более высокого порядка, не наблюдается.

Задания для самостоятельного решения

2.2. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\cos n^2 x}{n^3}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.3. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.4. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\cos n^3 x}{n}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.5. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\sin \sqrt{n} x}{n}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.6. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\cos nx - 1}{n + 2}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.7. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.8. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{1 - \cos \frac{x}{n}}{n}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.9. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.10. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{x}{n} \cos \frac{x}{\sqrt{n}}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.11. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\sin x}{\sqrt[4]{n}}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.12. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{\cos nx^2 - 1}{\sqrt{n} + 1}$ на интервале $x \in [0, 2\pi]$.

2.13. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{1}{n \sin x}$ на интервале $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.14. Определить порядок близости кривых: $\tilde{y} = 0$ и $y_n = \frac{1}{n^2 \cos x}$ на интервале $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

3. *Исследование непрерывности функционала.*

3.1. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 |y'_x| dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

Исследуем непрерывность функционала в сильной окрестности прямой $\tilde{y}(x)=0$. Выберем $\varepsilon=1/4$, а в качестве кривых сравнения

$y_n = \frac{\sin nx}{n}$, которые имеют близость нулевого порядка с прямой $\tilde{y}(x)=0$. Очевидно, что $y'_n = \cos nx$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] &= \int_0^1 |\cos nx| dx \geq \int_0^1 \cos^2 nx dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2n}{4n}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при любом n $\frac{1}{2} - \frac{\sin 2n}{4n} > \varepsilon = \frac{1}{4}$. При этом:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_C(y_n, \tilde{y}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| = 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)]\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2n}{4n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, функционал является разрывным в сильной окрестности прямой $\tilde{y}(x)=0$.

Исследуем непрерывность функционала в слабой окрестности прямой $\tilde{y}(x)=0$. Для этого выберем в качестве кривых сравнения

$y_n = \frac{\sin nx}{n^2}$, которые имеют близость первого порядка с прямой

$\tilde{y}(x)=0$. Производная $y'_n = \frac{\cos nx}{n}$. Имеем:

$$\begin{aligned} V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] &= \int_0^1 \left| \frac{\cos nx}{n} \right| dx \geq \frac{1}{n} \int_0^1 \cos^2 nx dx = \frac{1}{2n} \int_0^1 (1 - \cos 2nx) dx = \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n} - \frac{\sin 2n}{4n^2}. \end{aligned}$$

Теперь наблюдается совершенно другая картина:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{C^1}(y_n, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\sin nx}{n^2} - 0 \right| + \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\cos nx}{n} - 0 \right| \right\} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\sin 2n}{4n^2} \right) = 0.$$

Таким образом, выполняются условия (33) и (34), следовательно, функционал непрерывен в слабой окрестности прямой $\tilde{y}(x) = 0$.

Задания для самостоятельного решения

3.2. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (y + 2y'_x) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.3. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y'^2_x dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.4. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 xy^2 dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.5. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (x + x^2 y) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.6. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2_x} dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.7. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y^2} dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = x^2$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.8. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (xy + x^2) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = x$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.9. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 x(y + y'_x) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = x$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.10. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y''_x dx$

на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой окрестностях.

3.11. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (y + y''_x) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = 0$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.12. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (x + y''_x) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = x^2$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.13. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 (y'_x + y''_x) dx$ на прямой $\tilde{y}(x) = x^3$ в её сильной и слабой

окрестностях.

3.14. Исследовать на непрерывность функционал $V[y(x)] = \int_0^1 xy'_x dx$

на прямой $\tilde{y}(x) = x$ в её сильной и слабой окрестностях.

1.3. Вариация функционала

Функционал $V[y(x)]$ называется линейным функционалом $L[y(x)]$, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$L[Cy(x)] = CL[y(x)], \quad (35)$$

где C – произвольная постоянная;

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]. \quad (36)$$

Рассмотрим функционал $V[y(x)]$. Зафиксируем функцию $y_0 = y_0(x)$ из области определения функционала $V[y(x)]$. Представим любую другую функцию $y = y(x)$ из этой области как $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$. Изменение аргумента функционала $\delta y(x)$ будем называть *вариацией аргумента* в точке $y_0 = y_0(x)$. *Приращением* функционала $V[y(x)]$ в точке $y_0 = y_0(x)$, соответствующим вариации аргумента $\delta y(x)$, называется величина:

$$\Delta V \equiv \Delta V[y_0(x)] = V[y_0(x) + \delta y(x)] - V[y_0(x)]. \quad (37)$$

Определение приращения функционала (37) полностью аналогично определению приращения функции. Рассмотрим далее два определения вариации функционала.

1. Допустим, что приращение функционала (37) может быть представлено в виде:

$$\Delta V = L[y(x), \delta y(x)] + \beta[y(x), \delta y(x)] \cdot \max |\delta y(x)|, \quad (38)$$

где $L[y(x), \delta y(x)]$ – линейный по отношению $\delta y(x)$ функционал, обладающий свойствами (35), (36), а $\lim_{\max |\delta y(x)| \rightarrow 0} \beta[y(x), \delta y(x)] = 0$.

Тогда линейная часть приращения $L[y(x), \delta y(x)]$ называется *вариацией функционала* $V[y(x)]$ и обозначается δV . Данное

определение полностью аналогично определению дифференциала функции.

2. Зафиксируем аргумент $y = y(x)$ функционала $V[y(x)]$. Зададим и зафиксируем вариацию этого аргумента $\delta y(x)$. Рассмотрим теперь семейство кривых $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y(x)$, где α – некоторый произвольный параметр. Допустим, что существует производная $\frac{dV(\alpha)}{d\alpha}$. Тогда вариацией функционала $V[y(x)]$ называется следующее выражение:

$$\delta V = \left. \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] \right|_{\alpha=0}. \quad (39)$$

Строго говоря, эти определения не равнозначны. Если существует вариация в смысле выделения главной линейной части приращения (38), то вариация в смысле производной по параметру при нулевом его значении тоже существует. Это легко доказать.

$$\frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{V[y(x) + \alpha \delta y(x)] - V[y(x)]}{\alpha}. \quad (40)$$

С учётом (38) производную (40) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y(x), \alpha \delta y(x)] + \beta[y(x), \alpha \delta y(x)] \cdot |\alpha \delta y(x)|}{\alpha}. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее используем свойство (35) линейного функционала:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha L[y(x), \delta y(x)] + \alpha \beta[y(x), \alpha \delta y(x)] \cdot |\delta y(x)|}{\alpha} = L[y(x), \delta y(x)]. \end{aligned} \quad (42)$$

Однако обратное утверждение не всегда является верным. Существуют функционалы, из приращения которых нельзя

выделить главную линейную часть, но вариация в смысле производной по параметру при нулевом его значении существует. Поэтому второе понятие вариации шире первого.

Например, найдём вариацию функционала

$$V[y(x)] = \int_0^1 \sqrt[3]{y^3(x) + y_x'^3(x)} dx, \text{ считая при этом, что } y(x) \equiv 0. \text{ Тогда,}$$

используя второе понятие, имеем:

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \sqrt[3]{[y(x) + \alpha \delta y(x)]^3 + [y_x'(x) + \alpha \delta y_x'(x)]^3} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $y(x) = y_x'(x) \equiv 0$, то имеем:

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \sqrt[3]{[\alpha \delta y(x)]^3 + [\alpha \delta y_x'(x)]^3} dx = \frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \int_0^1 \sqrt[3]{[\delta y(x)]^3 + [\delta y_x'(x)]^3} dx \right) = \\ &= \int_0^1 \sqrt[3]{[\delta y(x)]^3 + [\delta y_x'(x)]^3} dx. \end{aligned}$$

Однако главная линейная часть приращения в этом случае не выделяется, действительно, вариация нелинейна относительно $\delta y(x)$.

Примеры

4.1. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_0^1 (y^2(x) + y_x'^2(x)) dx$.

Первый способ с использованием формулы (37):

$$\begin{aligned} \Delta V &= V[y_0(x) + \delta y(x)] - V[y_0(x)] = \\ &= \int_0^1 [(y(x) + \delta y(x))^2 + (y_x'(x) + \delta y_x'(x))^2] dx - \int_0^1 (y^2(x) + y_x'^2(x)) dx = \\ &= \int_0^1 [2(y(x)\delta y(x) + y_x'(x)\delta y_x'(x)) + (\delta y(x))^2 + (\delta y_x'(x))^2] dx = \\ &= 2 \int_0^1 (y(x)\delta y(x) + y_x'(x)\delta y_x'(x)) dx + \beta[y(x), \delta y(x)] \delta y(x). \end{aligned}$$

Причем $\lim_{\max |\delta y'(x)| \rightarrow 0} \beta[y(x), \delta y(x)] = 0$, поэтому:

$$\delta V = L[y(x), \delta y(x)] = 2 \int_0^1 (y(x) \delta y(x) + y'(x) \delta y'(x)) dx.$$

Второй способ с использованием формулы (39):

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 [(y(x) + \alpha \delta y(x))^2 + (y'_x(x) + \alpha \delta y'(x))^2] dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= 2 \int_0^1 [(y(x) + \alpha \delta y(x)) \delta y(x) + (y'_x(x) + \alpha \delta y'(x)) \delta y'(x)] dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= 2 \int_0^1 (y(x) \delta y(x) + y'(x) \delta y'(x)) dx. \end{aligned}$$

Результаты обоих способов совпадают.

4.2. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx$.

Согласно второму способу с использованием формулы (39):

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{d}{d\alpha} V[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, y(x) + \alpha \delta y(x), y'_x(x) + \alpha \delta y'(x)) dx \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}$$

Поскольку:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha} F(x, y(x) + \alpha \delta y(x), y'_x(x) + \alpha \delta y'(x)) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d(y + \alpha \delta y)}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d(y' + \alpha \delta y')}{d\alpha} = \\ &= \frac{\partial F(x, y(x) + \alpha \delta y(x), y'_x(x) + \alpha \delta y'(x))}{\partial y} \delta y + \\ &+ \frac{\partial F(x, y(x) + \alpha \delta y(x), y'_x(x) + \alpha \delta y'(x))}{\partial y'} \delta y'. \end{aligned}$$

Имеем, меняя местами дифференцирование и интегрирование:

$$\delta V = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

Предположим, что все кривые сравнения функционала

$$V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx \quad \text{подчинены ещё дополнительным}$$

условиям: $y(a) = A; y(b) = B$. Это означает, что

$\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \\ &= \left| \begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad u' = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad v = \delta y \\ dv &= \delta y' dx = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) dx = \frac{d(\delta y)}{dx} dx = d(\delta y) \end{aligned} \right| = \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta y \Big|_a^b = 0$ ввиду того, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, окончательно получим:

$$\delta V = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y dx. \quad (43)$$

Задания для самостоятельного решения

4.3. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b y y'_x dx$.

4.4. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (y + x) dx$.

4.5. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (xy + y'_x) dx$.

- 4.6. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b y'_x \sin y \, dx$.
- 4.7. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (\cos y + xy'_x) \, dx$.
- 4.8. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{y}{x} + \frac{y'_x}{x^2} \right) dx$.
- 4.9. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (y \cos x + y'^2_x) \, dx$.
- 4.10. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (y^2 + y'_x \sin x) \, dx$.
- 4.11. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (y^2 + y'^2_x x) \, dx$.
- 4.12. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b (y^2 + y'_x x^2) \, dx$.
- 4.13. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b y^2 y'_x \, dx$.
- 4.14. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b y y'^2_x \, dx$.
- 4.15. Найти вариацию функционала: $V[y(x)] = \int_a^b y^2 y'^2_x \, dx$.

1.4. Экстремум функционала

Говорят, что функционал $V[y(x)]$ достигает локального экстремума на кривой $y = \tilde{y}(x)$ в линейном нормированном пространстве, если в этом пространстве существует такая ε -окрестность кривой $y = \tilde{y}(x)$, что для любой другой кривой $y = y(x)$ из этой окрестности справедливо одно из неравенств:

$$V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] \geq 0. \quad (44)$$

$$V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] \leq 0. \quad (45)$$

В случае удовлетворения неравенства (44) говорят о *минимуме* функционала, в случае удовлетворения неравенства (45) – о *максимуме* функционала.

Если размер ε -окрестности ограничен, то экстремум функционала является *локальным*, если не ограничен, – то *глобальным*.

Если условия (44) или (45) выполняются в сильной ε -окрестности кривой $y = \tilde{y}(x)$, то имеет место *сильный экстремум*, если речь идёт о слабой ε -окрестности кривой $y = \tilde{y}(x)$, то экстремум является *слабым*.

Рассмотрим необходимое условие экстремума функционала. Пусть на некоторой кривой $y = \tilde{y}(x) \in E$ достигается экстремум функционала $V[y(x)]$ и существует вариация функционала δV . Тогда выполняется условие:

$$\delta V[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = 0 \quad (\forall \delta y(x)). \quad (46)$$

Условие (46) является необходимым, но не достаточным, поэтому утверждение о том, что, если выполняется (46) на некоторой кривой $y = \tilde{y}(x) \in E$, то в общем случае это не означает, что на этой кривой достигается экстремум функционала $V[y(x)]$.

Примеры

5.1. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} y_x'^2(x) [1 - y^2(x)] dx$ на экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(-\pi) = y(\pi) = 0$.

Пусть $y = y(x)$ – некоторая произвольная функция, имеющая непрерывную производную первого порядка, близкая в смысле

близости нулевого порядка прямой $y_0(x) \equiv 0$. Таким образом, существует такое $\varepsilon > 0$, что $|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ для $x \in [-\pi, \pi]$. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда для всех кривых $y = y(x)$ из ε -окрестности $y_0(x) \equiv 0$ будет справедливо неравенство:

$$|y(x)| < 1 \Rightarrow 0 \leq y^2(x) < 1 \Rightarrow 1 - y^2(x) > 0.$$

Очевидно, что на прямой $y_0(x) \equiv 0$ $V[y_0(x)] = 0$. Следовательно:

$$V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} y_x'^2(x) [1 - y^2(x)] dx \geq 0.$$

Таким образом, выполнено условие (44) в сильной окрестности прямой $y_0(x) \equiv 0$. Следовательно на прямой $y_0(x) \equiv 0$ функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} y_x'^2(x) [1 - y^2(x)] dx$ имеет сильный минимум.

5.2. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} y^2(x) [1 - y_x'^2(x)] dx$ на экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

Очевидно, что на прямой $y_0(x) \equiv 0$ $V[y_0(x)] = 0$. Следовательно:

$$V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_0^{\pi} y^2(x) [1 - y_x'^2(x)] dx.$$

Знак приращения зависит от знака скобки: $[1 - y_x'^2(x)]$. Следовательно, близости нулевого порядка недостаточно, чтобы выполнялось одно из условий (44) или (45). Выберем в качестве кривых сравнения семейство $y = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Кривые этого семейства имеют близость нулевого порядка, но не имеют близости первого порядка относительно прямой $y_0(x) \equiv 0$. Тогда:

$$\begin{aligned}
V[y(x)] - V[y_0(x)] &= \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx [1 - n \cos^2 nx] dx = \\
&= \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx dx - \int_0^\pi \sin^2 nx \cos^2 nx dx = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nx dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 2nx dx = \\
&= \frac{1}{2n} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx) dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 - \cos 4nx) dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

При $n > 4$ $V[y(x)] - V[y_0(x)] < 0$. С другой стороны, для кривых сравнения, удовлетворяющих условию $[1 - y_x'^2(x)] > 0$, $V[y(x)] - V[y_0(x)] > 0$. Поэтому для одних кривых сравнения условие (44) выполняется, а для других – нет. Следовательно, функционал $V[y(x)] = \int_0^\pi y^2(x) [1 - y_x'^2(x)] dx$ не имеет сильного минимума на прямой $y_0(x) \equiv 0$.

Исследуем слабую ε -окрестность прямой $y_0(x) \equiv 0$. Очевидно, что $y_0'(x) \equiv 0$, поэтому для кривых из слабой окрестности, имеющих близость первого порядка относительно прямой $y_0(x) \equiv 0$ должны выполняться условия:

$$|y(x)| < \varepsilon; |y_x'(x)| < \varepsilon \text{ для } x \in [0, \pi].$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда:

$$|y_x'(x)| < 1 \Rightarrow 0 \leq y_x'^2(x) < 1 \Rightarrow 1 - y_x'^2(x) > 0.$$

Поскольку $y^2(x) \geq 0$, то:

$$V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_0^\pi y^2(x) [1 - y_x'^2(x)] dx \geq 0.$$

Это означает выполнения условия (44) для слабой ε -окрестности прямой $y_0(x) \equiv 0$, следовательно, функционал

$V[y(x)] = \int_0^\pi y^2(x) [1 - y_x'^2(x)] dx$ достигает слабого минимума на прямой $y_0(x) \equiv 0$.

Задания для самостоятельного решения

5.3. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} y^2(x) y'_x{}^2(x) dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.4. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^1 |y'_x(x)| dx$ на экстремум на

прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(1) = 0$.

5.5. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y'_x{}^2(x)} dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.6. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} y(x) y'_x{}^2(x) dx$ на экстремум

на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.7. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 y'_x{}^2(x) dx$ на экстремум

на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(-\pi) = y(\pi) = 0$.

5.8. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 y^2(x) dx$ на экстремум

на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(-\pi) = y(\pi) = 0$.

5.9. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} x y^2(x) dx$ на экстремум на

прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(-\pi) = y(\pi) = 0$.

5.10. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - y^2(x)] dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) = x^2$.

5.11. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_{-\pi}^{\pi} [x - y(x)]^2 dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) = x$.

5.12. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} [y(x) - y'_x{}^2(x)] dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.13. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} [y^2(x) - y'_x{}^2(x)] dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.14. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} [y^2(x) - y'_x(x)] dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

5.15. Исследовать функционал $V[y(x)] = \int_0^{\pi} [y(x) - y'_x(x)] dx$ на

экстремум на прямой $y_0(x) \equiv 0$ при условии $y(0) = y(\pi) = 0$.

2. Простейшая задача вариационного исчисления

2.1. Формулировка задачи

Рассмотрим функционал $V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx$ (пример 4.2), который задан на некотором семействе M функций $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) функции $y(x)$ определены и имеют непрерывную первую производную на отрезке $x \in [a, b]$, т.е. $y(x) \in C^1[a, b]$;
- 2) функции $y(x)$ удовлетворяют дополнительным граничным условиям $y(a) = y_1$ и $y(b) = y_2$, т.е. все функции семейства проходят через две фиксированные (закреплённые) точки.

Затребуем, чтобы подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим переменным.

Поставим задачу следующим образом: среди всех допустимых функций $y(x)$, принадлежащих множеству M и удовлетворяющих граничным условиям, требуется найти такую функцию $\tilde{y}(x)$, на которой функционал $V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx$ достигает своего экстремума.

Поставленная задача называется простейшей задачей вариационного исчисления или задачей с закреплёнными границами из-за того, что искомая функция $\tilde{y}(x)$ должна удовлетворять граничным условиям. Поскольку никаких дополнительных ограничений, кроме граничных условий, на функцию $\tilde{y}(x)$ при решении задачи не налагается, то речь идёт о поиске безусловного экстремума функционала $V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx$.

2.2. Уравнение Эйлера

В примере 4.2 было получено уравнение (43), согласно которому: $\delta V = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$. Рассмотрим следующую лемму.

Лемма Лагранжа. Пусть непрерывная функция $y(x)$ такова, что для любой функции $\eta(x) \in C^1[a, b]$, обращающейся в нуль в точках $\eta(a) = \eta(b) = 0$, справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b y(x) \eta(x) dx = 0. \quad (47)$$

Тогда $y(x) \equiv 0$ на отрезке $x \in [a, b]$.

Доказательство. Предположим обратное, пусть в некоторой точке $c \in [a, b]$ $y(c) \neq 0$. Например, $y(c) > 0$. Тогда в силу непрерывности $y(x)$ можно построить отрезок $\left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{n} \right] \subset [a, b]$, который включает в себя точку c . Считая n большим числом, можно подобрать такие границы отрезка, чтобы $y(x) > m$ для $x \in \left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{n} \right]$, где m – некоторое положительное число. Выберем далее в качестве одной из возможных функций $\eta(x)$ следующую:

$$\eta_0(x) = \begin{cases} \sin^2 \left[n(x - \bar{x}) \right], & x \in \left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{n} \right]; \\ 0, & x \notin \left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{n} \right]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\eta_0(a) = \eta_0(b) = 0$, поскольку $a, b \notin \left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{n} \right]$. При этом $\eta_0(x)$ имеет непрерывную производную. Таким образом, равенство $\int_a^b y(x) \eta_0(x) dx = 0$ должно выполняться. Однако:

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) \eta_0(x) dx &= \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \frac{\pi}{n}} y(x) \sin^2[n(x - \bar{x})] dx > m \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \frac{\pi}{n}} \sin^2[n(x - \bar{x})] dx = \\ &= \left| \frac{s = x - \bar{x}}{ds = dx} \right| = m \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 ns ds = \frac{m}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} (1 - \cos 2ns) ds = \frac{\pi m}{2n} > 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Это означает, что $y(x) \equiv 0$ на отрезке $x \in [a, b]$.

Применим доказанную лемму Лагранжа к вариации $\delta V = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$. В этом случае роль $\eta_0(x)$ играет вариация δy , значения которой на крайних точках отрезка $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ ввиду того, что функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям $y(a) = y_0$ и $y(b) = y_1$. Поскольку необходимым условием экстремума является равенство вариации функционала нулю (условие (46)), то в этом случае справедливо:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0. \quad (48)$$

Сравнивая (47) и (48), можно прийти к выводу, что:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (49)$$

Уравнение (49) носит название *уравнения Эйлера* и впервые опубликовано в 1744 году. Искомая функция $\tilde{y}(x)$, доставляющая экстремум функционалу $V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx$, является решением уравнения (49). При этом стоит отметить, что функция $\tilde{y}(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой. Функция $\tilde{y}(x)$, являющаяся решением уравнения (49), называется *экстремалью*.

Поскольку условие (46) является необходимым, но не достаточным, то задача поиска экстремума функционала делится на две части: нахождение экстремалей с помощью уравнения (49) и исследование поведения функционала на этих экстремальных.

Поставим теперь краевую задачу, которая называется *простейшей задачей вариационного исчисления* или *задачей с закреплёнными границами*:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ y(a) = y_1, \\ y(b) = y_2. \end{cases} \quad (50)$$

В системе (50) уравнение Эйлера дополнено граничными условиями, которые определяют значения искомым экстремалей на границах отрезка $[a, b]$. Краевая задача (50) для уравнения второго порядка относительно y может иметь множество решений, единственное решение или не иметь ни одного решения.

Запишем уравнение Эйлера в развёрнутом виде, взяв полную производную по x от $\frac{\partial F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y'}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial x \partial y'} \frac{dx}{dx} + \\
& + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y' \partial y'} \frac{dy'}{dx} = \\
& = y'' \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y'_x(x))}{\partial x \partial y'}.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение Эйлера примет вид:

$$y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (51)$$

Краевая задача (50) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ y(a) = y_1, \\ y(b) = y_2. \end{cases}$$

Исследования достижения экстремума на решениях краевой задачи (50) проводится с помощью условий экстремума (44) и (45).

2.3. Частные случаи уравнения Эйлера

При решении некоторых задач может оказаться, что подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ функционала

$$V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x)) dx \text{ имеет частный вид, например, не}$$

зависит от одной из переменных. Такие ситуации упрощают поиск решения и будут рассмотрены отдельно.

1. Подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ не зависит от $y'(x)$.

Имеем: $F = F(x, y(x))$. В этом случае три первых слагаемых (51) равны нулю, поскольку они содержат частные производные от $F = F(x, y(x))$ по $y'(x)$. Тогда уравнение Эйлера (51) примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (52)$$

Это уравнение является алгебраическим, а не дифференциальным. Оно не содержит производных $y'(x)$. Решение уравнения (52) должно удовлетворять граничным условиям краевой задачи (50). Однако считается, что граничные точки $y(a) = y_1$ и $y(b) = y_2$ попадают на найденные в результате решения (52) кривые только в исключительно удачных случаях.

2. Подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ зависит от $y'(x)$ линейно.

Имеем: $F = F_1(x, y(x)) + y'F_2(x, y(x))$. В этом случае:

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + y' \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} + y' \frac{\partial F_2}{\partial y}. \quad \text{Подставляем в уравнение (49):}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + y' \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - y' \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0.$$

Окончательно после приведения подобных слагаемых:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0. \quad (53)$$

Уравнение (53) также является алгебраическим, а не дифференциальным, как и уравнение (52). Следует отметить частный случай уравнения (53):

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (54)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} Fdx &= F_1(x, y(x))dx + y'F_2(x, y(x))dx = F_1(x, y(x))dx + \\ &+ \frac{dy}{dx}F_2(x, y(x))dx = F_1(x, y(x))dx + F_2(x, y(x))dy = dW, \end{aligned}$$

т.е. выражение $F dx$ является полным дифференциалом некоторой функции W . В этом случае функционал:

$$V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'_x(x))dx = \int_{(a, y_1)}^{(b, y_2)} dW = W|_{(a, y_1)}^{(b, y_2)} \quad (55)$$

не зависит от выбора кривой, соединяющей точки (a, y_1) и (b, y_2) . Такая ситуация имеет механическую реализацию. Работа потенциальных сил, приложенных к материальной точке, не зависит от формы её пути, а определяется только начальным и конечным положениями, т.е. нижним и верхним пределами функции W в выражении (55).

3. *Подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ зависит только от $y'(x)$.*

Имеем: $F = F(y'(x))$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид:

$$y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} = 0. \quad (56)$$

В общем случае при $\frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} \neq 0$ получается, что:

$$y'' = 0. \quad (57)$$

Интегрирование (57) даёт семейство экстремалей, которые являются прямыми линиями:

$$y = C_1 x + C_2, \quad (58)$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые из граничных условий краевой задачи (50).

4. Подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ не зависит от $y(x)$.

Имеем: $F = F(x, y'(x))$. В этом случае $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ и уравнение Эйлера, согласно (49) примет вид:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y'(x))}{\partial y'} = 0. \quad (59)$$

Оно допускает первый интеграл вида:

$$\frac{\partial F(x, y'(x))}{\partial y'} = C. \quad (60)$$

Таким образом, уравнение Эйлера второго порядка (49) удалось свести к уравнению первого порядка. Константа C после интегрирования уравнения (60) находится из граничных условий краевой задачи (50).

5. Подынтегральная функция $F(x, y(x), y'_x(x))$ явно не зависит от x .

Имеем: $F = F(y(x), y'(x))$. Тогда и уравнение Эйлера (51) примет вид:

$$y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (61)$$

Полная производная по x от разности $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \frac{dy'}{dx} = \\ &= y' \frac{\partial F}{\partial y} - y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y'' y' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} = \\ &= -y' \left(y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Умножим (61) на $-y'$, имеем:

$$-y' \left[y'' \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right] = \frac{d}{dx} \left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0. \quad (62)$$

Уравнение (62) допускает первый интеграл:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C. \quad (63)$$

Как и в предыдущем случае, уравнение второго порядка было сведено к уравнению первого порядка. Константа C после интегрирования уравнения (63) находится из граничных условий краевой задачи (50).

Примеры

6.1. Найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Согласно формуле (7), длина кривой между двумя заданными точками будет равна интегралу:

$$s[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x'^2} dx. \quad (64)$$

Анализ функционала (64) показывает, что $F = \sqrt{1 + y_x'^2} = F(y_x')$. Это третий частный случай. Поэтому краевая задача (50) будет иметь вид:

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (65)$$

Интегрируя первое уравнение (65), получим решение (58):

$$y = C_1 x + C_2.$$

Учитывая граничные условия (второе и третье уравнения (65)), имеем:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 x_1 + C_2, \\ y_2 = C_1 x_2 + C_2. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнение первое, получим:

$$y_2 - y_1 = C_1(x_2 - x_1) \Rightarrow C_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Тогда, подставляя в первое уравнение выражение для C_1 , имеем:

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}. \quad (66)$$

Этот же результат можно получить, записав хорошо известное из курса линейной алгебры уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Следовательно, кривая наименьшей длины, соединяющая две заданные точки, является отрезком прямой, проходящей через эти точки.

6.2. Отрезок кривой $y = y(x)$ с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) вращается вокруг оси Ox . Какой должна быть эта кривая, чтобы площадь получившейся поверхности была наименьшей?

Выразим площадь поверхности вращения кривой известной формулой:

$$S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (67)$$

Тогда функция $F(x, y(x), y'(x)) = y \sqrt{1 + y'^2(x)}$ явно не зависит от x . Поэтому для определения экстремалей можно использовать

уравнение (63): $y\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(y\sqrt{1+y'^2} \right) = C_1$. После взятия

производной: $\frac{\partial}{\partial y'} \left(y\sqrt{1+y'^2} \right) = y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ краевая задача (50) будет

иметь вид:

$$\begin{cases} y\sqrt{1+y'^2} - y \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1, \\ y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (68)$$

Преобразуем первое уравнение (68):

$$y\sqrt{1+y'^2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}} - y \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Положим $y' = sh \, t$. Тогда:

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+sh^2 t}} = C_1 \Leftrightarrow y = C_1 ch \, t. \quad (69)$$

В этом случае:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 sh \, t \, dt}{sh \, t} = C_1 dt.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем:

$$x = C_1 t + C_2.$$

Выразим параметр t :

$$t = \frac{x - C_2}{C_1}.$$

Подставим это выражение уравнение (69):

$$y = C_1 ch \frac{x - C_2}{C_1}. \quad (70)$$

Функция, определяемая выражением (70), называется цепной линией, а поверхность вращения – катеноидой. Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий краевой задачи (68).

6.3. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^2 y(3x - y) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=1$, $y(2)=3$.

Поскольку $F = F(x, y(x))$, то имеем случай 1. Уравнение Эйлера примет вид (52). В рассматриваемом примере:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x - y - y = 3x - 2y.$$

Согласно (52), запишем:

$$3x - 2y = 0.$$

Тогда:

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Подставляем граничные условия:

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 \neq \frac{3}{2} \cdot 0 \quad (1 \neq 0).$$

Данное граничное условие не выполняется. Проверяем второе условие:

$$y(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{3}{2} \cdot 2 \quad (3 \equiv 3).$$

Второе граничное условие выполняется. Однако не существует гладкой экстремали функционала, удовлетворяющей обоим граничным условиям. Поэтому экстремаль получается разрывной:

$$y = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{3}{2}x, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

6.4. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'x^2 - y^2) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y(1)=-1$.

Поскольку $F(x, y(x), y'_x(x))$ зависит от $y'(x)$ линейно, то имеем случай 2. Для него справедливо уравнение Эйлера в форме (53). Разложим подынтегральную функцию:

$$F = y'x^2 - y^2 \Rightarrow F_1(x, y) = -y^2; F_2(x, y) = x^2.$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = -2y; \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = 2x.$$

Тогда уравнение (53) примет вид:

$$2x + 2y = 0.$$

Окончательно:

$$y = -x.$$

Подставляем граничные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Данное граничное условие выполняется. Проверяем второе условие:

$$y(1) = -1 \Rightarrow -1 \equiv -1.$$

Второе условие также выполняется. Следовательно, экстремалью данного функционала, удовлетворяющей граничным условиям, является прямая $y = -x$.

6.5. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 y'(3x - y') dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0, y(1)=1,5$.

Поскольку $F = F(x, y'(x))$, то имеем случай 4. Уравнение Эйлера примет вид (59), который допускает первый интеграл (60). В рассматриваемом примере:

$$\frac{\partial F(x, y'(x))}{\partial y'} = 3x - 2y' = C_1.$$

Интегрируем данное уравнение:

$$2y' = 3x - C_1 \Rightarrow dy = \left(1,5x - \frac{C_1}{2}\right) dx \Rightarrow y = 0,75x^2 - \frac{C_1}{2}x + C_2.$$

Для определения констант интегрирования используем граничные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0,75 \cdot 0 - \frac{C_1}{2} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$y(1) = 1,5 \Rightarrow 1,5 = 0,75 \cdot 1 - \frac{C_1}{2} \cdot 1 \Rightarrow \frac{C_1}{2} = -0,75.$$

Тогда искомая экстремаль имеет вид:

$$y = 0,75x(x+1).$$

6.6. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 yy'^2 dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=1$, $y(1)=\sqrt[3]{4}$.

Поскольку $F = F(y, y'(x))$, то имеем случай 5. Уравнение Эйлера примет вид (62), который допускает первый интеграл (63). В рассматриваемом примере:

$$F = yy'^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2yy'.$$

Тогда интеграл (63) примет вид:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \Rightarrow yy'^2 - 2yy'^2 = C_1 \Rightarrow yy'^2 = C_2 \quad (C_2 = -C_1).$$

Тогда:

$$dy\sqrt{y} = C_3 dx \quad (C_3 = \sqrt{C_2}).$$

Интегрируем:

$$2/3 y^{3/2} = C_3 x + C_4.$$

Преобразуем:

$$y^{3/2} = C_5 x + C_6 \quad (C_5 = 1,5C_3; C_6 = 1,5C_4).$$

Тогда константа C_5 находится однозначно из первого граничного условия:

$$y(0)=1 \Rightarrow 1 = C_5 \cdot 0 + C_6 \Rightarrow C_6 = 1.$$

Решение уравнения Эйлера преобразуется к виду:

$$y^{3/2} = C_5 x + 1.$$

Второе граничное условие даёт:

$$y(1) = \sqrt[3]{4} \Rightarrow 2 = C_5 \cdot 1 + 1 \Rightarrow C_5 = 1.$$

Тогда искомая экстремаль:

$$y = (x+1)^{\frac{2}{3}}.$$

6.7. Найти экстремали функционала

$$V[y(x)] = \int_0^{\pi} (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, \text{ удовлетворяющие граничным}$$

условиям: $y(0)=0, y(\pi)=0$.

Данный функционал предполагает использование уравнения Эйлера для общего случая в форме (51). Находим входящие в (51) производные:

$$F = 4y \cos x + y'^2 - y^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2yy'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4 \cos x - 2y.$$

Тогда уравнение Эйлера (51) примет вид:

$$y'' + y = 2 \cos x.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Для его решения составим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни:

$$\lambda = \pm i.$$

Поскольку корни чисто мнимые, то общий вид решения однородного уравнения будет следующим:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Подберём частное решение неоднородного уравнения, исходя из вида специальной правой части (она тригонометрическая). Поэтому:

$$\tilde{y} = (C_3 \cos x + C_4 \sin x)x.$$

Берём первую и вторую производные от частного решения:

$$\tilde{y}' = C_3 \cos x + C_4 \sin x - xC_3 \sin x + xC_4 \cos x.$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' &= -C_3 \sin x + C_4 \cos x - C_3 \sin x - xC_3 \cos x + C_4 \cos x - xC_3 \sin x = \\ &= -2C_3 \sin x + 2C_4 \cos x - xC_3 \cos x - xC_3 \sin x.\end{aligned}$$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$$\begin{aligned}-2C_3 \sin x + 2C_4 \cos x - xC_3 \cos x - xC_3 \sin x + (C_3 \cos x + C_4 \sin x)x &= \\ &= 2 \cos x.\end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых:

$$-2C_3 \sin x + 2C_4 \cos x = 2 \cos x.$$

Откуда, приравнявая соответствующие коэффициенты перед синусом и косинусом слева и справа, имеем:

$$C_3 = 0; C_4 = 1.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения примет окончательный вид:

$$\tilde{y} = x \sin x.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения можно записать:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x.$$

Для определения констант интегрирования используем граничные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0;$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 + \pi \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Константа C_2 осталась неопределённой. Поэтому получили семейство экстремалей:

$$y = (C + x) \sin x .$$

Задания для самостоятельного решения

6.8. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=1, y(2\pi)=1$.

6.9. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(-1)=1, y(0)=0$.

6.10. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y) e^{2x} dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0, y(1)=e^{-1}$.

6.11. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(-1)=-1, y(1)=1$.

6.12. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_a^b [2xy + (x^2 + e^y)y'] dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(a)=A, y(b)=B$.

6.13. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_1^e (xy'^2 + yy') dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(1)=0, y(e)=1$.

6.14. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=1, y(1)=2$.

6.15. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0, y(1)=1$.

6.16. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2) dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=e^2, y(1)=1$.

6.17. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (-y'^2 + 2e^y) dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=1, y(1)=e$.

6.18. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + xy') dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0, y(1)=1$.

6.19. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y + y^3/3) dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0, y(1)=1$.

6.20. Найти экстремали функционала

$V[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx$, удовлетворяющие граничным

условиям: $y(-1)=3, y(1)=1$.

6.21. Найти экстремали функционала

$V[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx$, удовлетворяющие граничным

условиям: $y(0)=1, y(2)=-2$.

6.22. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 1)y dx$,

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=2, y(1)=3$.

6.23. Найти экстремали функционала

$V(y(x)) = \int_{-1}^1 (2y'^2 - 2y^2 + 4x^2y + x^2 \cos x) dx$, удовлетворяющие

граничным условиям: $y(-1)=2, y(1)=-1$.

6.24. Найти экстремали функционала

$$V(y(x)) = \int_0^2 (-2y'^2 + 3y' \cos 2x + 5 \sin^2 3x) dx, \quad \text{удовлетворяющие}$$

граничным условиям: $y(0)=2, y(2)=-3$.

6.25. Найти экстремали функционала

$$V(y(x)) = \int_{-2}^0 (y'^2 + 3y^2 + 4y + x^2 e^x) dx, \quad \text{удовлетворяющие граничным}$$

условиям: $y(-2)=0, y(0)=1$.

6.26. Найти экстремали функционала

$$V(y(x)) = \int_{-1}^1 (-3y'^2 + 2y'e^x + \cos x^2) dx, \quad \text{удовлетворяющие}$$

граничным условиям: $y(-1)=2, y(1)=4$.

6.27. Найти экстремали функционала $V(y(x)) = \int_1^3 \sqrt{y'} y dx,$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(1)=2, y(3)=8$.

6.28. Найти экстремали функционала

$$V(y(x)) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2y^2 + (4x^2 - x + 3)y + x^2 \operatorname{tg} x) dx, \quad \text{удовлетворяющие}$$

граничным условиям: $y(-1)=0, y(1)=3$.

6.29. Найти экстремали функционала

$$V(y(x)) = \int_0^2 (2y'^2 + y' \sin 2x + yx) dx, \quad \text{удовлетворяющие граничным}$$

условиям: $y(0)=0, y(2)=-1$.

6.30. Найти экстремали функционала $V(y(x)) = \int_0^1 y'^2 \sqrt{y} dx,$

удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=2, y(1)=-2$.

2.4. Некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

Рассмотрим несколько обобщений простейшей задачи вариационного исчисления, для которых справедливы рассмотренные ранее методы решения и которые отличаются от классических задач.

1. *Функционалы, подынтегральная функция которых зависит от производных высших порядков.*

В общем виде такие функционалы могут быть представлены следующим образом:

$$V[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx. \quad (71)$$

В отличие от классической задачи, подынтегральная функция функционала (71) содержит не только производную первого порядка. Высший порядок этих производных определяется конечным числом n . Граничные условия при этом должны содержать не только значения функции в граничных точках, но и значения производных в этих точках до $(n-1)$ включительно:

$$\begin{cases} y(a) = y_0, y'(a) = y'_0, y''(a) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}; \\ y(b) = y_1, y'(b) = y'_1, y''(b) = y''_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_1^{(n-1)}. \end{cases} \quad (72)$$

Функция F должна быть $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда экстремальными функционала (71) в классе функций, имеющих непрерывную производную порядка $2n$, будут решения уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \quad (73)$$

Общее решение (73) будет содержать произвольных постоянных, которые затем определяются из граничных условий (72).

Пример

7.1. Найти экстремали функционала $V(y(x)) = \int_0^1 y''^2 dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

Поскольку $n=2$, то уравнение Эйлера-Пуассона (73) примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0.$$

Имеем: $F = y''^2$. Тогда: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$;

$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y^{(4)}$. Подставляем в уравнение Эйлера-Пуассона:

$$y^{(4)} = 0.$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Его производная:

$$y' = 3C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3.$$

Для определения констант интегрирования используем граничные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0;$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 3C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1.$$

С учётом двух найденных констант:

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0;$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 3C_1 \cdot 1 + 2C_2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 3C_1 + 2C_2 = 0.$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ 3C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому уравнение экстремали принимает окончательный вид:

$$y = x.$$

Задания для самостоятельного решения

7.2. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_{-1}^1 (-2y + y'') dx; \quad y(-1) = 0; \quad y'(-1) = 2; \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = 0.$$

7.3. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 - 2y''^2 + yx) dx; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0; \quad y(1) = -1; \quad y'(1) = 0.$$

7.4. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^4 (y + x + 2 - 4y'') dx; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y(4) = 4; \quad y'(4) = 1.$$

7.5. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_1^2 (2y'^2 + e^x \cos x - y''^2 + 4) dx;$$

$$y(1) = 0; \quad y'(1) = 2; \quad y(2) = 1; \quad y'(2) = 1.$$

7.6. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_{-2}^{-3} \left(y - \sin x - \frac{e^x}{\cos x} + xy'' \right) dx;$$

$$y(-2) = 1; \quad y'(-2) = 0; \quad y(-3) = 0; \quad y'(-3) = 1.$$

7.7. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_1^6 (2y'^2 + \operatorname{tg} x + y''^2 - 1) dx;$$

$$y(1) = 3; y'(1) = 0; y(6) = 2; y'(6) = 1.$$

7.8. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^1 (2y'^2 + y^2 + y''^2) dx;$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 1; y(1) = 0; y'(1) = -sh 1.$$

7.9. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_{-1}^0 (240y - y'''^2) dx; y(-1) = 1;$$

$$y'(-1) = -4,5; y''(-1) = 16; y(0) = 0; y'(0) = 0; y''(0) = 0.$$

7.10. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + y''^2) dx; y(0) = 0; y'(0) = 1; y(1) = sh 1; y'(1) = ch 1.$$

7.11. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_2^4 (y + y'') dx; y(2) = 0; y'(2) = 1; y(4) = 4; y'(4) = 2$$

7.12. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_{-2}^0 (y'^2 - y'''^2) dx; y(-2) = 0;$$

$$y'(-2) = -1; y''(-2) = 2; y(0) = 1; y'(0) = 2; y''(0) = 4.$$

7.13. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^1 (y^2 + 2y'''^2) dx; \quad y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; y''(0) = 0; y(1) = 2; y'(1) = 1; y''(1) = 3.$$

7.14. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_0^2 (x^2 + 4y'''^2) dx; \\ y(0) = 0; y'(0) = 0; y''(0) = 0; y(2) = -1; y'(2) = 0; y''(2) = 1.$$

7.15. Найти экстремали функционала содержащего производные высших порядков:

$$V(y(x)) = \int_1^3 (y + x - 2y'') dx; \quad y(1) = 1; y'(1) = -1; y(3) = 0; y'(3) = 3.$$

2. Функционалы, зависящие от нескольких функций.

В общем виде такие функционалы могут быть представлены следующим образом:

$$V[y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)] = \\ = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x),) dx. \quad (74)$$

Граничные условия при этом должны иметь вид:

$$\begin{cases} y_1(a) = y_{10}, y_2(a) = y_{20}, \dots, y_n(a) = y_{n0}; \\ y_1(b) = y_{11}, y_2(b) = y_{21}, \dots, y_n(b) = y_{n1}. \end{cases} \quad (75)$$

Тогда экстремалами функционала (74), имеющими непрерывные производные второго порядка, являются решения системы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_n'} = 0. \end{cases} \quad (76)$$

Пример

8.1. Найти экстремали функционала $V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$, удовлетворяющие граничным условиям: $y(0)=0$, $z(0)=1$, $y(1)=1$, $z(1)=0$.

Имеем функционал, зависящий от двух функций: $y(x)$ и $z(x)$. В этом случае система уравнений Эйлера (76) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \end{cases}$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = 2z'; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} = 2z''.$$

Тогда система уравнений Эйлера преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} 2y'' = 0; \\ 2z'' = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2; \\ z = C_3 x + C_4. \end{cases}$$

Неизвестные константы интегрирования определяем из граничных условий:

$$y(0)=0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0; y(1)=1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 1 + 0 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$z(0)=1 \Rightarrow 1 = C_3 \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 1; z(1)=0 \Rightarrow 0 = C_3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow C_3 = -1.$$

Подставляем найденные константы и находим экстремали функционала:

$$\begin{cases} y = x; \\ z = 1 - x. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения.

8.2. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2) dx;$$

$$y(0) = 0; z(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1; z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

8.3. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_{-1}^1 (2xy - y'^2 + z'^2) dx;$$

$$y(1) = 0; z(1) = 1; y(-1) = 2; z(-1) = -1.$$

8.4. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^{\pi/6} (z + y^2 + 2y'^2 + 4z'^2) dx;$$

$$y(0) = 1; z(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0; z\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

8.5. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^{\pi/2} (-2yz + y'^2 + z'^2) dx;$$

$$y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

8.6. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_{0,5}^1 (y'^2 - 2xyz') dx; \quad y(0,5) = 2; \quad z(0,5) = 3; \quad y(1) = 2; \quad z(1) = 3.$$

8.7. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (-2yz + y'^2 + z'^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 1; \quad y(1) = 3; \quad z(1) = 2.$$

8.8. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2yz + x) dx;$$

$$y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad y(1) = 1; \quad z(1) = 0.$$

8.9. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_{-1}^1 (-y'xz + 4z'^2) dx; \quad y(-1) = -64; \quad z(-1) = 2; \quad y(1) = 0; \quad z(1) = -4.$$

8.10. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_{-1}^1 \left(2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3} \right) dx; \quad y(1) = 0; \quad z(1) = 1; \quad y(-1) = 2; \quad z(-1) = -1.$$

8.11. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (2y + y'^2 + z'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad y(1) = \frac{3}{2}; \quad z(1) = 1.$$

8.12. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (2yx + xz - y'^2 + z'^2) dx;$$

$$y(0) = 0; z(0) = 0; y(1) = 1; z(1) = 2.$$

8.13. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (4yz + y'z') dx; \quad y(0) = 1; \quad z(0) = 0; \quad y(1) = 2; \quad z(1) = 3.$$

8.14. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_0^1 (2y^2 + e^x z + 2y'^2 - z'^2) dx;$$

$$y(0) = -1; \quad z(0) = -2; \quad y(1) = 1; \quad z(1) = 2.$$

8.15. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$$V(y(x), z(x)) = \int_{-1}^1 (y'^3 + z'^3) dx; \quad y(1) = 1; \quad z(1) = 0; \quad y(-1) = -2; \quad z(-1) = -1.$$

3. Достаточные условия экстремума функционала

3.1. Сильный и слабый экстремумы функционала

Сильный экстремум. Говорят, что функционал $V[y(x)]$ достигает сильного локального минимума (максимума) на экстремали $y = \tilde{y}(x)$, если существует такая ε -окрестность – сильная окрестность в метрике C кривой $y = \tilde{y}(x)$, – что для любой кривой $y = y(x)$ из этой окрестности справедливо неравенство:

$$V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] \geq 0; \quad (77)$$

$$V[y(x)] - V[\tilde{y}(x)] \leq 0. \quad (78)$$

Неравенство (77) определяет сильный локальный минимум функционала $V[y(x)]$ на экстремали $y = \tilde{y}(x)$, неравенство (78) – его сильный локальный максимум. Эти неравенства полностью соответствуют аналогичным неравенствам (44) и (45), когда вводилось само понятие экстремума функционала. В данном контексте лишь уточняется в какой ε -окрестности кривой $y = y(x)$ эти неравенства справедливы.

Слабый экстремум. Говорят, что функционал $V[y(x)]$ достигает слабого локального минимума (максимума) на экстремали $y = \tilde{y}(x)$, если существует такая ε -окрестность – сильная окрестность в метрике C^1 кривой $y = \tilde{y}(x)$, – что для любой кривой $y = y(x)$ из этой окрестности справедливо неравенство (77) в случае минимума и неравенство (78) в случае максимума.

Поскольку слабая окрестность содержит меньше кривых, чем сильная, то, если экстремум достигается в сильной ε -окрестности кривой $y = y(x)$, то он также будет достигаться и в слабой её ε -

окрестности. Обратное утверждение в общем случае является неверным. Таким образом, сильный экстремум является одновременно и слабым экстремумом функционала, но не наоборот.

3.2. Поле экстремалей

Предположим, что в результате решения краевой задачи (50) была получена экстремаль $y = y_0(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала $V[y(x)]$ в рамках простейшей вариационной задачи. Одним из требований, часто входящих в различные достаточные условия экстремума функционала, является возможность включения найденной экстремали $y = y_0(x)$ в так называемое *поле экстремалей*. В общем случае в решение уравнения Эйлера входят две произвольные константы. Найдя одну из них из граничных условий и оставив другую неизвестной, можно получить семейство кривых вида: $y = y(x, C)$, где C – константа, которую оставили неизвестной. Выделим теперь область, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ на координатной плоскости (x, y) , обозначим её через G и рассмотрим поведение семейства кривых $y = y(x, C)$ в этой области. Если через каждую точку в области G будет проходить только одна кривая семейства $y = y(x, C)$, то говорят, что это семейство образует *собственное поле экстремалей* в области G . Если все кривые семейства пересекаются в области G в одной точке, то говорят, что это семейство образует *центральное поле экстремалей* в области G . Точка, в которой пересекаются все экстремали, называется *центром пучка экстремалей*. В рассмотренных полях экстремалей выбором любой точки, кроме центра пучка, задаётся конкретная экстремаль, поскольку через каждую точку проходит только одна экстремаль (кроме центра пучка). *Наклон поля экстремалей*,

который определяется наклоном конкретной экстремали в определённой точке области G , также является вполне определённой функцией координат этой точки: $p = p(x, y)$.

Пример

9.1. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot \operatorname{tg} x; 0 \leq x \leq \pi/4$$

Выберем пять различных кривых ($C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) и построим их с шагом $\Delta x = \pi/40$, например, в среде Mathcad (рисунок 2).

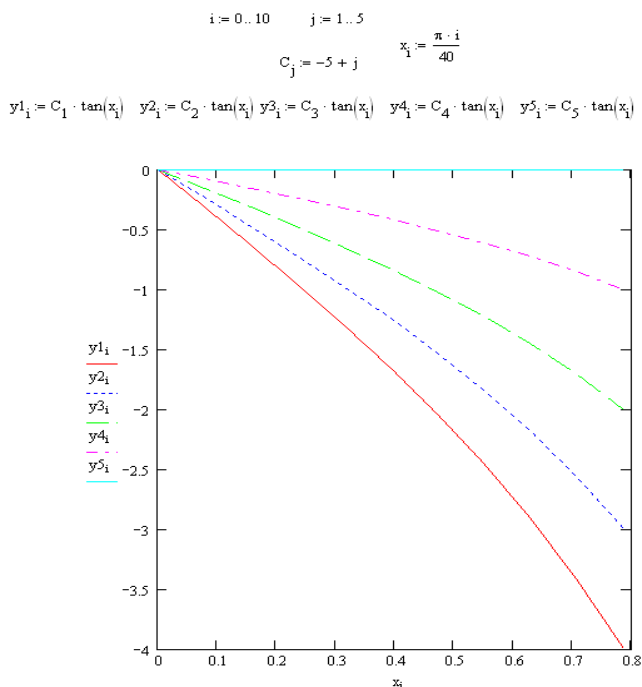


Рисунок 2 – Семейство кривых $y = C \cdot \operatorname{tg} x$ в области $G (0 \leq x \leq \pi/4)$
с кодом в среде Mathcad

Из рисунка 2 видно, что все кривые пересекаются в точке (0, 0), которая входит в область G ($0 \leq x \leq \pi/4$). Кроме начала координат, через каждую точку области G проходит только одна кривая. Следовательно, кривые $y = C \cdot \operatorname{tg} x$ образуют в области G ($0 \leq x \leq \pi/4$) центральное поле.

9.2. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.
 $y = C \cdot \cos x$; $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

Выберем пять различных кривых ($C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) и построим их с шагом $\Delta x = \pi/40$, например, с среде Mathcad (рисунок 3).

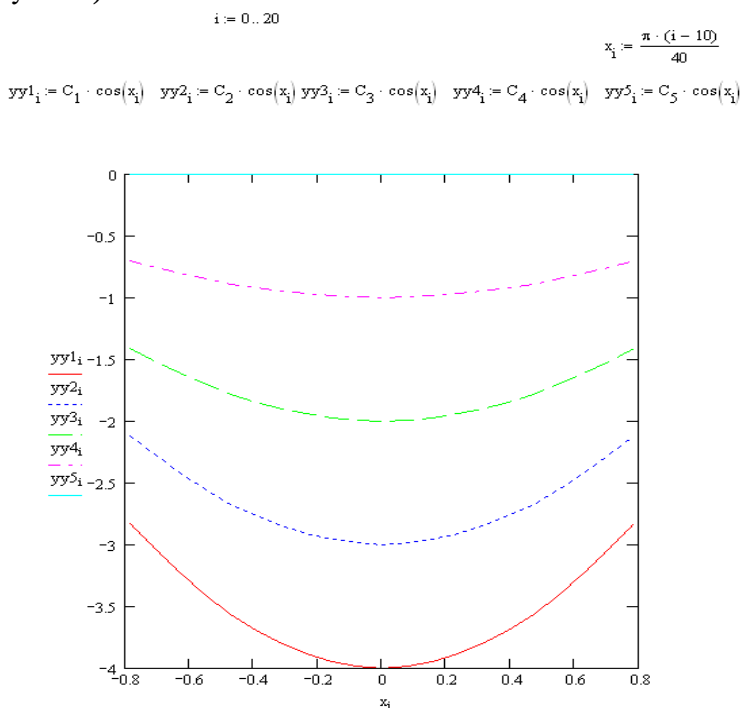


Рисунок 3 – Семейство кривых $y = C \cdot \cos x$ в области G ($-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$)
с кодом в среде Mathcad

Из рисунка 3 видно, что через каждую точку области G ($-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$) проходит только одна кривая. Следовательно, кривые $y = C \cdot \cos x$ образуют в области G ($-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$) собственное поле.

9.3. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.
 $y = C \cdot \cos x$; $-\pi \leq x \leq \pi$

Выберем пять различных кривых ($C = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) и построим их с шагом $\Delta x = \pi/40$, например, с среде Mathcad (рисунок 4).

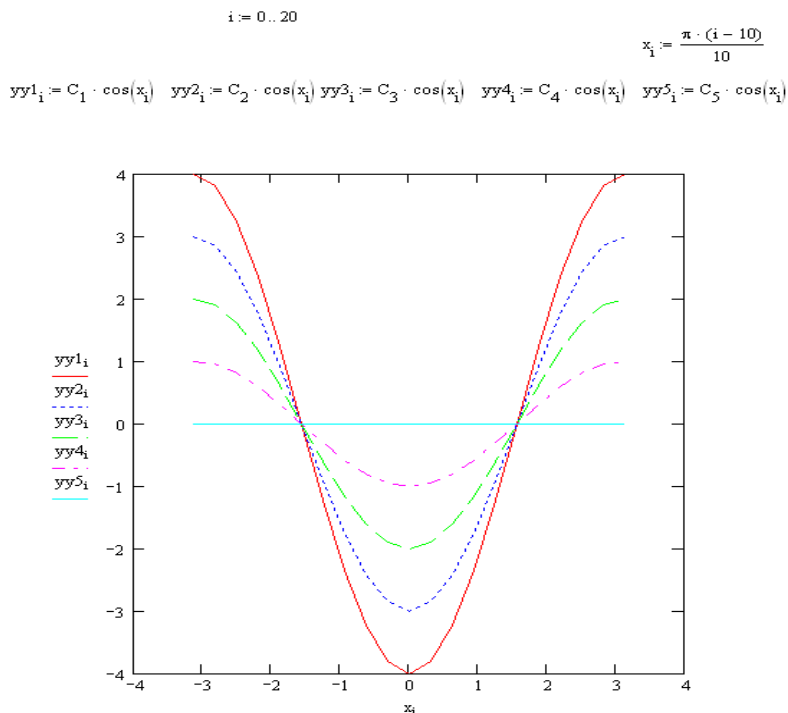


Рисунок 4 – Семейство кривых $y = C \cdot \cos x$ в области G ($-\pi \leq x \leq \pi$)
с кодом в среде Mathcad

Из рисунка 4 видно, что все кривые пересекаются в двух точках области: $(-\pi/2, 0)$ и $(\pi/2, 0)$. Поэтому семейство кривых $y = C \cdot \cos x$ не образует поля в области $G (-\pi \leq x \leq \pi)$.

Задания для самостоятельного решения

9.4. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot \sin x; -\pi/4 \leq x \leq \pi/4.$$

9.5. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot \sin x; -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$$

9.6. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot \sin x; -\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2.$$

9.7. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot (x^2 - 2x); 0 \leq x \leq 1.$$

9.8. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot (x^2 - 2x); -1 \leq x \leq 3.$$

9.9. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C \cdot (x^2 - 2x); 0,5 \leq x \leq 1,5.$$

9.10. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C(x^3 + 1); -2 \leq x \leq 2.$$

9.11. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C(x^3 + 1); 0 \leq x \leq 5.$$

9.12. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C/x; 1 \leq x \leq 2.$$

9.13. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = C/x; -5 \leq x \leq -2.$$

9.14. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x+1)}{x^2}; -2 \leq x \leq -0,5.$$

9.15. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x+1)}{x^2}; 2 \leq x \leq 3.$$

9.16. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x^2 - 1)}{\sin x}; -\frac{\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}.$$

9.17. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x^2 - 1)}{\sin x}; \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

9.18. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x-1)}{\sin x + 2}; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

9.19. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x-1)}{\sin x + 2}; -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

9.20. Выяснить, образуют ли поле (собственное или центральное) указанное семейство кривых в заданной области.

$$y = \frac{C(x-1)}{\sin x + 2}; \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Пример

10.1. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Для определения экстремалей решим простейшую вариационную задачу (50). Поскольку $F = F(x, y(x), y'_x(x))$, имеем общий случай уравнения Эйлера. Определяем производные:

$$F = y'^2 - 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x.$$

Составляем уравнение Эйлера:

$$y'' = -x.$$

Интегрируем:

$$y' = -x^2/2 + C_1.$$

Повторно интегрируем:

$$y = -x^3/6 + C_1 x + C_2.$$

Находим константы из граничных условий:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = -1/6 + C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 1/6.$$

Экстремаль:

$$y = 1/6 x(1 - x^2).$$

Оставим неопределённой константу C_1 :

$$y = -x^3/6 + C_1 x.$$

Выделим шесть различных кривых данного семейства для $C_1 = 0; 0,05; 0,1; 1/6; 0,2; 0,25$ и построим их в области G ($0 \leq x \leq 1$) с шагом $\Delta x = 0,1$ (рисунок 5).

$$\begin{aligned} i &:= 0 \dots 10 & x_1 &:= \frac{i}{10} \\ y_{11} &:= 0.25 \cdot x_1 - \frac{(x_1)^3}{6} & y_{21} &:= 0.2 \cdot x_1 - \frac{(x_1)^3}{6} & y_{31} &:= 0.1 \cdot x_1 - \frac{(x_1)^3}{6} & y_{41} &:= 0.05 \cdot x_1 - \frac{(x_1)^3}{6} \\ y_{61} &:= \frac{1}{6} \cdot x_1 \cdot \left[1 - (x_1)^2 \right] \\ y_{51} &:= C_5 \cdot x_1 - \frac{(x_1)^3}{6} \end{aligned}$$

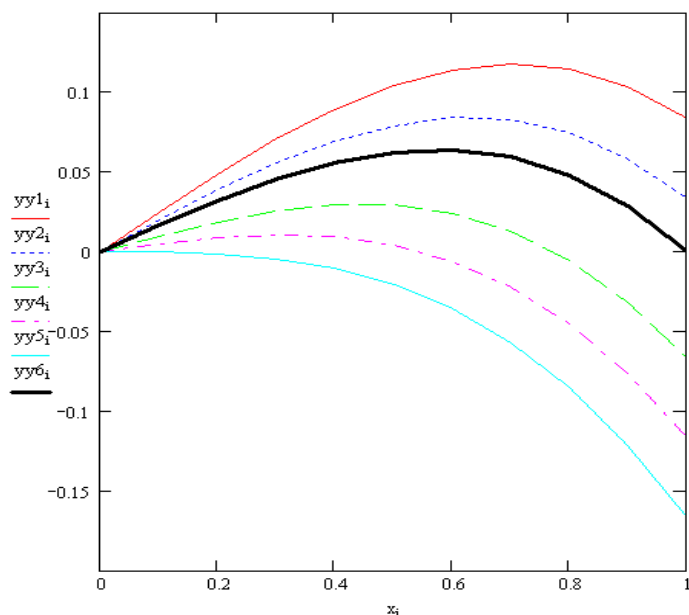


Рисунок 5 – Семейство кривых $y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x$ в области G ($0 \leq x \leq 1$)

с кодом в среде Mathcad

Из рисунка 5 видно, что все экстремали пересекаются в точке $(0, 0)$, которая входит в область G ($0 \leq x \leq 1$). Кроме начала координат, через каждую точку области G проходит только одна экстремаль. Следовательно, кривые $y = -x^3/6 + C_1x$ образуют в области G ($0 \leq x \leq 1$) центральное поле экстремалей.

10.2. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 2e^x y) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = e.$$

Также как и в предыдущем примере имеем $F = F(x, y(x), y'_x(x))$, т.е. общий случай уравнения Эйлера. Определяем производные:

$$F = y'^2 + 2e^x y; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2e^x.$$

Составляем уравнение Эйлера:

$$y'' = e^x.$$

Интегрируем:

$$y' = e^x + C_1.$$

Повторно интегрируем:

$$y = e^x + C_1x + C_2.$$

Находим константы из граничных условий:

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$y(1) = e \Rightarrow e = e^1 + C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Экстремаль:

$$y = e^x. \quad (79)$$

Оставим неопределённой константу C_2 :

$$y = e^x + C_2. \quad (80)$$

Легко видеть, что через каждую в области G ($0 \leq x \leq 1$) проходит только одна экстремаль. Поэтому найденная в результате решения простейшей вариационной задачи (50) экстремаль (79) может быть включена в собственное поле экстремалей (80).

Задания для самостоятельного решения

10.3. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей

$$V[y(x)] = \int_0^1 y'^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 2.$$

10.4. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей

$$V[y(x)] = \int_3^5 (y'^2 - 2x) dx; \quad y(3) = 1; \quad y(5) = 4.$$

10.5. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей

$$V[y(x)] = \int_0^1 y' y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

10.6. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей

$$V[y(x)] = \int_0^2 (y' y + \cos x) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

10.7. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей

$$V[y(x)] = \int_0^1 y' y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

10.8. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^3 + x^2 \cos x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

10.9. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y \cos x) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 0.$$

10.10. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' + yx^3) dx; \quad y(0) = 2; \quad y(1) = -1.$$

10.11. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' + \sin x) y dx; \quad y(0) = -1; \quad y(1) = 0.$$

10.12. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' - 2e^x) y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 2.$$

10.13. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' + x^4) y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = -1.$$

10.14. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' + e^x - x^2) y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

10.15. Исследовать возможность включения экстремалей функционала в поле экстремалей.

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y' + 3 \sin x - x) y dx; \quad y(0) = -1; \quad y(1) = 1.$$

3.3. Достаточные условия Вейерштрасса

Пусть экстремаль $y = y_0(x)$, являющаяся решением простейшей вариационной задачи (50), на сегменте $[a, b]$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей.

Функцией Вейерштрасса будем называть следующую функцию:

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}. \quad (81)$$

Функция $E(x, y, p, y')$ рассматривается на кривых сравнения $y = y(x)$ в сильной или слабой окрестности экстремали $y = y_0(x)$ (рисунок 6).

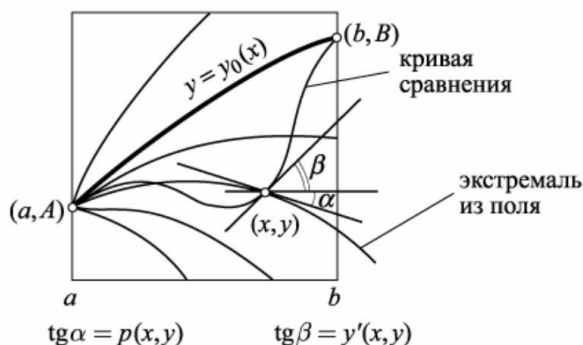


Рисунок 6 – К исследованию функции Вейерштрасса

Приращение функционала можно следующим образом выразить через функцию Вейерштрасса:

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b E\{x, y(x), p[x, y(x)], y'(x)\} dx. \quad (82)$$

В выражении (82) $y_0(x)$ – исследуемая экстремаль, а $y(x)$ – кривая сравнения. Для выполнения условий экстремума (77) или

(78) будет достаточно, чтобы функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ в (82) была знакоопределённой в окрестности экстремали $y = y_0(x)$. Сильным или слабым будет экстремум, зависит от того, в какой окрестности (сильной или слабой) экстремали $y = y_0(x)$ наблюдается знакоопределённость функции Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$.

Достаточные условия Вейерштрасса для слабого экстремума функционала.

(функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ исследуется в слабой окрестности экстремали $y = y_0(x)$)

Экстремаль $y = y_0(x)$ доставляет *слабый экстремум* функционалу, если:

- 1) она является решением простейшей вариационной задачи (50);
- 2) она может быть включена в поле экстремалей на сегменте $[a, b]$;
- 3) функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ сохраняет свой знак во всех точках слабой окрестности $y = y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали и для значений $y'(x)$, близких к $p(x, y)$.

Если выполняются условия:

$$E(x, y, p, y') \geq 0, \quad (83)$$

то функционал имеет слабый минимум на экстремали $y = y_0(x)$.

Если выполняются условия:

$$E(x, y, p, y') \leq 0, \quad (84)$$

то функционал имеет слабый максимум на экстремали $y = y_0(x)$.

Достаточные условия Вейерштрасса для сильного экстремума функционала.

(функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ исследуется в сильной окрестности экстремали $y = y_0(x)$)

Экстремаль $y = y_0(x)$ доставляет *сильный экстремум* функционалу, если:

- 1) она является решением простейшей вариационной задачи (50);
- 2) она может быть включена в поле экстремалей на сегменте $[a, b]$;
- 3) функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ сохраняет свой знак во всех точках сильной окрестности $y = y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали и для произвольных значений $y'(x)$.

Если выполняются условия (83), то функционал имеет *сильный минимум* на экстремали $y = y_0(x)$. Если выполняются условия (84), то функционал имеет *сильный максимум* на экстремали $y = y_0(x)$.

Достаточные условия отсутствия экстремума.

Если в точках экстремали $y = y_0(x)$ при некоторых значениях $y'(x)$ функция $E(x, y, p, y')$ имеет противоположные знаки, то *сильный экстремум* функционала на этой экстремали не достигается.

Если в точках экстремали $y = y_0(x)$ при сколь угодно близких значениях $y'(x)$ к $p(x, y)$ функция $E(x, y, p, y')$ имеет противоположные знаки, то *слабый экстремум* функционала на этой экстремали не достигается.

3.4. Достаточные условия Лежандра

Для использования достаточных условий Лежандра необходимо, чтобы подынтегральная функция функционала $F(x, y, y')$ имела непрерывную вторую производную $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2}$, а экстремаль $y = y_0(x)$, которая является решением

простейшей вариационной задачи (50), могла быть включена в поле экстремалей.

Достаточные условия Лежандра для слабого экстремума функционала.

(производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2}$ исследуется в слабой окрестности

экстремали $y = y_0(x)$)

Если на экстремали $y = y_0(x)$ выполняются условия:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} > 0, \quad (85)$$

то функционал имеет *слабый минимум*.

Если на экстремали $y = y_0(x)$ выполняются условия:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} < 0, \quad (86)$$

то функционал имеет *слабый максимум*.

Достаточные условия Лежандра для сильного экстремума функционала.

(производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2}$ исследуется в сильной окрестности

экстремали $y = y_0(x)$)

Если выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} \geq 0, \quad (87)$$

во всех точках сильной окрестности $y = y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали и для произвольных значений $y'(x)$, то функционал имеет *сильный минимум*.

Если выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} \leq 0, \quad (88)$$

во всех точках сильной окрестности $y = y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали и для произвольных значений $y'(x)$, то функционал имеет *сильный максимум*.

Рассмотрим примеры использования достаточных условий Вейерштрасса и Лежандра.

Пример

11.1. Исследовать на экстремум функционал: $V[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx$ для различных граничных условий: 1) $y(0)=0; y(1)=2$; 2) $y(0)=1; y(1)=1$.

Сначала решаем простейшую вариационную задачу (50). Имеем третий частный случай подынтегральной функции $F = F(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид (57), а его решение – (58):

$$y = C_1 x + C_2.$$

Подставим граничные условия для случая 1). Получим:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0; \quad y(1) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Таким образом, граничным условиям для случая 1) удовлетворяет экстремаль:

$$y = 2x. \quad (89)$$

Она на сегменте $[0, 1]$ может быть включена в центральное или собственное поля экстремалей (рисунок 7).

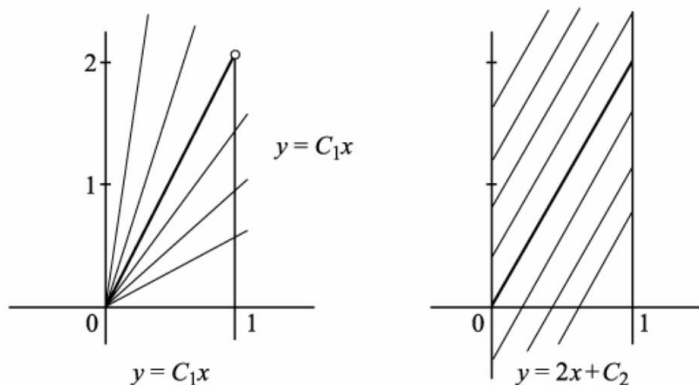


Рисунок 7 – Включение экстремали $y = 2x$ в центральное поле (слева)
и в собственное поле (справа)

Поскольку первое и второе требования для применения достаточного условия Вейерштрасса выполнены, используем его для исследования заданного функционала на экстремум на экстремали $y = 2x$. Функция Вейерштрасса будет иметь вид (81). При этом:

$$F(x, y, y') = y'^3; F(x, y, p) = p^3; \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 3p^2.$$

Подставляем в (81):

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - 3(y' - p)p^2 = (y' - p)^2(y' + 2p). \quad (90)$$

Проанализируем полученное выражение для функции Вейерштрасса.

Во-первых, можно заметить, что близость кривых сравнения к экстремали в данном случае не играет роли, поскольку $E(x, y, p, y')$ не зависит от x и y .

Во-вторых, $E(x, y, p, y')$ может менять свой знак за счёт скобки $(y' + 2p)$. На экстремали $p \equiv 2$. Если кривые сравнения

имеют сильно отличную от p производную ($y' < -4$), то скобка ($y' + 2p$) становится отрицательной.

Следовательно, выполняются достаточные условия отсутствия сильного экстремума, когда при некоторых значениях $y'(x)$ функция $E(x, y, p, y')$ имеет противоположные знаки (например, при $y' = -3$ её знак будет положительным, а при $y' = -5$ – отрицательным).

Вместе с тем при $y' > -4$, т.е. при значении $y'(x)$ близких к p ($p = 2$), функция Вейерштрасса сохраняет свой знак, удовлетворяя условию (83). Значит, согласно достаточному условию Вейерштрасса для слабого экстремума, функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx$ при граничных условиях: 1) $y(0)=0$; $y(1)=2$ достигает на экстремали $y = 2x$ слабый минимум.

Чтобы проверить справедливость данного вывода, применим достаточное условие Лежандра, поскольку производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 6y'$ является непрерывной функцией. Исследуем сначала эту производную на самой экстремали $y = 2x$. Очевидно, что $y' = 2$. Поэтому:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 6y' = 12 > 0.$$

Следовательно, на экстремали выполняются условия (85), которые определяют наличие слабого минимума. В сильной окрестности экстремали $y = 2x$ производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 6y'$ является знакопеременной функцией. Её знак меняется при изменении знака $y'(x)$. Поэтому условия (87) или (88) не выполнены. Однако,

поскольку условия Лежандра являются достаточными, но не необходимыми, то вывод об отсутствии сильного экстремума с их помощью сделать нельзя. Таким образом, если ограничиться исследованием экстремума функционала с помощью достаточных условий Лежандра, то вопрос о наличии или отсутствии сильного экстремума останется открытым. Только достаточные условия Вейерштрасса позволили сделать вывод об отсутствии сильного экстремума.

Исследуем далее функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx$ на экстремум при других граничных условиях: 2) $y(0)=1; y(1)=1$.

Решение простейшей вариационной задачи (50) по-прежнему имеет вид (58). Однако, вместо экстремали (89) граничным условиям удовлетворяет другая экстремаль. Подставим граничные условия для случая 2). Получим:

$$y(0)=1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1; \quad y(1)=1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 1 + 1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Следовательно, имеем экстремаль: $y=1$. Она на сегменте $[0, 1]$ может быть включена в центральное или собственное поля экстремалей (рисунок 8).

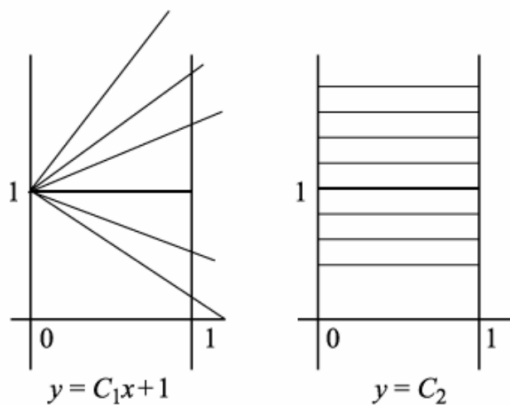


Рисунок 8 – Включение экстремали $y=1$ в центральное поле (слева)
и в собственное поле (справа)

Функция Вейерштрасса, по-прежнему, имеет вид (90). На экстремали $y=1$ она ($p \equiv 0$) может быть представлена как

$$E(x, y, p, y') = y'^3.$$

Эта функция является знакопеременной, меняя свой знак в зависимости от знака $y'(x)$ в сколь угодно малой окрестности экстремали $y=1$ при сколь угодно близких значениях $y'(x)$ к $p \equiv 0$. Следовательно, на основании достаточных условий отсутствия экстремума Вейерштрасса можно утверждать, что на экстремали $y=1$ не достигается ни сильный, ни слабый экстремумы функционала.

Обратимся теперь к достаточному условию Лежандра. На экстремали $y=1$ очевидно, что $y' = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 6y' = 0, \quad \text{что говорит о неработоспособности}$$

достаточного условия Лежандра в этом случае.

11.2. Исследовать на экстремум функционал: $V[y(x)] = \int_0^1 y'^4 dx$ для

граничных условий: $y(0)=0$; $y(1)=-1$.

Как и в предыдущем примере, решаем простейшую вариационную задачу (50). Также имеем третий частный случай подынтегральной функции $F = F(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид (57), а его решение – (58):

$$y = C_1 x + C_2.$$

Подставим граничные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$y(1) = -1 \Rightarrow -1 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = -1.$$

Таким образом, граничным условиям удовлетворяет экстремаль:

$$y = -x.$$

Она на сегменте $[0, 1]$ может быть включена в центральное или собственное поля экстремалей (рисунок 9).

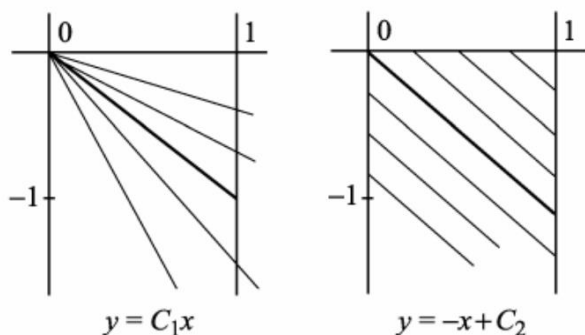


Рисунок 9 – Включение экстремали $y = -x$ в центральное поле (слева) и в собственное поле (справа)

Поскольку первое и второе требования для применения достаточного условия Вейерштрасса выполнены, используем его для исследования функционала на экстремум на экстремали $y = -x$. Построим функцию Вейерштрасса (81):

$$F(x, y, y') = y'^4; F(x, y, p) = p^4; \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 4p^3.$$

Следовательно, подставляя в (81), получим:

$$E(x, y, p, y') = y'^4 - p^4 - 4(y' - p)p^3. \quad (91)$$

Исследование знакоопределённости данной функции требует некоторых усилий. Поэтому обратимся к достаточным условиям

Лежандра, поскольку производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 12y'^2$ является

непрерывной функцией. Исследуем сначала эту производную на самой экстремали $y = -x$. Очевидно, что $y' = -1$. Поэтому:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 12y'^2 = 12 > 0.$$

Следовательно, на экстремали $y = -x$ выполняются условия (85), которые определяют наличие слабого минимума. В сильной

окрестности экстремали $y = -x$ производная $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 12y'^2$

также является знакоопределённой функцией. Видно, что при любых значениях производной $y'(x)$ выполняются условия (87).

Это означает, что на основании достаточных условий Лежандра

функционал $V[y(x)] = \int_0^1 y'^4 dx$ при граничных условиях $y(0)=0$;

$y(1)=-1$ имеет сильный минимум на экстремали $y = -x$.

Тот же вывод можно сделать и на основании достаточных условий Вейерштрасса, преобразовав функцию Вейерштрасса из (91) в следующее выражение:

$$E(x, y, p, y') = y'^4 - p^4 - 4(y' - p)p^3 = (y' - p)^2 [2p^2 + (y' + p)^2].$$

Полученная функция удовлетворяет условиям (83) независимо от $y'(x)$, что говорит о наличии сильного минимума, согласно достаточным условиям Вейерштрасса.

Задания для самостоятельного решения

11.3. Исследовать на экстремум функционал:

$$V[y(x)] = \int_0^1 e^x (y^2 + 0,5y'^2) dx \text{ для граничных условий: } y(0)=1; y(1)=e.$$

$$11.4. \text{ Исследовать на экстремум функционал: } V[y(x)] = \int_0^1 e^y y'^2 dx$$

для граничных условий: $y(0)=0; y(1)=\ln 4$.

$$11.5. \text{ Исследовать на экстремум функционал: } V[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx \text{ для}$$

граничных условий: $y(1)=1; y(2)=4$.

11.6. Исследовать на экстремум функционал: $V[y(x)] = \int_0^1 \frac{dx}{y'}$ для

граничных условий: $y(0)=0$; $y(1)=2$.

11.7. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_0^1 (1+x)y'^2 dx$ для граничных условий: $y(0)=0$; $y(1)=1$.

11.8. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dx$ для граничных условий: $y(0)=1$; $y(\pi/2)=1$.

11.9. Исследовать на экстремум функционал: $V[y(x)] = \int_0^1 y'^4 dx$ для

граничных условий: $y(0)=0$; $y(1)=-1$.

11.10. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1+x^2 y') dx$ для граничных условий: $y(-1)=1$; $y(2)=4$.

11.11. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_{-1}^1 (y'^3 - y'^2) dx$ для граничных условий: $y(-1)=-1$; $y(1)=3$.

11.12. Исследовать на экстремум функционал: $V[y(x)] = \int_0^1 \frac{dx}{y'^2}$ для

граничных условий: $y(0)=0$; $y(1)=2$.

11.13. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_1^3 (12xy' + y'^2) dx$ для граничных условий: $y(1)=0$; $y(3)=26$.

11.14. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$ для граничных условий: $y(0)=-1$; $y(1)=1$.

11.15. Исследовать на экстремум функционал:

$V[y(x)] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx$ для граничных условий: $y(1)=0$; $y(2)=1$.

3.5. Возможность включения экстремали в поле экстремалей.

Достаточное условие Якоби

Построение графиков экстремалей для анализа возможности их включения в поле экстремалей не всегда является эффективным инструментом. Поэтому существуют условия, при выполнении которых экстремаль может быть включена в поле. Одним из таких условий являются *достаточное условие Якоби*.

Пусть имеется семейство плоских кривых $\Phi(x, y, C)$. C -дискриминантом этого семейства называется геометрическое место точек, которое определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Огибающей семейства $\Phi(x, y, C)$ называется кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой этого семейства и каждого участка которой касается бесконечное число кривых семейства.

Рассмотрим пример для иллюстрации введённых определений. Найдём C -дискриминант семейства плоских кривых: $y = (x - C)^2$. Составляем систему (92):

$$\begin{cases} y - (x - C)^2 = 0; \\ 2(x - C) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является прямая $y = 0$. Эта прямая является огибающей семейства $y = (x - C)^2$. Действительно, в каждой точке $x = x_0$ прямая $y = 0$ представляет собой общую касательную к различным кривым семейства, а любого её малого участка касается бесконечное число кривых

семейства $y = (x - C)^2$. В приведённом примере C -дискриминант состоит из одной огибающей.

Если дуга AB кривой $y = y(x)$ имеет отличную от A общую точку A^* с C -дискриминантом с центром в точке A , то точка A^* называется *сопряжённой* с точкой A .

Поясним это определение примером. Для этой цели рассмотрим семейство плоских кривых: $y = C \sin x$. Составляем систему (92):

$$\begin{cases} y - C \sin x = 0; \\ -\sin x = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет дискретное множество точек $(k\pi, 0)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ На сегменте $x \in [0, 2\pi]$ дуга кривой $y = C \sin x$ будет содержать ещё одну точку, кроме $O(0, 0)$, принадлежащую C -дискриминанту. Это точка $O^*(\pi, 0)$ (рисунок 10). На сегменте $x \in [0, \pi]$ точек, сопряжённых с точкой $O(0, 0)$, нет.

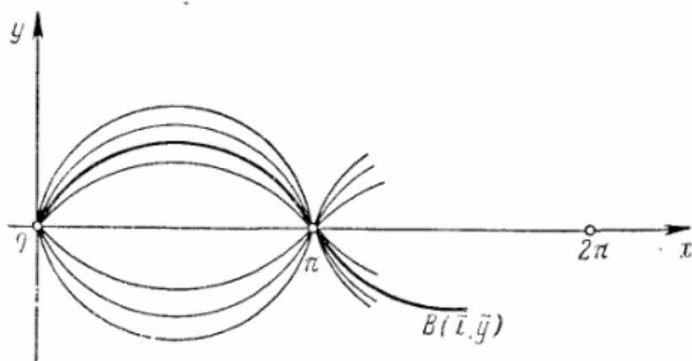


Рисунок 10 – Семейство кривых $y = C \sin x$ на сегменте $x \in [0, 2\pi]$

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать **достаточное условие Якоби** для включения экстремали в центральное поле.

Для того, чтобы дугу AB можно было включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(x_0, y_0)$, достаточно, чтобы сопряжённая с точкой A точка A^* не лежала на этой дуге.

Формализуем это условие в аналитическую форму. Пусть поставлена простейшая вариационная задача (50). Составим уравнение Якоби в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) u(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u'(x) \right) = 0. \quad (93)$$

Пусть его решение $u = u(x)$ удовлетворяет условию $u(x_0) = 0$. Если для этого решения существует такая точка с координатой $x = x^*$, принадлежащая сегменту $x \in [x_0, x_1]$, что $u(x^*) = 0$, то сопряжённая с $A(x_0, y_0)$ точка A^* лежит на дуге AB . Если решение $u = u(x)$ уравнения Якоби (93) не обращается в нуль ни в одной точке сегмента $x \in [x_0, x_1]$, кроме $x = x_0$, то на дуге AB нет сопряжённых с A точек, и сама дуга может быть включена в центральное поле экстремалей.

В уравнение Якоби (93) вместо функции $y = y(x)$ в подынтегральную функцию $F(x, y, y')$ нужно подставлять правую часть уравнения экстремали $y = y(x, C)$.

Пример.

12.1. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1, \quad \text{в центральное поле}$$

с помощью достаточного условия Якоби.

Составим уравнение Якоби (93):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2.$$

Следовательно, уравнение Якоби (93) примет вид:

$$0 \cdot u(x) - \frac{d}{dx}(2 \cdot u'(x)) = 0.$$

После преобразования:

$$u''(x) = 0.$$

Решение данного уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$u(x) = C_1 x + C_2.$$

Поскольку $x_0 = 0$, то для справедливости $u(x_0) = 0$ необходимо положить $C_2 = 0$.

Тогда имеем:

$$u(x) = C_1 x.$$

При $C_1 \neq 0$ значения функции $u = u(x)$ не обращаются в нуль ни в одной точке сегмента $x \in [0, 1]$, кроме $x_0 = 0$. Следовательно, на этом сегменте нет точек, сопряжённых точке $A(0, 0)$. Экстремаль может быть включена в центральное поле в соответствии с достаточным условием Якоби.

3.6. Возможность включения экстремали в поле экстремалей.

Усиленное достаточное условие Лежандра

Пусть поставлена простейшая вариационная задача (50). Тогда экстремаль, являющаяся решением этой задачи, может быть включена в поле экстремалей при удовлетворении следующего условия:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} > 0. \quad (94)$$

Условие (94) должно быть выполнено во всех точках экстремали на сегменте $x \in [x_0, x_1]$.

Пример

12.2. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^2 (y'^4 + y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 5, \quad \text{в поле экстремалей}$$

с помощью усиленного достаточного условия Лежандра.

Сначала решаем простейшую вариационную задачу (50). Имеем третий частный случай подынтегральной функции $F = F(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид (57), а его решение – (58):

$$y = C_1 x + C_2.$$

Найдём константы, удовлетворяющие граничным условиям:

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1; \quad y(2) = 5 \Rightarrow 5 = C_1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Поэтому экстремалью, удовлетворяющей граничным условиям, будет прямая:

$$y = 2x + 1.$$

Вычислим

производную:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} (y'^4 + y'^2) = \frac{\partial}{\partial y'} (4y'^3 + 2y') = 12y'^2 + 2.$$

Очевидно, что $y' = 2$. Тогда $\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} = 12y'^2 + 2 = 50 > 0$ на

всей экстремали в целом и на сегменте $x \in [0, 2]$ в частности.

Усиленное достаточное условие Лежандра выполнено, поэтому экстремаль может быть включена в поле экстремалей.

Задания для самостоятельного решения

12.3. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_{-1}^1 (12xy + x^2 + y'^2) dx$; $y(-1) = -2$; $y(1) = 0$, в поле экстремалей.

12.4. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 9y^2 - 3x) dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 0$, в поле экстремалей.

12.5. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 1) dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 0$, в поле экстремалей.

12.6. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^1 (y'e^{y'}) dx$; $y(0) = 1$; $y(1) = 2$, в поле экстремалей.

12.7. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx$; $y(0) = 0$; $y(2\pi) = 1$, в поле экстремалей.

12.8. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^4 + 1) dx$; $y(0) = 0$; $y(1) = 0$, в поле экстремалей.

12.9. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$V[y(x)] = \int_0^{\frac{5}{4}\pi} (-y'^2 + y^2) dx$; $y(0) = 0$; $y(\frac{5}{4}\pi) = 0$, в поле экстремалей.

12.10. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - yy'^3) dx; y(0) = 0; y(1) = 0, \text{ в поле экстремалей.}$$

12.11. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx; y(0) = 0; y(1) = 1, \text{ в поле экстремалей.}$$

12.12. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^1 (6y'^2 - y'^4) dx; y(0) = 0; y(1) = 2, \text{ в поле экстремалей.}$$

12.13. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^1 yy'^3 dx; y(0) = 0; y(1) = 1, \text{ в поле экстремалей.}$$

12.14. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (-y'^2 + y^2 + x^3) dx; y(0) = 0; y(\frac{3}{4}\pi) = 0, \quad \text{в поле}$$

экстремалей.

12.15. Исследовать возможность включения экстремали, являющейся решением простейшей вариационной задачи

$$V[y(x)] = \int_0^{\pi} (y'^2 - y^2 + \cos x) dx; y(0) = 0; y(\pi) = 1, \quad \text{в поле}$$

экстремалей.

4. Приложения вариационного исчисления к решению задач механики

4.1. Задача Эйлера

Пусть однородный тонкий стержень AB опирается шарнирно двумя своими концами A и B и испытывает действие осевой сжимающей силы P , как показано на рисунке 11. При определённом значении силы стержень теряет устойчивость и начинает изгибаться. Требуется найти минимальное значение этой силы.



Рисунок 11 – Шарнирно опёртый стержень под действием сжимающей силы

Потенциальная энергия изгиба стержня определится известным выражением:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l \frac{ds}{\rho^2(s)}, \quad (95)$$

где E – модуль Юнга; I – момент инерции сечения; $l = AB$ – длина стержня; s – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль изогнутого стержня, $\rho(s)$ – функция кривизны изогнутой оси стержня, зависящая от криволинейной координаты.

При прямолинейной форме стержня очевидно $\rho = \infty \Rightarrow U = 0$. В случае появления изгиба стержня его верхний конец A опускается на величину Δ (рисунок 12):

$$\Delta = \int_0^l (1 - \cos \varphi) ds, \quad (96)$$

где φ – угол наклона касательной к искривлённому участку оси стержня к оси x .

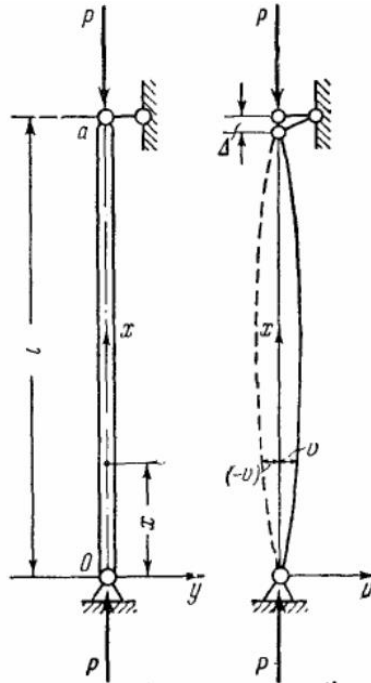


Рисунок 12 – Потеря устойчивости стержня под действием сжимающей силы

Потенциальная энергия сжатия стержня при этом изменится на величину работы силы P , совершаемой при движении точек стержня в результате его деформации. Поэтому с учётом (96) имеем:

$$\Delta \Pi = P \int_0^l (1 - \cos \varphi) ds = Pl - P \int_0^l \cos \varphi ds, \quad (97)$$

Пусть до деформации потенциальная энергия стержня была равна нулю. Это всегда можно предположить, поскольку она определяется с точностью до произвольной константы. Тогда

после деформации с учётом (95) и (97) получим следующее выражение:

$$U_0 = U - \Delta\Pi = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \frac{1}{\rho^2} + P \cos \varphi \right) ds - Pl, \quad (98)$$

Упростим выражение (98) для случая малых деформаций Δ .

Воспользуемся определением кривизны кривой: $\rho = \frac{d\varphi}{ds}$, а также

тем, что для малых углов φ будет справедливым разложение: $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Тогда, преобразовывая (98), получим:

$$U_0 = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + P - P \frac{\varphi^2}{2} \right) ds - Pl \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - P \varphi^2 \right) dx. \quad (99)$$

Хорошо известно, что в положении равновесия потенциальная энергия принимает минимальное значение. Поэтому решение задачи Эйлера для нахождения минимальной критической силы сводится к отысканию минимума функционала:

$$V[x, \varphi(x)] = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - P \varphi^2 \right) dx. \quad (100)$$

Решим сначала простейшую вариационную задачу (50). Имеем:

$$F = EI\varphi'^2 - P\varphi^2; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = 2EI\varphi'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} = 2EI; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varphi'} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2P\varphi.$$

Тогда уравнение Эйлера примет вид:

$$2EI\varphi'' + 2P\varphi = 0.$$

Обозначим:

$$k^2 = \frac{P}{EI}.$$

Тогда имеем:

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0. \quad (101)$$

Уравнение (101) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Составляем характеристическое:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = \pm ik.$$

В этом случае общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$\varphi = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Поскольку $y' = tg \varphi$, а при малых углах φ справедливо: $y' \approx tg \varphi$, то получим:

$$y' = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Интегрируем:

$$y = -C_1/k \cos kx + C_2/k \sin kx + C_3.$$

Подставляем геометрические граничные для нижнего шарнира (отсутствие перемещения в шарнире по y):

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = -C_1/k \cdot 1 + C_2/k \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_1 = C_3.$$

Теперь статические граничные условия для нижнего шарнира (отсутствие изгибающего момента в шарнире):

$$y''(0) = 0 \Rightarrow 0 = kC_1 \cdot 1 - kC_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = C_3 = 0.$$

Тогда семейство экстремалей, являющееся решением данной простейшей вариационной задачи, будет иметь вид:

$$y = C/k \sin kx. \quad (102)$$

Проверим возможность включения экстремалей (102) в поле экстремалей. Применим усиленное достаточное условие

Лежандра. Вторая производная $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} = 2EI > 0$. Условие

выполнено.

Составим уравнение Якоби (93):

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2P\varphi; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -2P; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \varphi'} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = 2EI\varphi'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi'^2} = 2EI.$$

$$(-2P)u(x) - \frac{d}{dx}(2EIu'(x)) = 0.$$

Преобразовываем:

$$u'' + k^2 u = 0.$$

Это уравнение аналогично уравнению (101). Поэтому его решение имеет вид:

$$u = C_4 \sin kx + C_5 \cos kx.$$

Причём должно соблюдаться условие: $u(0) = 0$. Таким образом:

$$u(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_4 \cdot 0 + C_5 \cdot 1 \Rightarrow C_5 = 0.$$

Тогда:

$$u = C_4 \sin kx. \quad (103)$$

Решение уравнения Якоби (103) обращается в нуль в точках $x_k = n\pi/k$; $n = 1, 2, 3, \dots$, кроме точки $(0, 0)$. Поэтому, чтобы точка $x_1 = \pi/k$ не входила в сегмент $x \in [0, l]$, необходимо, чтобы $l < \pi/k$. Тогда условие Якоби будет выполнено. Очевидно, что первой критической точкой будет как раз точка, в которой $l = \pi/k$.

Подставляя выражение для k , имеем:

$$l = \pi / \sqrt{\frac{P_1}{EI}}.$$

Выражаем отсюда первую критическую силу:

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (104)$$

Заключение

Таким образом, были введены основные понятия вариационного исчисления, рассмотрена простейшая задача вариационного исчисления и проиллюстрированы примеры её решения с учётом различных частных случаев уравнения Эйлера, а также некоторых обобщений простейшей вариационной задачи, представлены задачи для самостоятельного решения студентами.

Изложены достаточные условия экстремума функционала Вейерштрасса и Лежандра с примерами решения задач и задачами для самостоятельного решения, приведено приложение вариационного исчисления к решению задачи Эйлера об определении критической силы при потере устойчивости однородного тонкого стержня, испытывающего деформацию сжатия.

Библиографический список

1. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 202 с.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит., 1961. – 228 с.
3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.
6. Ожегова А.В. Вариационное исчисление: задачи, алгоритмы, примеры. – Казань: Казанский университет, 2013. – 40 с.
7. Авербух Ю.В. Простейшие задачи вариационного исчисления. – Екатеринбург: Изд-во Урал. – 2014. – 44 с.

Учебное издание

Седельников Андрей Валерьевич
Алексеев Алексей Владимирович

**ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЗАДАЧАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
И МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА**

Практикум

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 18.11.2024. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,25.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № . Арт. – 1(Р2ПР)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.