

Топологический заряд оптических вихрей без радиальной симметрии

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Теоретически получены значения топологических зарядов для вихревых лазерных пучков, не обладающих радиальной симметрией: асимметричных пучков Лагерра–Гаусса, Бесселя–Гаусса и Куммера, а также для вихревых пучков Эрмита–Гаусса. Все эти пучки являются суперпозицией обычных мод Лагерра–Гаусса, Бесселя–Гаусса и Эрмита–Гаусса соответственно. Но, несмотря на это, топологический заряд у всех этих мод одинаков и равен топологическому заряду одной моды n . Орбитальные угловые моменты, нормированные на мощность пучка, у всех этих пучков разные и по-разному изменяются при изменении степени асимметрии пучка. Но топологический заряд при любой степени асимметрии этих пучков остаётся постоянным и равным n . При сложении всего двух мод Эрмита–Гаусса с соседними номерами $(n, n + 1)$ и с задержкой по фазе на $\pi/2$ получается модовый пучок, топологический заряд которого равен $-(2n + 1)$. Моделирование подтверждает теоретические предсказания.

Ключевые слова: топологический заряд, оптический вихрь, асимметричный пучок.

Цитирование: Котляр, В.В. Топологический заряд оптических вихрей без радиальной симметрии / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 4. – С. 510-518. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-719.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of optical vortices devoid of radial symmetry. Computer Optics 2020; 44(4): 510-518. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-719.

Введение

Лазерные вихревые пучки [1], или оптические вихри (ОВ), интенсивно исследуются в настоящее время, так как применяются при решении многих задач оптики. ОВ применяются в квантовой информатике [2] и криптографии [3], системах беспроводной связи [4], при передаче информации по волокну [5], при генерации второй гармоники [6], в интерферометрии коротких импульсов [7], при зондировании сред с турбулентностью [8]. Вихревые пучки характеризуются двумя основными параметрами: топологическим зарядом (ТЗ) [9] и орбитальным угловым моментом (ОУМ) [10]. Обе эти характеристики описывают разные стороны ОВ: ТЗ зависит только от фазы светового поля, а ОУМ зависит как от фазы, так и от амплитуды (интенсивности). Измерять ТЗ можно с помощью цилиндрической линзы [11] или треугольной диафрагмы [12]. ОУМ можно измерять также с помощью цилиндрической линзы [13, 14]. ОУМ-спектр оптических вихрей, то есть энергетический вклад в каждую угловую гармонику, содержащуюся в лазерном пучке, можно измерять с помощью многопорядкового дифракционного оптического элемента [15] или с помощью моментов интенсивности [16, 17]. Для ОВ с радиальной симметрией (например, пучки Лагерра–Гаусса (ЛГ) [18], Бесселя–Гаусса (БГ) [19]), комплексную амплитуду которых можно представить в виде $E(r, \varphi, z) = A(r, z) \exp(in\varphi)$, где

$A(r, z)$ – радиальная составляющая комплексной амплитуды пучка, n – топологический заряд пучка, (r, φ, z) – цилиндрические координаты, ТЗ равен нормированному на мощность пучка ОУМ и равен n . Причём для радиальных ОВ с целым ТЗ он сохраняется при распространении пучка в пространстве. Для других вихревых пучков ТЗ нужно вычислять отдельно. Если ОУМ пучка сохраняется при распространении и его можно вычислять в начальной плоскости, то ТЗ не всегда сохраняется. Например, ТЗ комбинированного пучка, состоящего из двух мод Лагерра–Гаусса с разными радиусами перетяжки Гауссова пучка, не сохраняется [20].

В этой работе мы найдём ТЗ некоторых вихревых лазерных пучков, не обладающих радиальной симметрией. Эти пучки были ранее рассмотрены авторами, и для них были найдены нормированные ОУМ, но ТЗ этих пучков не рассматривался. Мы найдём ТЗ для асимметричного пучка Лагерра–Гаусса [21], асимметричного пучка Бесселя–Гаусса [22], асимметричного пучка Куммера [23], суммы двух мод Эрмита–Гаусса [24] и вихревого пучка Эрмита–Гаусса [25].

В [26] мы уже рассматривали ТЗ некоторых видов оптических вихрей без круговой симметрии. Асимметрия появлялась в результате ограничения асимметричной диафрагмой, поперечного смещения оптического вихря, соосной интерференции оптического вихря с другими осевыми вихрями или с Гауссовым

пучком, или растяжения винтовой фазы по одной декартовой координате. В данной работе мы рассматриваем ТЗ пучков, асимметрия которых вызвана либо поперечным смещением их комплексной амплитуды на мнимое расстояние, либо суперпозицией невихревых пучков Эрмита–Гаусса.

1. Топологический заряд асимметричного пучка Лагерра–Гаусса

При распространении в свободном пространстве на произвольном расстоянии z комплексная амплитуда асимметричного пучка ЛГ (аЛГ-пучка) [21] имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)} \right]^n \times \times [(x-x_0) + i(y-y_0)]^n L_m^n \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \times \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n+2m+1)\zeta(z) \right], \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2, \\ w(z) &= w \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \\ R(z) &= z \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right], \\ \zeta(z) &= \arctg \left(\frac{z}{z_R} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

где (x, y, z) и (r, φ, z) – декартовы и цилиндрические координаты, (x_0, y_0) – комплексные координаты смещения центра пучка ЛГ, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n – ТЗ оптического вихря, $L_m^n(x)$ – присоединённый многочлен Лагерра, $z_R = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ . В поперечном сечении интенсивность такого пучка не имеет радиальной симметрии, как у обычных пучков ЛГ [18]. Если (x_0, y_0) – действительные числа, то пучок (1) становится обычной модой ЛГ, смещённой с оптической оси.

В дальнейшем мы будем сравнивать полученные в этой работе ТЗ различных ОВ с их ОУМ, которые были получены ранее. Для этого приведём здесь выражения, по которым рассчитывается ОУМ параксиальных лазерных пучков и мощность пучка [21]:

$$J_z = \text{Im} \iint_{\mathbb{R}^2} E^* \left(x \frac{\partial E}{\partial y} - y \frac{\partial E}{\partial x} \right) dx dy, \tag{3}$$

$$W = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E dx dy. \tag{4}$$

Нормированный на мощность ОУМ аЛГ-пучка имеет вид [21]:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{2 \text{Im}(x_0^* y_0)}{w^2} \left[\frac{L_m \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)}{L_m \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)} + \frac{L_{m+n} \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)}{L_{m+n} \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)} - 1 \right], \tag{5}$$

где $Q = 2i\sqrt{(\text{Im } x_0)^2 + (\text{Im } y_0)^2}$. (6)

Увеличение или уменьшение нормированного ОУМ по сравнению с величиной ТЗ n полностью определяется знаком величины $\text{Im}(x_0^* y_0)$, так как выражение в квадратных скобках (5) всегда больше или равно 1. Рассчитаем ТЗ аЛГ-пучка (1) по формуле Берри [9]:

$$\begin{aligned} TC &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Выберем комплексное смещение в (2) в виде $x_0 = aw$, $y_0 = iaw$, тогда множитель в (1) $[(x-x_0) + i(y-y_0)]^n$ будет иметь простой вид $r^n e^{in\varphi}$, а переменная ρ^2 в (2) будет иметь следующий вид: $\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 - 2awre^{i\varphi}$, где a – безразмерная константа, от величины которой зависит асимметрия пучка. С учётом этих замечаний производная по углу φ от функции (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} &= inE(r, \varphi, z) - \\ &- \left[-\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] (2iawre^{i\varphi}) E(r, \varphi, z) - \\ &- \frac{4iawre^{i\varphi}}{w^2(z)} \frac{1}{L_m^n(\xi)} \frac{d}{d\xi} L_m^n(\xi) E(r, \varphi, z), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\xi = \frac{2\rho^2}{w^2(z)}.$$

Подставим (8) в (7), получим:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ in - \left[-\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] (2iarwe^{i\varphi}) - \right. \\ &- \left. \frac{4iawre^{i\varphi}}{w^2(z)} \frac{1}{L_m^n(\xi)} \frac{\partial L_m^n(\xi)}{\partial \xi} E(r, \varphi, z) \right\} = \\ &= n + \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \left[\left(-\frac{2}{w^2(z)} + \frac{ik}{R(z)} \right) raw \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi} \right] - \\ &- \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2rnawe^{i\varphi}}{r(r-2awe^{i\varphi})} = n. \end{aligned} \tag{9}$$

При получении третьего слагаемого в (9) при переходе к пределу $r \rightarrow \infty$ воспользовались асимптотикой для присоединенных многочленов Лагерра $[L_m^n(x)]^{-1} \partial L_m^n(x) / \partial x \approx n/x$ (так как число нулей у многочлена конечно, мы выбираем радиус окружности r , за которой полином не обращается в нуль). Третье слагаемое в (9) при переходе к пределу $r \rightarrow \infty$ равно нулю, так как в знаменателе вторая степень, а в числителе первая степень радиальной переменной r . Второе слагаемое в (9) тоже равно нулю, но по другой причине. Хотя в числителе во втором слагаемом в качестве сомножителя присутствует радиальная переменная r , которая стремится к бесконечности, но в числителе также есть интеграл по углу φ от экспоненты $\exp(i\varphi)$ от 0 до 2π , который равен нулю. Таким образом, из (9) следует, что ТЗ асимметричной моды ЛГ будет равен n . То есть комплексное смещение координат для обычной моды ЛГ приводит к изменению её формы (1), изменению её ОУМ (5), но не изменяет её ТЗ (9). Заметим также, что ТЗ аЛГ-пучка (1), равный n , сохраняется при распространении, так как расчёт (9) был сделан при любом z .

2. Топологический заряд асимметричного пучка Бесселя–Гаусса

Запишем комплексную амплитуду пучка Бесселя–Гаусса (БГ-пучки) [19] в начальной плоскости $z = 0$:

$$E_n(r, \varphi, z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} + in\varphi\right) J_n(\alpha r), \quad (10)$$

где $\alpha = k \sin \theta_0 = (2\pi/\lambda) \sin \theta_0$ – масштабирующий множитель, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , θ_0 – угол конической волны, формирующей пучок Бесселя. В любой другой плоскости z комплексная амплитуда (10) будет иметь вид:

$$E_n(r, \varphi, z) = q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + in\varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha r}{q(z)}\right], \quad (11)$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ – длина Рэлея, ω_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Комплексная амплитуда асимметричного пучка Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) имеет вид [22]:

$$E_n(r, \varphi, z; c) = \frac{1}{q(z)} \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)} \right]^{n/2} \times \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{q(z)\omega_0^2} + in\varphi\right) \times J_n\left\{q^{-1}(z) \sqrt{\alpha r [\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)]}\right\}. \quad (12)$$

В (12) c – это безразмерная постоянная, от которой зависит асимметрия аБГ-пучка. Пучок аБГ (12), в отличие от аЛГ-пучка (1), получен не с помощью комплексного смещения координат, а с помощью суперпозиции обычных бесселевых пучков, которая математически выражается с помощью справочного ряда [22]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_{k+v}(x) = x^{v/2} (x-2t)^{-v/2} J_v(\sqrt{x^2-2tx}). \quad (13)$$

Можно получить выражение для ОУМ для аБГ-пучка, нормированного на мощность [22]:

$$\frac{J_z}{W} = n + \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} p I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right] \cdot \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где $y = \alpha^2 \omega_0^2 / 4$. Выражение (14) дальше упростить не удаётся. Из (14) следует, что ОУМ аБГ-пучков больше n , так как все слагаемые рядов в (14) положительные. То есть с ростом параметра c растёт асимметрия аБГ-пучка и почти линейно растёт его ОУМ. Из четырёх возможных причин увеличения ОУМ (рост топологического заряда, смещение центра тяжести, астигматизм и анизотропия среды) в данном случае ОУМ возрастает из-за смещения центра тяжести, так как, согласно (12), оптический вихрь остаётся на оптической оси, а согласно (13) с ростом асимметрии больший вклад начинают давать моды Бесселя высших порядков, у которых главное кольцо интенсивности имеет больший радиус, что приводит к удалению центра тяжести пучка от оптической оси. Найдём ТЗ аБГ-пучка (12) по формуле (7). Но сначала выпишем производную от функции (12) по азимутальному углу (пусть $J_n(x) \neq 0$, чтобы не делить на ноль):

$$\frac{\partial E_n(r, \varphi, z; c)}{\partial \varphi} = inE_n(r, \varphi, z; c) + \frac{incq(z)e^{i\varphi}}{\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}} E_n(r, \varphi, z; c) - \frac{ic(\alpha r)^{1/2} e^{i\varphi}}{[\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}]^{1/2}} J_n^{-1}(x) \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} E_n(r, \varphi, z; c), \quad (15)$$

где $x = q^{-1}(z) \{ \alpha r [\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)] \}^{1/2}$. Тогда (7) примет вид:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ n + \frac{ncq(z)e^{i\varphi}}{\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}} - \frac{c(\alpha r)^{1/2} e^{i\varphi}}{[\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}]^{1/2}} \frac{1}{J_n(x)} \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} \right\} = n + \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{cJ_n^{-1}(\alpha r)}{2\pi} J_n'(\alpha r) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi} \right] = n. \quad (16)$$

В (16) второе слагаемое под интегралом стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, так как в знаменателе стоит первая степень радиальной переменной r . Третье слагаемое преобразуется в слагаемое, которое также равно нулю, но по другой причине. В третьем слагаемом в (16) присутствует отношение производной от функции Бесселя к самой функции Бесселя (функции Бесселя вынесены из интеграла, потому что при больших значениях r верно неравенство $|\alpha r| \gg |2cq(z)|$, и потому слагаемым $2cq(z)e^{i\varphi}$ в аргументе функции Бесселя мы пренебрегли). При $r \rightarrow \infty$ это отношение может быть любым числом, так как асимптотики функции Бесселя и её производной при большом аргументе имеют вид:

$$J_n(x \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{dJ_n}{dx}(x \gg 1) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
(17)

а их отношение является тангенсом. Но также в третьем слагаемом в (16) присутствует интеграл по углу φ от экспоненты $\exp(i\varphi)$ от 0 до 2π , который равен нулю. Поэтому и все третье слагаемое в (16) будет равно нулю. Из (16) следует, что при любой степени асимметрии (при любом c) и на любом расстоянии от начальной плоскости (при любом z) у аБГ-пучка ТЗ будет равен n . Хотя ОУМ такого пучка будет увеличиваться с ростом степени асимметрии (14).

3. Топологический заряд асимметричного пучка Куммера

В [23] рассмотрены асимметричные пучки Куммера (аК-пучки), являющиеся точными решениями параксиального уравнения Гельмгольца. Комплексная амплитуда аК-пучка получается путём смещения в комплексную плоскость координат ($x \rightarrow x - aw$, $y \rightarrow y - iaw$, где a – безразмерная действительная величина) обычного гипергеометрического пучка (или обычного пучка Куммера) [23] при любом z :

$$E_s(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{zq(z)} \right) q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{kwr}{2z\sqrt{q(z)}} \right)^n \times$$

$$\times \exp\left(in\varphi + \frac{iks^2}{2z}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right),$$
(18)

где $s^2 = r(r - 2awe^{i\varphi})$, $\xi = [kws / (2z\sqrt{q(z)})]^2$, а ${}_1F_1(a, b, z)$ – функция Куммера (вырожденная гипергеометрическая функция). В начальной плоскости ($z=0$) комплексная амплитуда (18) смещённого пучка Куммера принимает вид:

$$E_s(r, \varphi, z=0) = \frac{r^n e^{in\varphi}}{w^n} \left(\frac{s}{w}\right)^{m-n+i\gamma} \exp\left(-\frac{s^2}{w^2}\right). \quad (19)$$

Производная от функции (19) по углу φ имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = inE - (m - n + i\gamma) \frac{irawe^{i\varphi}}{s^2} E + \frac{2irae^{i\varphi}}{w} E. \quad (20)$$

Подставим (20) в (7), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in - \frac{i(m-n+i\gamma)rawe^{i\varphi}}{r(r-2awe^{i\varphi})} + \frac{2irae^{i\varphi}}{w} \right) =$$

$$= n + \frac{ar}{\pi w} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = n.$$

Из трёх слагаемых под интегралом в (21) первое равно n , второе слагаемое после перехода к пределу $r \rightarrow \infty$ равно нулю, так как в знаменателе стоит квадрат, а в числителе первая степень радиальной переменной r . Третье слагаемое тоже равно нулю, так как интеграл по углу на периоде от косинуса равен точно нулю, хотя и умножается этот интеграл на величину, стремящуюся к бесконечности ($r \rightarrow \infty$). Таким образом, ТЗ асимметричного пучка Куммера в начальной плоскости равен n . С помощью (18) аналогично можно показать, что ТЗ (18) при любом z будет равен n .

4. Топологический заряд оптического вихря в виде суммы двух мод Эрмита–Гаусса

В [24] было показано, что при сложении двух пучков Эрмита–Гаусса (ЭГ) с номерами $(n, n+1)$ и $(n+1, n)$ и с фазовым сдвигом на $\pi/2$ формируется оптический вихрь с орбитальным угловым моментом, пропорциональным номеру $(n+1)$. В этом параграфе мы найдём топологический заряд такого ОВ. Пусть комплексная амплитуда композиции двух пучков ЭГ в начальной плоскости ($z=0$) имеет вид:

$$E(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}(x^2 + y^2)\right] \times$$

$$\times \left[H_n(wx) H_{n+1}(wy) + i\gamma H_{n+1}(wx) H_n(wy) \right],$$
(22)

где $w = \sqrt{2}/w_0$, w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка. Постоянную γ положим равной единице. Для светового поля (22) можно получить нормированный ОУМ для любого целого n [24]:

$$\frac{J_z}{W} = -(n+1). \quad (23)$$

Заметим, что из-за того, что сумма номеров обеих мод в (22) одинакова, то линейная комбинация (22) будет являться модой (фазы Гоу $(m+n+1) \arctg(z/z_0)$ у обеих мод тоже одинаковые) и при распространении будет сохранять свой вид, меняясь только масштабно.

Прежде чем вычислять ТЗ по формуле (7), ответ можно предсказать сразу. Действительно, первое слагаемое в (22) имеет n вертикальных линий нулей и

$(n + 1)$ горизонтальных линий нулей. А второе слагаемое в (22), наоборот, имеет $(n + 1)$ вертикальных линий нулей (которые не совпадают с вертикальными линиями нулей первого слагаемого) и n горизонтальных линий нулей. Поэтому амплитуда (22) будет равна нулю в точках пересечения горизонтальных и вертикальных линий. Точек пересечения с амплитудой вблизи нуля $x + iy$ будет n^2 , а точек пересечения с амплитудой вблизи нуля $y + ix$ будет $(n + 1)^2$. Поэтому ТЗ поля (22) будет равен $TC = n^2 - (n + 1)^2 = -(2n + 1)$.

Для определения ТЗ пучка по его комплексной амплитуде (22) представим моды ЭГ в (22) через моды ЛГ (выражение (3.11) в [27]):

$$i^m H_n(\xi) H_m(\eta) = \sum_{k=0}^{[(n+m)/2]} (-2)^k k! P_k^{(n-k, m-k)}(0) \times \left[(\xi + i\eta)^{n+m-2k} + (-1)^m (\xi - i\eta)^{n+m-2k} \right] \times L_k^{n+m-2k}(\xi^2 + \eta^2), \quad (24)$$

где P – многочлены Якоби, а штрих у знака суммы означает, что при чётных n и m последнее слагаемое надо разделить пополам.

Произведения полиномов Эрмита из (22) тогда имеют вид:

$$H_n(wx) H_{n+1}(wy) = i^{-n-1} \sum_{k=0}^n (-2)^k k! P_k^{(n-k, n+1-k)}(0) \times w^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 x^2 + w^2 y^2) \times \left[(x + iy)^{2n+1-2k} + (-1)^{n+1} (x - iy)^{2n+1-2k} \right],$$

$$H_{n+1}(wx) H_n(wy) = i^{-n} \sum_{k=0}^n (-2)^k k! P_k^{(n+1-k, n-k)}(0) \times w^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 x^2 + w^2 y^2) \times \left[(x + iy)^{2n+1-2k} + (-1)^n (x - iy)^{2n+1-2k} \right]. \quad (25)$$

Используя эти выражения, перепишем (22) в полярных координатах:

$$E(r, \varphi, 0) = (-i)^{n+1} \exp\left(-\frac{w^2 r^2}{2}\right) \times \sum_{k=0}^n (-2)^k k! (wr)^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 r^2) \times \left[A_k^- e^{i(2n+1-2k)\varphi} - (-1)^n A_k^+ e^{-i(2n+1-2k)\varphi} \right], \quad (27)$$

где $A_k^\pm = P_k^{(n-k, n+1-k)}(0) \pm P_k^{(n+1-k, n-k)}(0)$.

Получилась суперпозиция конечного числа мод ЛГ. Согласно [26], ТЗ такой суперпозиции равен ТЗ моды наивысшего (по модулю) порядка. В (29) таких

мод две (при $k=0$), поэтому ТЗ такой суперпозиции равен либо $2(n + 1)$, либо $-2(n + 1)$, в зависимости от того, у какой моды больше весовой коэффициент. Для полиномов Якоби известно свойство:

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(-z) = (-1)^k P_k^{(\beta, \alpha)}(z). \quad (28)$$

Поэтому $P_0^{(n, n+1)}(0) = P_0^{(n+1, n)}(0)$ и весовой коэффициент A_0^- при моде ЛГ порядка $2(n + 1)$ равен нулю. Следовательно,

$$TC = -(2n + 1). \quad (29)$$

5. Топологический заряд вихревого пучка Эрмита–Гаусса

В [25] показано, что если сложить не две моды ЭГ, а несколько, используя справочное выражение из [27]

$$\sum_{k=0}^n \frac{n! t^k}{k!(n-k)!} H_k(x) H_{n-k}(y) = (1 + t^2)^{n/2} H_n\left(\frac{tx + y}{\sqrt{1 + t^2}}\right), \quad (30)$$

то можно получить вихревой пучок Эрмита–Гаусса, комплексная амплитуда которого имеет вид:

$$U_n(x, y, z) = i^n \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \times (1 - a^2)^{n/2} H_n\left(\frac{iax + y}{\sqrt{1 - a^2}}\right). \quad (31)$$

Так как в (30) сумма номеров ЭГ-мод постоянная $k + (n - k) = n = \text{const}$, то все ЭГ-моды в линейной комбинации (30) имеют одинаковую фазовую скорость (одинаковые фазы Гоу $(n + m + 1) \arctg(z/z_0)$), и поэтому весь пучок (31) тоже является парааксиальной модой и распространяется без изменения поперечной структуры интенсивности (с точностью до масштаба и вращения). Орбитальный угловой момент пучка (31) выражается формулой [25]:

$$\frac{J_z}{I} = -\frac{2an}{1 + a^2}. \quad (32)$$

Постоянный параметр a в (31) и (32) можно связать с углом поворота α цилиндрической линзы, которая преобразует пучок Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ в вихревой пучок ЭГ (31):

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad (33)$$

Найдем ТЗ вихревого пучка ЭГ (31). Для этого подставим выражение (31) в формулу (7), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} =$$

$$= \frac{n}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{H_{n-1}(ir \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha) (-ir \sin \varphi \cos \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha)}{H_n(ir \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha)}. \quad (34)$$

Перейдём к пределу $r \rightarrow \infty$ в (34) и заменим многочлены Эрмита на одночлены с максимальной степенью $H_n(x \gg 1) \approx (2x)^n$. Тогда вместо (34) получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n(-i \sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha)}{(i \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{-n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\text{tg} \alpha}{\cos^2 \varphi + \text{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi} = -n. \quad (35)$$

При получении (35) воспользовались справочным интегралом [27]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (36)$$

Сравнивая выражения для ОУМ (30) и ТЗ (33) для вихревого пучка ЭГ, видно, что ТЗ пучка не зависит от параметра a или от угла наклона α цилиндриче-

ской линзы (33), а ОУМ зависит от этого параметра. Поэтому обе характеристики вихревых пучков (ОУМ и ТЗ) одинаково важны для их описания.

6. Моделирование

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Бесселя–Гаусса в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 1а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 1в, г) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 1д, е). Видно, что в начальной плоскости, кроме оптического вихря 8-го порядка, имеется множество оптических вихрей 1-го порядка. На расстоянии Рэлея такой вихрь всего один (в нижней левой части рис. 1г). В дальней зоне остаётся только центральный вихрь 8-го порядка. Поэтому при расчёте ТЗ были получены значения 11,9926 (при $z=0$), 8,8837 (при $z=z_0$) и 7,9393 (при $z=10z_0$).

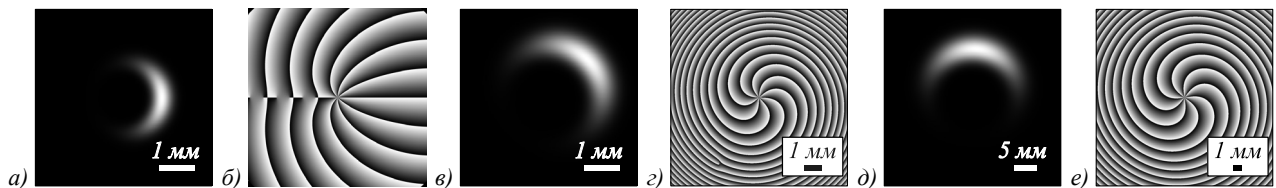


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) аБГ-пучка в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки $w_0=0,5$ мм, порядок оптического вихря $n=8$, масштабный множитель $\alpha=1/w_0$, параметр асимметрии $c=w_0/40$, расстояние распространения $z=0$ (начальная плоскость) (а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (в, г), и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (д, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R=10$ мм ($z=0$), $R=10$ мм ($z=z_0$), $R=20$ мм ($z=10z_0$), число отсчётов – 2048×2048 . ТЗ рассчитывался вдоль окружности $x^2+y^2=R_1^2$, где $R_1=0,8R$. Полученные значения равны 11,9926 (а, б), 8,8837 (в, г) и 7,9393 (д, е)

Аналогично на рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Лагерра–Гаусса в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 2а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 2в, г) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 2д, е). Видно, что в начальной плоскости, кроме оптического вихря 8-го порядка, имеется несколько оптических

вихрей первого порядка. На расстоянии Рэлея таких вихрей несколько (отчётливо видны три вихря слева от центра рис. 1г). В дальней зоне остаётся только центральный вихрь 8-го порядка. При расчёте ТЗ были получены значения 7,9974 (при $z=0$), 7,9925 (при $z=z_0$) и 7,9226 (при $z=10z_0$).

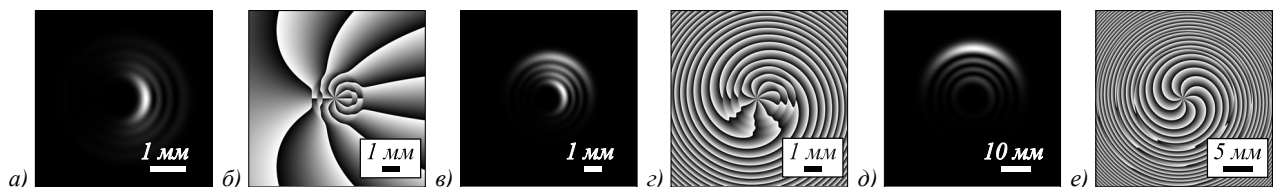


Рис. 2. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) аЛГ-пучка в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки $w_0=0,5$ мм, порядок оптического вихря $n=8$, радиальный индекс моды $t=3$, вектор смещения $(x_0, y_0)=(0, i w_0/4)$, расстояние распространения $z=0$ (начальная плоскость) (а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (в, г), и $z=10z_0$ (дальняя зона) (д, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R=5$ мм ($z=0$), $R=5$ мм ($z=z_0$), $R=30$ мм ($z=10z_0$), число отсчётов – 2048×2048 . ТЗ рассчитывался по окружности $x^2+y^2=R_1^2$, где $R_1=0,8R$. Полученные значения равны 7,9974 (а, б), 7,9925 (в, г) и 7,9226 (д, е)

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Куммера в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 3а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 3в, г) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 3д, е). Видно, что, не-

смотря на асимметричное распределение интенсивности, во всех плоскостях в центре имеется оптический вихрь первого порядка. При расчёте ТЗ были получены значения 0,9981 (при $z=0$), 0,9992 (при $z=z_0$) и 0,9999 (при $z=10z_0$).

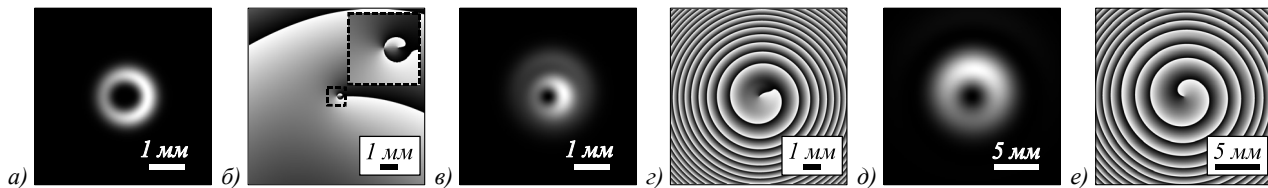


Рис. 3. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) асимметричного пучка Куммера в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0=0,5$ мм, порядок оптического вихря $n=1$, параметры t и γ равны $t=3$ и $\gamma=0$, параметр смещения $a=0,2$, расстояние распространения $z=0$ (в начальной плоскости) (а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (в, г), и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (д, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R=5$ мм ($z=0$), $R=5$ мм ($z=z_0$), $R=10$ мм ($z=10z_0$), число отсчётов на каждом рисунке – 2048×2048 . Вставка на рис. 3б показывает увеличенный фрагмент в центре. ТЗ вычислялся на окружности $x^2+y^2=R_1^2$, где $R_1=0,8R$. Полученные значения равны 0,9981 (а, б), 0,9992 (в, г) и 0,9999 (д, е)

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы суммы двух мод Эрмита–Гаусса в начальной плоскости. Видно, что, несмотря на большое количество изолированных нулей, почти все они компенсируют друг друга (вихри первого и минус первого порядка) и на бесконечности остаётся лишь небольшое число скачков фазы. Это следует из того, что при обходе по контуру вблизи края рис. 4в (против часовой стрелки) имеется ровно 11 скачков фазы на -2π (по-

казаны стрелками). При расчёте ТЗ было получено значение $-10,9550$, что соответствует теоретическому значению $-(2n+1)$.

На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы вихревой моды Эрмита–Гаусса в начальной плоскости. Видно, что на вертикальной оси расположено 10 изолированных нулей интенсивности минус первого порядка, которые в сумме дают ТЗ, равный -10 . При расчёте ТЗ было получено значение $-9,9993$.

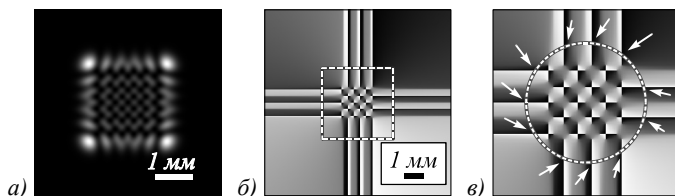


Рис. 4. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суммы двух мод Эрмита–Гаусса в начальной плоскости, а также увеличенный фрагмент (в) фазы в пунктирном квадрате на рис. 4б. Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0=0,5$ мм, порядок оптического вихря $n=5$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R=5$ мм, число отсчётов – 2048×2048 . Стрелками (в) показаны 11 скачков фазы на -2π при обходе вдоль пунктирной окружности против часовой стрелки. ТЗ вычислялся на окружности $x^2+y^2=R_1^2$, где $R_1=0,8R$. Полученное значение равно $-10,9550$

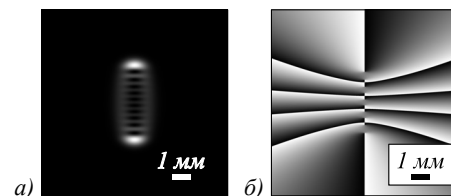


Рис. 5. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) вихревой моды Эрмита–Гаусса в начальной плоскости. Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0=0,5$ мм, порядок оптического вихря $n=10$, параметр асимметрии $a=0,3$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R=5$ мм, число отсчётов – 2048×2048 . ТЗ вычислялся на окружности $x^2+y^2=R_1^2$, где $R_1=0,8R$. Полученное значение равно $-9,9993$

Заключение

В работе показано, что если известные вихревые лазерные пучки с радиальной симметрией (Лагерра–Гаусса и Куммера) видоизменить с помощью комплексного смещения координат, то и вид поперечного распределения интенсивности, и орбитальный угловой момент также изменятся и будут зависеть от степени асимметрии, а топологический заряд асимметричных пучков Лагерра–Гаусса и Куммера останется таким же, как у радиально-симметричных пучков, равным n . Показано также, что если известный пучок Бесселя–Гаусса с радиальной симметрией и тополо-

гическим зарядом n подвергнуть гибриднему преобразованию, когда Гауссов пучок остаётся без изменения, а координаты пучка Бесселя смещаются в комплексную плоскость, то у получившегося асимметричного пучка Бесселя–Гаусса топологический заряд останется равным n . Известно, что пучок Эрмита–Гаусса не несёт топологический заряд (он топологически нейтральный). Если такой пучок проходит через цилиндрическую линзу, ось которой составляет некоторый угол с декартовыми координатами, то получившийся пучок Эрмита–Гаусса (вихревой пучок Эрмита–Гаусса) будет обладать орбитальным угловым моментом, зависящим от угла поворота цилин-

дической линзы. Но, как оказалось, топологический заряд такого пучка не будет зависеть от поворота цилиндрической линзы и будет равен n . Вихревой пучок Эрмита–Гаусса является конечной суперпозицией обычных безвихревых пучков Эрмита–Гаусса. Но можно создать вихревой пучок, сложив всего два пучка Эрмита–Гаусса, например, с номерами $(n, n+1)$ и $(n+1, n)$ и с задержкой по фазе $\pi/2$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003, расчёт топологического заряда асимметричных оптических вихрей), Российского научного фонда (грант 18-19-00595, расчёт топологического заряда вихревых пучков Эрмита–Гаусса), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (результаты моделирования).

Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-138-54211-2.
2. **Li, S.** Deterministic generation of orbital-angular-momentum multiplexed tripartite entanglement / S. Li, X. Pan, Y. Ren, H. Liu, S. Yu, J. Jing // *Physical Review Letters*. – 2020. – Vol. 124, Issue 8. – 083605. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.083605.
3. **Hiekkamaki, M.** Near-perfect measuring of full-field transverse-spatial modes of light / M. Hiekkamaki, S. Prabhakar, R. Fickler // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 22. – P. 31456-31464. – DOI: 10.1364/OE.27.031456.
4. **Li, S.** Efficient optical angular momentum manipulation for compact multiplexing and demultiplexing using a dielectric metasurface / S. Li, X. Li, L. Zhang, G. Wang, L. Zhang, M. Liu, C. Zeng, L. Wang, Q. Sun, W. Zhao, W. Zhang // *Advanced Optical Materials*. – 2020. – Vol. 8, Issue 8. – 1901666. – DOI: 10.1002/adom.201901666.
5. **Pryamikov, A.** Light transport and vortex-supported waveguiding in micro-structured optical fibers / A. Pryamikov, G. Alagashv, G. Falkovich, S. Turitsyn // *Scientific Reports*. – 2020. – Vol. 10. – 2507. – DOI: 10.1038/s41598-020-59508-z.
6. **Dai, K.** Second-harmonic generation of asymmetric Bessel-Gaussian beams carrying orbital angular momentum / K. Dai, W. Li, K.S. Morgan, Y. Li, J.K. Miller, R.J. Watkins, E.G. Johnson // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28. – P. 2536-2546. – DOI: 10.1364/OE.381679.
7. **Dimitrov, N.** Inverted field interferometer for measuring the topological charges of optical vortices carried by short pulses / N. Dimitrov, M. Zhekova, G.G. Paulus, A. Dreischuh // *Optics Communications*. – 2020. – Vol. 456. – 124530. – DOI: 10.1016/j.optcom.2019.124530.
8. **Watkins, R.J.** Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams / R.J. Watkins, K. Dai, G. White, W. Li, J.K. Miller, K.S. Morgan, E.G. Johnson // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 2. – P. 924-935. – DOI: 10.1364/OE.380405.
9. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
10. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – 8185. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
11. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
12. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chavez-Cerda // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105. – 053904. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.053904.
13. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
14. **Kotlyar, V.V.** Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 8. – P. 11236-11251. – DOI: 10.1364/OE.27.011236.
15. **Kotlyar, V.V.** Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45, Issue 7. – P. 1495-1506. – DOI: 10.1080/09500349808230644.
16. **Волярь, А.В.** По ту сторону интенсивности или моменты интенсивности и измерение спектра оптических вихрей сложных пучков / А.В. Волярь, М.В. Брещко, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 736-743. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
17. **Волярь, А.В.** Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Волярь, М.В. Брещко, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров, В.В. Милоков // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 723-733. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
18. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – Sausalito, CA: University Science Books, 1986.
19. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64, Issue 6. – P. 491-495. – DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
20. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vastnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075. – DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.
21. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93, Issue 6. – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
22. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 9. – P. 1977-1983. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977.
23. **Kotlyar, V.V.** Kummer laser beams with a transverse complex shift / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, E.G. Abramochkin // *Journal of Optics*. – 2020. – Vol. 22, Issue 1. – 015606. – DOI: 10.1088/2040-8986/ab5ef1.

-
24. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31, Issue 2. – P. 274-282. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
25. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, Issue 5. – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
26. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // Optics Express. – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281. – DOI: 10.1364/OE.386401.
27. **Волостников, В.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / В.Г. Волостников, Е.Г. Абрамочкин. – М.: Физматлит, 2010. – ISBN: 978-5-9221-1216-1.
28. **Gradshteyn, I.S.** Table of integrals, series, and products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – New York: Academic, 1965.
-

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 500 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 19 марта 2020 г. Окончательный вариант – 23 апреля 2020 г.

Topological charge of optical vortices devoid of radial symmetry

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

²Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

Here we theoretically obtain values of the topological charge (TC) for vortex laser beams devoid of radial symmetry: asymmetric Laguerre-Gaussian (LG) beams, Bessel-Gaussian (BG) beams, Kummer beams, and vortex Hermite-Gaussian (HG) beams. All these beams consist of conventional modes, namely, LG, BG, or HG modes, respectively. However, all these modes have the same TC equal to that of a single constituent mode n . Orbital angular momenta (OAM) of all these beams, normalized to the beam power, are different and changing differently with varying beam asymmetry. However, for arbitrary beam asymmetry, TC remains unchanged and equals n . Superposition of just two HG modes with the adjacent numbers ($n, n+1$) and with the phase retardation of $\pi/2$ yields a modal beam with the TC equal to $-(2n+1)$. Numerical simulation confirms the theoretical predictions.

Keywords: topological charge, optical vortex, asymmetric beam.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of optical vortices devoid of radial symmetry. *Computer Optics* 2020; 44(4): 510-518. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-719.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 18-29-20003 (section “Derivation of the topological charge of asymmetric optical vortices”), the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00595 (section “Derivation of the topological charge of Hermite-Gaussian vortex beams”), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a government project of FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (section “Numerical simulation results”).

References

- [1] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
 - [2] Li S, Pan X, Ren Y, Liu H, Yu S, Jing J. Deterministic generation of orbital-angular-momentum multiplexed tripartite entanglement. *Phys Rev Lett* 2020; 124(8): 083605. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.083605.
 - [3] Hiekkamaki M, Prabhakar S, Fickler R. Near-perfect measuring of full-field transverse-spatial modes of light. *Opt Express* 2019; 27(22): 31456-31464. DOI: 10.1364/OE.27.031456.
 - [4] Li S, Li X, Zhang L, Wang G, Zhang L, Liu M, Zeng C, Wang L, Sun Q, Zhao W, Zhang W. Efficient optical angular momentum manipulation for compact multiplexing and demultiplexing using a dielectric metasurface. *Adv Opt Mater* 2020; 8(8): 1901666. DOI: 10.1002/adom.201901666.
 - [5] Pryamikov A, Alagashev G, Falkovich G, Turitsyn S. Light transport and vortex-supported wave-guiding in micro-structured optical fibers. *Sci Rep* 2020; 10: 2507. DOI: 10.1038/s41598-020-59508-z.
 - [6] Dai K, Li W, Morgan KS, Li Y, Miller JK, Watkins RJ, Johnson EG. Second-harmonic generation of asymmetric Bessel-Gaussian beams carrying orbital angular momentum. *Opt Express* 2020; 28: 2536-2546. DOI: 10.1364/OE.381679.
 - [7] Dimitrov N, Zhekova M, Paulus GG, Dreischuh A. Inverted field interferometer for measuring the topological charges of optical vortices carried by short pulses. *Opt Commun* 2020; 456: 124530. DOI: 10.1016/j.optcom.2019.124530.
 - [8] Watkins RJ, Dai K, White G, Li W, Miller JK, Morgan KS, Johnson EG. Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams. *Opt Express* 2020; 28(2): 924-935. DOI: 10.1364/OE.380405.
 - [9] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
 - [10] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
 - [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
 - [12] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chavez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 053904. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.053904.
 - [13] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
 - [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments. *Opt Express* 2019; 27(8): 11236-11251. DOI: 10.1364/OE.27.011236.
 - [15] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(7): 1495-1506. DOI: 10.1080/09500349808230644.
 - [16] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams.
-

-
- Computer Optics 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [17] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA, Milyukov VV. Sectorial perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge. Computer Optics 2019; 43(5): 723-734. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
- [18] Siegman AE. Lasers. Sausalito, CA: University Science Books; 1986.
- [19] Gori F, Guattary G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. Opt Commun 1987; 64(6): 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
- [20] Soskin MS, Gorshkov VN, Vastnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex. Phys Rev A 1997; 56(5): 4064-4075. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.
- [21] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. Phys Rev A 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Skidanov RV, Soifer VA. Asymmetric Bessel-Gauss beams. J Opt Soc Am A 2014; 31(9): 1977-1983. DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977.
- [23] Kotlyar VV, Kovalev AA, Abramochkin EG. Kummer laser beams with a transverse complex shift. J Opt 2020; 22(1): 015606. DOI: 10.1088/2040-8986/ab5ef1.
- [24] Kotlyar VV, Kovalev AA. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. J Opt Soc Am A 2014; 31(2): 274-282. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
- [25] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. Opt Lett 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [26] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. Opt Express 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
- [27] Volostnikov VG, Abramochkin EG. The modern optics of the Gaussian beams [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
- [28] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Table of integrals, series, and products. New York: Academic; 1965.
-

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Received March 19, 2020. The final version – April 23, 2020.
