

Способы дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов

В.В. Сюзев¹, А.В. Пролетарский¹, Д.А. Миков¹, И.И. Дейкин¹
¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5/1

Аннотация

Статья посвящена способам дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов в рамках имитации случайных сигналов по оригинальному гармоническому методу, являющемуся обобщением известного алгоритма В.С. Пугачёва на двумерный случай. Требования к способу дискретизации выдвигаются с целью снижения вычислительной сложности метода имитации и повышения его гибкости за счёт снятия ограничений по виду автокорреляционных функций и функций спектральной плотности энергии. Предлагается применение погрешности имитации в роли критерия оценки качества. Способ дискретизации рассмотрен для сигналов, заданных как на неограниченных интервалах определения, так и на ограниченных. В статье продемонстрированы результаты работы программной системы, реализующей оригинальный метод имитации с применением описанных способов дискретизации, в обоих случаях. Показана работоспособность и эффективность полученных результатов, которые имеют как самостоятельное научно-техническое значение, так и могут быть использованы для разработки новых эффективных спектральных средств имитации сигналов для использования в интеллектуальных системах поддержки принятия решений.

Ключевые слова: случайный двумерный сигнал, моделирование и имитация сигналов, базисные функции, коэффициенты Фурье, энергетические характеристики сигналов, функция спектральной плотности энергии, автокорреляционная функция, интеллектуальные системы поддержки принятия решений, сверхбыстрая обработка информации.

Цитирование: Сюзев, В.В. Способы дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов / В.В. Сюзев, А.В. Пролетарский, Д.А. Миков, И.И. Дейкин // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 828-839. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1074.

Citation: Syuzev VV, Proletarsky AV, Mikov DA, Deykin II. Techniques of sampling the energy characteristics of two-dimensional random signals. Computer Optics 2022; 46(5): 828-839. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1074.

Введение

Настоящая статья продолжает тему, начатую в статье, опубликованной в журнале «Компьютерная оптика» [1], и посвящена теоретическому обоснованию способов дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов, а также практическим результатам, полученным при помощи программной системы, реализующей эти способы.

Существует множество сигналов и процессов, которые являются двумерными и обрабатывать которые необходимо двумерными методами. К ним относятся изображения, получаемые при метео- и аэрофото-съёмках, рентгеновские снимки, сделанные в медицинских целях, сейсмограммы, результаты гравиметрических и магнитических измерений, а также снимки, получаемые с помощью электронного микроскопа и используемые для анализа пространственной структуры сложных биологических молекул [2, 3]. Хотя двумерные сигналы можно обрабатывать с помощью одномерных систем [4, 5], предпочтительнее использовать двумерные системы обработки. Многие основополагающие принципы одномерной обработки применимы к случаю двумерной обработки. Однако

некоторые весьма важные понятия, относящиеся к одномерным системам, нельзя непосредственно использовать для двумерных систем.

Большинство существующих методов имитации, детерминированных и случайных, стационарных и нестационарных, а также эргодических сигналов и процессов относится к одномерным процессам. Они описываются вещественными и комплексными функциями одной переменной. В то же время в технике связи, телевидении, компьютерной томографии, радиолокации, оптических системах, антенной технике, системах технического зрения и особенно при обработке изображений различных видов и природы, в том числе используемых в интеллектуальных системах поддержки принятия решений, всё большее значение приобретают двумерные детерминированные и случайные процессы. Обозначим их $x(t_1, t_2)$ и $y(t_1, t_2)$ соответственно, где t_1 и t_2 являются аргументами с интервалом определения размером $T_1 \times T_2$ [6, 7]. При этом следует учесть, что в таких процессах аргументы двумерных сигналов задают не время, а координаты положения измеряемой точки на плоскости в виде прямоугольника либо квадрата.

При калибровке оборудования, обучении персонала и прогнозировании поведения некоторой системы возникает задача получения множества сигналов, задающих случайные, но реалистичные состояния системы, то есть задача имитации двумерных и многомерных сигналов. В рамках классической энергетической теории задачу имитации двумерного сигнала целесообразно сформулировать следующим образом: заданы двумерная автокорреляционная функция (АКФ) или функция спектральной плотности энергии (ФСПЭ); требуется разработать алгоритм имитации для формирования на ЭВМ дискретных или непрерывных, детерминированных или случайных сигналов или процессов с заданными характеристиками [4, 8].

Примером такой задачи является обработка радиолокационных сигналов, которая представляет собой моделирование случайных полей [6] различного типа с исходными данными в виде ФСПЭ и АКФ. Эта обработка относится к классу пространственно-временной или частотной обработки, производимой в n измерениях, где $n > 1$.

Многомерная обработка имеет существенные отличия от одномерной:

- 1) обычно для решения многомерных задач необходимо использовать значительно больший объём данных, чем при решении одномерных;
- 2) математические методы описания многомерных систем не отличаются той завершённостью, которая характерна для математических методов описания одномерных систем;
- 3) многомерные системы обладают большим числом степеней свободы, в результате чего проектирование таких систем приобретает гибкость, несвойственную одномерным. Так, все рекурсивные цифровые фильтры реализуются с помощью разностных уравнений, но в одномерном случае эти уравнения упорядочены полностью, а в многомерном случае – лишь частично.

Авторы статьи предлагают использовать эту дополнительную гибкость при создании новых способов имитации сигналов и процессов. В одномерном случае дискретизации выбирается только частота отсчётов, а в многомерном – не только частота отсчётов, но и форма раstra дискретизации.

При решении задачи имитации требуется имитировать стационарные или нестационарные сигналы по заданным характеристикам и сигналы с разрывами на частотах и с минимальным переходным процессом с высокой точностью и простой настройкой на конкретные характеристики. Из всего множества общеизвестных методов и алгоритмов двумерного моделирования в наибольшей степени требованиям соответствуют методы имитации случайных полей [9–11], метод В.В. Быкова [4], методы на основе формирующей фильтрации, в том числе метод В.Я. Катковника [6], а также методы двумерной ре-

курсивной и нерекурсивной цифровой фильтрации Л. Рабинера и Б. Гоулда [12]. Распространение получили методы, основанные на расширении по теореме Карунена–Лозва и на факторизации матриц [13]. Все эти методы требуют при реализации большого объёма данных и высокой вычислительной сложности обработки. Стремление к вычислительной эффективности заставляет исследователей обращаться к применению скользящей средней, местных средних подразделений или методов спектральной имитации. Выигрыш в вычислительной эффективности, как правило, достигается за счёт снижения гибкости настройки на различные характеристики.

Предлагаемый в параграфе 1 новый подход к имитации, основанный на алгоритме В.С. Пугачёва [14, 15], изначально разработанном для одномерных сигналов, использует представления сигналов и процессов в спектральной области гармонических базисов и не содержит ограничений по виду АКФ и ФСПЭ. Кроме того, его применение позволяет использовать известные результаты цифровой обработки сигналов в области быстрых преобразований, которые до сих пор не теряют актуальности, например, в сфере имитации случайных полей [13, 16]. Параграфы 2 и 3 посвящены детальному описанию применяемых авторами способов дискретизации ФСПЭ: на ограниченных интервалах определения и на неограниченных соответственно. Параграф 4 описывает математически переход от полученных в параграфах 2 и 3 дискретных ФСПЭ к описанию сигналов в классе случайных событий. Параграф 5 данной статьи посвящен экспериментальному исследованию на типовых примерах предложенного оригинального метода имитации, включающего описанные способы дискретизации, реализованного в виде программной системы. Заключение призвано подвести итоги проведённой работы и наметить траекторию дальнейшего развития предложенного метода имитации в целом и используемых в нём способов дискретизации в частности.

1. Алгоритм имитации двумерных сигналов в классе случайных величин (двумерный алгоритм Пугачёва)

Описанный В.С. Пугачёвым [14] алгоритм имитации одномерных сигналов в классе случайных величин позволяет генерировать наборы случайных одномерных сигналов по задаваемой одномерной ФСПЭ [17]. Получаемые сигналы заведомо будут соответствовать энергетическим характеристикам системы, описанной ФСПЭ. Дополнительным преимуществом алгоритма В.С. Пугачёва является возможность его ускорения за счёт применения быстрых алгоритмов для вычисления входящих в его состав преобразований. Алгоритм может быть преобразован для имитации двумерных сигналов следующим образом.

Выполняется разложение теоретической автокорреляционной функции R_T , вычисляемой по форме

ФСПЭ, в тригонометрическом базисе на интервале $[-T_1, T_1], [-T_2, T_2]$:

$$a(0,0) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} R_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$a(k_1, k_2) = \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} R_T(\tau_1, \tau_2) \cos\left(\pi\left(\frac{k_1 \tau_1}{N_1} + \frac{k_2 \tau_2}{N_2}\right)\right) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$k_1, k_2 \in [0, \infty),$$

где параметры k_1, k_2 являются отсчётами в частотной области, параметры T_1 и T_2 задают периоды сигнала по двум осям определения аргументов t_1 и t_2 .

Коэффициенты $a(k_1, k_2)$ принимаются в качестве дисперсии $\sigma^2(k_1, k_2)$ коэффициентов $V(k_1, k_2)$ и $U(k_1, k_2)$ в искомом разложении:

$$\sigma^2(0,0) = a(0,0), \quad \sigma^2(k_1, k_2) = a(k_1, k_2).$$

Если T_1 и T_2 – достаточно большие интервалы по двумерному времени, то их можно считать равными бесконечности. Тогда применимо уравнение Винера–Хинчина для двумерного случая, устанавливающего связь между ФСПЭ и АКФ стационарного в широком смысле двумерного процесса, преобразование Фурье для которого может не существовать:

$$S_E(0,0) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty R_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

где $S_E(0,0)$ – значение ФСПЭ в нулевой точке частотной области. Из него следует:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty R_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \frac{S_E(0,0)}{4},$$

тогда:

$$\sigma^2(0,0) = \frac{S_E(0,0)}{4T_1 T_2}, \tag{1}$$

$$\sigma^2(k_1, k_2) = \frac{S_E\left(\frac{\pi}{T_1} k_1, \frac{\pi}{T_2} k_2\right)}{2T_1 T_2} =$$

$$= \frac{2}{T_1 T_2} \int_0^\infty \int_0^\infty R_T(\tau_1, \tau_2) \cos(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \tag{2}$$

$$k_1, k_2 \in [0, \infty),$$

где:

$$S_E(\omega_1, \omega_2) =$$

$$= \frac{2}{T_1 T_2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty R_T(\tau_1, \tau_2) \exp[j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \tag{3}$$

Из уравнений (1–3) получаем следующие формулы для спектральных коэффициентов в тригонометрическом базисе:

$$X_{T_1 T_2}(0,0) = \sqrt{\frac{S_E(0,0)}{4T_1 T_2}} = \sigma(0,0),$$

$$X_{T_1 T_2}(k_1, k_2) = \sqrt{\frac{S_E\left(k_1 \frac{\pi}{T_1}, k_2 \frac{\pi}{T_2}\right)}{2T_1 T_2}} = \sigma(k_1, k_2), \quad k_1, k_2 \in [0, \infty).$$

Имитированный тригонометрический ряд:

$$y(i_1 \Delta t, i_2 \Delta t) = V(0,0) +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \left\{ V(k_1, k_2) \cos\left[\pi\left(\frac{k_1 i_1}{N_1} + \frac{k_2 i_2}{N_2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + U(k_1, k_2) \sin\left[\pi\left(\frac{k_1 i_1}{N_1} + \frac{k_2 i_2}{N_2}\right)\right] \right\},$$

$$i_1 \in [0, N_1), \quad i_2 \in [0, N_2).$$

Параметры i_1, i_2 являются отсчётами в пространстве или в многомерной временной области, причем Δt – шаг дискретизации. N_1, N_2 задают дискретные граничные частоты сигнала. Алгоритмическая автокорреляционная функция (корреляционная функция двух копий $y(t_1, t_2)$ и $y(l_1, l_2)$ одного процесса) $R_A(\tau_1, \tau_2)$, учитывающая природу спектральных коэффициентов, после ряда тригонометрических преобразований примет вид бесконечного ряда:

$$M[y(t_1, t_2) y(l_1, l_2)] = \sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sigma^2(k_1, k_2) \times$$

$$\times \left\{ \cos\left[2\pi\left(\frac{k_1 t_1}{T_1} + \frac{k_2 t_2}{T_2}\right)\right] \cos\left[2\pi\left(\frac{k_1 l_1}{T_1} + \frac{k_2 l_2}{T_2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\left[2\pi\left(\frac{k_1 t_1}{T_1} + \frac{k_2 t_2}{T_2}\right)\right] \sin\left[2\pi\left(\frac{k_1 l_1}{T_1} + \frac{k_2 l_2}{T_2}\right)\right] \right\} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sigma^2(k_1, k_2) \left\{ \cos\left[\pi\left(\frac{k_1(t_1 - l_1)}{T_1} + \frac{k_2(t_2 - l_2)}{T_2}\right)\right] \right\} =$$

$$= R_A(t_1 - l_1, t_2 - l_2) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^\infty \sum_{k_2=0}^\infty \sigma^2(k_1, k_2) \left\{ \cos\left[\pi\left(\frac{k_1 \tau_1}{T_1} + \frac{k_2 \tau_2}{T_2}\right)\right] \right\} = R_A(\tau_1, \tau_2).$$

Величины $V(k_1, k_2)$ и $U(k_1, k_2)$ являются некоррелированными случайными числами с параметрами $(0, T^2(k_1, k_2))$. При практической реализации алгоритмов имитации и АКФ бесконечные ряды усекаются с учётом задаваемой точности имитации ϵ :

$$1 - \frac{1}{R_T(0,0)} \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \sigma^2(k_1, k_2) < \epsilon, \tag{4}$$

где ϵ – малая величина. Неравенство (4) выражает тот факт, что сумма дисперсий должна быть равна дисперсии моделируемого процесса. При помощи выражения (4) подбираются верхние границы M_1 и M_2 ,

обеспечивающие необходимую точность, и записываются собственно имитационные ряды:

$$y(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = V(0, 0) + \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} \left\{ V(k_1, k_2) \cos \left[\pi \left(\frac{k_1 i_1}{N_1} + \frac{k_2 i_2}{N_2} \right) \right] + U(k_1, k_2) \sin \left[\pi \left(\frac{k_1 i_1}{N_1} + \frac{k_2 i_2}{N_2} \right) \right] \right\};$$

$$R_A(\tau_1, \tau_2) = R_A(i_1 \Delta t_1, i_2 \Delta t_2) = \sum_{k_1=0}^{M_1} \sum_{k_2=0}^{M_2} V(k_1, k_2) \cos \left[\pi \left(\frac{k_1 m_1}{N_1} + \frac{k_2 m_2}{N_2} \right) \right].$$

$i_1 \in [0, N_1), i_2 \in [0, N_2),$

где i_1, i_2 – дискретные отсчёты; Δt_1 и Δt_2 – шаги дискретизации по осям t_1 и t_2 . Дискретные верхние частоты связываются с периодом сигнала и шагами дискретизации:

$$N_1 = \frac{T_1}{\Delta t_1}, N_2 = \frac{T_2}{\Delta t_2}.$$

В представленном виде алгоритм имитации по сути является обобщением одномерного алгоритма В.С. Пугачёва на двумерный случай. Важной особенностью алгоритма Пугачёва является возможность преобразования его в быстрый алгоритм имитации для снижения вычислительной сложности.

2. Способ дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов, заданных на неограниченных интервалах определения

В случае, если интервал определения ФСПЭ бесконечный, то в аналитическом выражении спектра для наглядности используется формальная двумерная частота ω_{1*}, ω_{2*} , что позволяет представить ФСПЭ в графическом виде (рис. 1).

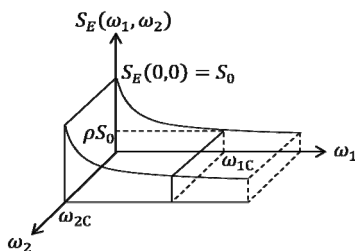


Рис. 1. Дискретизация двумерной ФСПЭ, заданной на неограниченном интервале определения

При этом частоты среза ω_{1c} и ω_{2c} заранее не задаются, а четыре части области определения ФСПЭ могут рассматриваться независимо как $S_E(0, 0)$, $S_E(n\Delta\omega_1, 0)$, $S_E(0, m\Delta\omega_2)$ и $S_E(k_1\Delta\omega_1, k_2\Delta\omega_2)$. Две части $S_E(n\Delta\omega_1, 0)$ и $S_E(0, m\Delta\omega_2)$ по сути представляют одномерные функции, определённые по осям ω_1 и ω_2 . Аргументы n, m, k_1 и k_2 являются дискретными отсчё-

тами, а $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ являются шагами дискретизации по осям ω_1 и ω_2 соответственно.

Определение всех ФСПЭ может быть выполнено с помощью операции дискретизации ФСПЭ с допустимой точностью приближённого представления всех $S_E(n\Delta\omega_1, 0)$, $S_E(0, m\Delta\omega_2)$ и $S_E(k_1\Delta\omega_1, k_2\Delta\omega_2)$ с помощью заданной частоты среза.

2.1. Дискретизация одномерных составляющих сигнала, образующихся на осях определения

Рассмотрим одномерные ФСПЭ, образующиеся на осях ω_1 и ω_2 . Целесообразно преобразовать ФСПЭ, сделав переход от переменных ω_1 и ω_2 к переменным ω_{1*} и ω_{2*} соответственно: $x_1 = \omega_1/\omega_{1*}$; $x_2 = \omega_2/\omega_{2*}$.

Остановимся на оси ω_1 . Представим обобщённую запись $S_E(\omega_1, 0)$ в виде $S_E(x_1\omega_{1*}, 0)$. Энергия такого процесса будет равна:

$$E = \sigma^2 = \frac{\omega_{1*}}{\pi} \int_0^\infty S_E(x_1\omega_{1*}, 0) dx_1.$$

При дискретизации часть мощности, распределённой на интервале $[x_{1c}, \infty)$ по теореме В.А. Котельникова, отразится в низкочастотную область спектра и исказится [18]. Принимая эту часть энергии пренебрежимо малой, например E_p , где параметр дискретизации $\rho \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ можно записать как:

$$E_p = \frac{\omega_{1*}}{\pi} \int_0^\infty S_E(x_1\omega_{1*}, 0) dx_1.$$

Это уравнение задаёт процедуру определения и дискретизации ФСПЭ. Однако уравнение содержит операцию интегрирования, которая аналитически вычисляется не для всех $S_E(x_1\omega_{1*}, 0)$. Решением этой проблемы является способ определения ω_{1c} с использованием взаимосвязи частот $x_{1c} = \omega_{1c}/\omega_{1*}$ в такой точке частотной оси, в которой значение ФСПЭ равно незначительной доле от максимального значения $S_E(0, 0)$. Математически это выражается так: $\rho S_E(0, 0) = S_E(x_{1c}\omega_{1*}, 0)$, что позволяет представить процесс преобразования $S_E(\omega_1, 0)$ в виде следующих общих выражений:

$$S_E(\omega_1, 0) = S_E(x_1\omega_{1*}, 0), \omega_1 \in [0, \infty),$$

$$\rho S_E(0, 0) = S_E(x_{1c}\omega_{1*}, 0), \omega_{1*} = \frac{\omega_{1c}}{x_{1c}},$$

$$\rho \in [10^{-3}, 10^{-2}], S_E(\omega_1, 0) = S_E(k_1\Delta\omega_1, 0).$$

Зная $S_E(k_1\Delta\omega_1, 0)$, по уравнению можно определить значения коэффициентов Фурье $X_{Фч}(0, 0)$, $X_{Фч}(n, 0)$, $X_{Фч}(0, m)$, $X_{Фч}(k_1, k_2)$, присутствующих в алгоритмах имитации.

Для иллюстрации рассмотренного подхода к дискретизации возьмём $S_E(\omega_1, 0)$ дробно-рационального вида:

$$S_E(\omega_1, 0) = \frac{2\sigma^2\omega_{1*}}{\omega_{1*}^2 + \omega_1^2}, \omega_1 \in [0, \infty), \tag{5}$$

где $\sigma^2=1$.

Функция спектральной плотности энергии преобразуется к следующему виду:

$$S_E(\omega_1, 0) = S_E(x_1\omega_{1*}, 0) = \frac{2\omega_{1*}}{\omega_{1*}^2(1+x_1^2)} = \frac{2}{\omega_{1*}(1+x_1^2)},$$

тогда

$$\rho \frac{2}{\omega_1} = \frac{2}{\omega_{1*}(1+x_{1C}^2)}$$

или

$$\rho = \frac{1}{1+x_{1C}^2}, x_{1C} = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}.$$

Отсюда следует уравнение связи ω_{1*} и ω_{1C} :

$$\omega_{1*} = \omega_{1C} \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} = \frac{\omega_{1C} \sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}.$$

Для дискретизации ФСПЭ в формулу (5) подставляется значение ω_{1*} . Тогда:

$$S_E(\omega_1, 0) = \frac{2\omega_{1C} \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\omega_{1C}^2 \rho + (1-\rho)\omega_1^2}.$$

Подстановка предельных значений $\rho=0,01$ и $\rho=0,001$ приводит к следующему виду ФСПЭ:

$$\rho = 0,01 \rightarrow S_E(\omega_1, 0) = \frac{2\omega_{1C} \sqrt{0,0099}}{0,01 \omega_{1C}^2 + 0,99\omega_1^2},$$

$$\rho = 0,001 \rightarrow S_E(\omega_1, 0) = \frac{2\omega_{1C} \sqrt{0,000999}}{0,001 \omega_{1C}^2 + 0,999\omega_1^2}.$$

Если теперь подставить в (5) значения частоты:

$$\omega_1 = k_1 \Delta\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} k_1 = \frac{2\pi}{N_1 \Delta t_1} k_1,$$

принимая $\Delta t_1 = \Delta t_k = \pi/\omega_{1C}$, получаются дискретные значения частоты:

$$k_1 \Delta\omega_1 = \frac{2\omega_{1C}}{N_1} k_1, \quad k_1 = 0, 1, \dots$$

и соответствующие им значения дискретной ФСПЭ:

$$S_E(\omega_1, 0) = S_E\left(\frac{2\omega_{1C}}{N_1} k_1, 0\right) = \frac{2N_1^2 \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\omega_{1C} (N_1^2 + 4k_1^2(1-\rho))} = \frac{2N_1^2 \sqrt{0,0099}}{\omega_{1C} (N_1^2 + 3,96k_1^2)} = \frac{2N_1^2 \sqrt{99}}{\omega_{1C} (N_1^2 + 396k_1^2)}, \rho = 0,01;$$

$$S_E(\omega_1, 0) = S_E\left(\frac{2\omega_{1C}}{N_1} k_1, 0\right) = \frac{2N_1^2 \sqrt{999}}{\omega_{1C} (N_1^2 + 3996k_1^2)}, \rho = 0,001.$$

Для получения дискретных коэффициентов Фурье используем отсчёты n, m на осях ω_1 и ω_2 в качестве номеров таких коэффициентов. В результате для нечётных N_1 и $\rho=0,01$ получим:

$$S_E(n\Delta\omega_1, 0) = \frac{2\omega_{2C} \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\omega_{1C}^2 \rho + (1-\rho)\omega_1^2} = \frac{2N_1^2 \sqrt{99}}{\omega_{1C} (N_1^2 + 396k_1^2)},$$

$$X_{ФЧ}(n, 0) = \sqrt{\frac{S_E\left(\frac{2\pi}{T_1} n, 0\right)}{2T_1^2}} = \sqrt{\frac{19,9N_1^2}{2T_1^2 \omega_{1C} [N_1^2 + 396n^2]}},$$

$$n \in \left[1, \frac{N_1-1}{2}\right].$$

Здесь учтено, что $X_{ФЧ}(n, 0) = X_{ФН}(n, 0)$ при $\lambda_{k,0}=1$. По аналогии находится ФСПЭ и коэффициенты по m :

$$S_E(0, m\Delta\omega_2) = \frac{2N_2^2 \sqrt{99}}{\omega_{2C} (N_2^2 + 396k_2^2)},$$

$$X_{ФЧ}(0, m) = \sqrt{\frac{19,9N_2^2}{2T_2^2 \omega_{2C} [N_2^2 + 396m^2]}}, m \in \left[1, \frac{N_1-1}{2}\right].$$

Значения нечётных коэффициентов Фурье $X_{ФН}(n, 0)$ и $X_{ФН}(0, m)$ легко находятся из соотношения $X_{ФН}(0, m) = \lambda_{0,m} X_{ФЧ}(0, m)$.

2.2. Дискретизация двумерных составляющих сигнала в произвольной точке области определения

Для преобразования двумерной части области определения (не расположенной на осях определения) запишем общую ФСПЭ двумерных сигналов. Она равна $S_E(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1, \omega_2 \in [0, \infty)$ и после преобразований, описанных в пункте 2.1, принимает вид $S_E(x_1\omega_{1*}, x_2\omega_{2*})$, где $x_1 = \omega_1/\omega_{1*}$, $x_2 = \omega_2/\omega_{2*}$. Энергия такого процесса равна:

$$E = \sigma^2 = \frac{\omega_{1*}\omega_{2*}}{\pi^2} \iint_0^\infty S_E(x_1\omega_{1*}, x_2\omega_{2*}) dx_1 dx_2.$$

Прямая дискретизация ФСПЭ искажает её, отражая часть двумерного спектра в низкочастотную область. По аналогии с одномерным случаем, разобранным в пункте 2.1, целесообразно использовать двумерные частоты среза ω_{1C} и ω_{2C} , связав их с вспомогательными частотами ω_{1*} и ω_{2*} посредством $x_{1C} = \omega_{1C}/\omega_{1*}$ и $x_{2C} = \omega_{2C}/\omega_{2*}$ в такой точке двумерной частотной оси, в которой значения ФСПЭ равны незначительной доле от максимального значения $S_E(0,0)$ (рис. 1).

Математически это выражается уравнениями

$$\rho S_E(0, 0) = S_E(x_{1C}\omega_{1*}, x_{2C}\omega_{2*}),$$

где параметр дискретизации ρ имеет такой же интервал определения, как одномерные варианты $\rho \in [10^{-3}, 10^{-2}]$. Используются нормированные по энер-

гии сигналы с $E=1$ Дж с дробно-рациональными ФСПЭ вида:

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = \frac{2(\omega_{1*} + \omega_{2*})}{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Для таких сигналов:

$$S_E(0, 0) = \frac{2(\omega_{1*} + \omega_{2*})}{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2},$$

$$S_E(\omega_{1C}, \omega_{2C}) = \frac{2(\omega_{1*} + \omega_{2*})}{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2 + \omega_{1C}^2 + \omega_{2C}^2}.$$

Параметр ρ будет равен:

$$\rho = \frac{S_E(\omega_{1C}, \omega_{2C})}{S_E(0, 0)} = \frac{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2}{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2 + \omega_{1C}^2 + \omega_{2C}^2},$$

где можно учесть, что $\omega_{1C} = x_{1C}\omega_{1*}$, $\omega_{2C} = x_{2C}\omega_{2*}$, в таком случае появляются разные варианты записи дискретной области определения спектра и сигнала: $N \times N$, $N_1 \times N_2$.

Рассмотрим интервал $N \times N$. Для него $x_1 = x_{2C} = x_C$ (т.е. частоты среза по осям будут равными). Тогда:

$$\rho = \frac{\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2}{(1 + x_C^2)(\omega_{1*}^2 + \omega_{2*}^2)} = \frac{1}{1 + x_C^2} \quad (6)$$

и совпадает с ρ одномерного сигнала. Преобразуя выражение (6), можно получить формулу:

$$x_C = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} = \frac{\omega_C}{\omega_{1*}} = \frac{\omega_C}{\omega_{2*}} \Rightarrow \omega_{1*} = \omega_{2*} = \omega_C \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_E(\omega_1, \omega_2) = \frac{4\omega_C \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}}{2\omega_C^2 \frac{\rho}{1-\rho} + \omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Перейдём к дискретным значениям частот. Так как одномерные проекции были приведены в пункте 2.1, здесь рассмотрим коэффициенты с двумя непрерывными проекциями $X_{ФЧ}(k_1, k_2)$, включая и коэффициенты с нулевыми номерами $X_{ФЧ}(0, 0)$. В этом случае:

$$\omega_1 = k_1 \Delta \omega_1 = \frac{2\pi}{T} k_1 = \frac{2\pi}{N \Delta t} k_1 = \frac{2\omega_C}{N} k_1,$$

$$\omega_2 = k_2 \Delta \omega_2 = \frac{2\pi}{T} k_2 = \frac{2\pi}{N \Delta t} k_2 = \frac{2\omega_C}{N} k_2.$$

Для чётного N :

$$\omega_1 = \frac{2\omega_C}{N} k_1, \omega_2 = \frac{2\omega_C}{N} k_2, k_1 \in [1, N], k_2 \in [1, N].$$

Для нечётного N :

$$\omega_1 = \frac{2\omega_C}{N-1} k_1, \omega_2 = \frac{2\omega_C}{N-1} k_2, k_1 \in [1, N-1], k_2 \in [1, N-1].$$

Тогда:

$$S_E(0, 0) = \frac{2\sqrt{99}}{\omega_C} = \frac{19,9}{\omega_C},$$

$$S_E(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) = \frac{2\sqrt{99} N^2}{\omega_C [N^2 + 198(k_1^2 + k_2^2)]}.$$

Коэффициенты Фурье для чётных значений N равны:

$$X_{ФЧ}(0, 0) = \sqrt{\frac{S_E(0, 0)}{T^4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{99}}{T^4 \omega_C}} = 0,95,$$

$$X_{ФЧ}(k_1, k_2) = \sqrt{\frac{2\sqrt{99} N^2}{2\omega_C T^4 (N^2 + 198(k_1^2 + k_2^2))}} =$$

$$= \sqrt{\frac{22,171}{49 + 198(k_1^2 + k_2^2)}}, k_1 \in [1, N], k_2 \in [1, N].$$

Преобразования выполнены для $\rho = 10^{-2}$ и $\lambda_{k_1, k_2} = 1$. Нечётные значения N требуют корректировки – замены в формулах N на $N-1$.

При $N_1 \neq N_2$ частоты примут следующий вид:

$$\omega_1 = \frac{2\omega_C}{N_1} k_1, \omega_2 = \frac{2\omega_C}{N_2} k_2.$$

ФСПЭ принимает вид:

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = \frac{2 \left[\omega_{1C} \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} + \omega_{2C} \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \right]}{\omega_{1C}^2 \frac{\rho}{1-\rho} + \omega_{2C}^2 \frac{\rho}{1-\rho} + \omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Квантование приводит ФСПЭ к такому виду:

$$S_E(k_1 \Delta \omega_1, k_2 \Delta \omega_2) =$$

$$= \frac{2\sqrt{\rho(1-\rho)}(\omega_{1C} + \omega_{2C})}{\rho(\omega_{1C}^2 + \omega_{2C}^2) + 4(1-\rho) \left[\frac{\omega_{1C}^2 k_1}{N_1^2} + \frac{\omega_{2C}^2 k_2}{N_2^2} \right]}.$$

При чётных N_1 и N_2 имеем:

$$k_1 \in [1, N_1], k_2 \in [1, N_2].$$

Коэффициенты Фурье будут иметь следующий вид:

$$X_{ФЧ}(0, 0) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\rho(1-\rho)}(\omega_{1C} + \omega_{2C})}{\rho(\omega_{1C}^2 + \omega_{2C}^2) T_1^2 T_2^2}},$$

$$X_{ФЧ}(k_1, k_2) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\rho(1-\rho)}(\omega_{1C} + \omega_{2C})}{\rho(\omega_{1C}^2 + \omega_{2C}^2) + 4(1-\rho) \left[\frac{\omega_{1C}^2 k_1}{N_1^2} + \frac{\omega_{2C}^2 k_2}{N_2^2} \right]}} \quad (7)$$

В случае нечётности N_1 или N_2 требуется их замена в формулах на N_1-1 и N_2-1 соответственно, как и в

случае $N_1=N_2=N$. В отличие от случая $N_1=N_2=N$, имеется не два варианта, а четыре – каждый из параметров k_1 и k_2 может быть чётным или нечётным независимо от другого. В приведённых рассуждениях параметр $\lambda_{k_1,k_2}=1$.

Дискретная теоретическая АКФ на одномерных участках будет равна:

$$R_T(m_1, 0) = e^{-\pi\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}m_1}, m_1 \in [1, N_1],$$

$$R_T(0, m_2) = e^{-\pi\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}m_2}, m_2 \in [1, N_2].$$

На двумерном участке:

$$R_T(m_1, m_2) = e^{-\pi\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}m_1} e^{-\pi\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}m_2} = e^{-\pi\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}(m_1+m_2)},$$

$$m_1 \in [1, N_1], m_2 \in [1, N_2].$$

АКФ $R_T(0,0)=1$ показывает, что сигнал центрирован по энергии. Диапазоны значений m_1 и m_2 также зависят от чётности N_1 и N_2 , как и диапазоны k_1 и k_2 . Полученные коэффициенты позволяют перейти к имитации сигналов с непрерывной ФСПЭ. Однако энергетическая характеристика сигнала может быть ограниченной по области определения. Такой случай требует отдельного рассмотрения.

3. Способ дискретизации энергетических характеристик двумерных случайных сигналов, заданных на ограниченных интервалах определения

В случае, если ФСПЭ сигнала конечна по области определения, то в аналитическом выражении спектра $S_E(\omega_1, \omega_2)$ формальные частоты не используются, а задаются частоты среза ω_{1C} и ω_{2C} и сама конфигурация ФСПЭ. Как и в параграфе 2, вся конечная область определения делится на четыре части, которые также являются конечными: $S_E(0,0)$, $S_E(n\Delta\omega_1, 0)$, $S_E(0, m\Delta\omega_2)$ и $S_E(k_1\Delta\omega_1, k_2\Delta\omega_2)$. Две части $S_E(n\Delta\omega_1, 0)$ и $S_E(0, m\Delta\omega_2)$ представляют одномерные функции, определённые на осях ω_1 и ω_2 . Определение всех ФСПЭ и соответствующих им коэффициентов Фурье возможно по теоретической непрерывной ФСПЭ.

В качестве примера рассмотрим ФСПЭ, $X_{ФЧ}(k_1, k_2)$, АКФ и имитационные случайные ряды для сигналов двумерного физического белого шума (рис. 2).

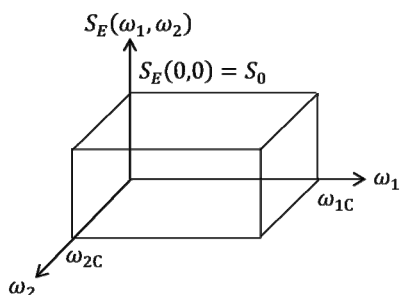


Рис. 2. Дискретизация двумерной ФСПЭ «белый шум», заданной на ограниченном интервале определения

На рис. 2 видно, что

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = S_0, \omega_1 \in [0, \omega_{1C}], \omega_2 \in [0, \omega_{2C}].$$

Для остальных ω_1 и ω_2 :

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

По уравнению Винера–Хинчина энергия (дисперсия) равна:

$$E = \sigma^2 = R_T(0,0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\omega_{1C}} \int_0^{\omega_{2C}} S_E(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (8)$$

При этом следует, что энергия геометрически с точностью до константы $1/\pi^2$ совпадает с объёмом фигуры, описываемой ФСПЭ:

$$E(\omega_1, \omega_2) = \sigma^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi^2} S_0 \omega_1 \omega_2.$$

Для $E = \sigma^2 = S_0 \omega_1 \omega_2 / \pi^2$, а при $\omega_{1C} = \omega_{2C}$ придём к $E = \sigma^2 = \nu S_0 \omega_{1C}^2 / \pi^2$. Для нормированных по энергии сигналов, в которых $E = \sigma^2 = 1$, получим параметр $S_0 = T_1 T_2 / 4 N_{1C} N_{2C}$. Так как $N_1 = 2 N_{1C}$, а $N_2 = 2 N_{2C}$, то $S_0 = T_1 T_2 / N_1 N_2$. Здесь учтено, что $N_{1C} = \omega_{1C} / \Delta\omega_1 = \omega_{1C} T_1 / 2\pi$; $N_{2C} = \omega_{2C} / \Delta\omega_2 = \omega_{2C} T_2 / 2\pi$. С учётом того, что $T_1 = N_1 \Delta t_1 = N_1 \pi / \omega_{1C}$; $T_2 = N_2 \Delta t_2 = N_2 \pi / \omega_{2C}$, далее можно получить $N_{1C} = N_1 / 2$, $N_{2C} = N_2 / 2$. Таким образом, N_1 и N_2 , T_1 и T_2 – интервалы определения сигналов по осям t_1 и t_2 (или i_1 и i_2), а N_{1C} и N_{2C} – максимальное число прямых (не сопряжённых) коэффициентов Фурье по осям ω_1 и ω_2 (или k_1 и k_2). Определим ФСПЭ во всех четырёх областях, что позволит найти коэффициенты Фурье. ФСПЭ для проекции по оси ω_1 примет следующий вид:

$$S_E(\omega_1, 0) = S_0, \omega_1 \in [0, \omega_{1C}], S_0 = \frac{T_1}{N_1}, \sigma_1^2 = 1.$$

Для других ω_1 :

$$S_E(\omega_1, 0) = 0.$$

ФСПЭ для проекции по оси ω_2 будет определяться аналогично. Для точки $(0,0)$:

$$S_E(0,0) = S_0 = \frac{T_1 T_2}{N_1 N_2}.$$

Для прямоугольника $N_1 \times N_2$:

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = S_0, \omega_1 \in [0, \omega_{1C}], \omega_2 \in [0, \omega_{2C}].$$

Для других ω_1 :

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

ФСПЭ позволяет определить коэффициенты Фурье:

$$X_{ФЧ}(0,0) = \sqrt{\frac{S_E(0,0)}{T_1^2 T_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 N_1 N_2}},$$

$$\begin{aligned}
 X_{\phi\psi}(k_1, 0) &= \sqrt{\frac{S_E \left(\frac{2\pi}{T_1} \omega_1, 0 \right)}{T_1^2 (1 + \lambda_{k_1}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 N_1 (1 + \lambda_{k_1}^2)}}, \\
 X_{\phi\psi}(0, k_2) &= \sqrt{\frac{S_E \left(0, \frac{2\pi}{T_2} \omega_2 \right)}{T_2^2 (1 + \lambda_{k_2}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{T_2 N_2 (1 + \lambda_{k_2}^2)}}, \\
 X_{\phi\psi}(k_1, k_2) &= \\
 &= \sqrt{\frac{S_E \left(\frac{2\pi}{T_1} \omega_1, \frac{2\pi}{T_2} \omega_2 \right)}{T_1^2 T_2^2 (1 + \lambda_{k_1, k_2}^2)}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 N_1 T_2 N_2 (1 + \lambda_{k_1, k_2}^2)}}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Теоретическая АКФ определяется из приведённого ранее уравнения Винера–Хинчина (8). Полученные результаты позволяют перейти непосредственно к новому методу имитации случайных сигналов в классе случайных событий, он описан в следующем параграфе.

4. Новый метод имитации двумерных случайных сигналов в классе случайных событий

При разработке случайных алгоритмов имитации используются детерминированные коэффициенты Фурье с внесением в них случайных элементов в виде некоррелированных параметров $\mu(k_1, k_2)$ и $\gamma(k_1, k_2)$, принимающих значения «+1» и «-1». Чтобы получаемые при этом сигналы представляли собой эргодический стандартный процесс, параметры $\mu(k_1, k_2)$ и $\gamma(k_1, k_2)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 M[\mu(k_1, k_2)] &= M[\gamma(k_1, k_2)] = 0, \\
 M[\mu^2(k_1, k_2)] &= M[\gamma^2(k_1, k_2)] = 1, \\
 M[\mu(k_1, k_2)\mu(m_1, m_2)] &= M[\gamma(k_1, k_2)\gamma(m_1, m_2)] = \\
 &= M[\mu(k_1, k_2)\gamma(m_1, m_2)] = 0, \quad k_1 \neq m_1, k_2 \neq m_2.
 \end{aligned}$$

Приведенные условия позволяют сформировать случайные элементы полных базисов Фурье для различных N, N_1 и N_2 . Сокращая объём аналитических преобразований, остановимся только на чётных значениях N_1 и N_2 (параметр N получается автоматически путём приравнивания N_1 и N_2). Случайный спектр Фурье может быть получен из детерминированного, представленного в пунктах 2.1 и 2.2:

$$\begin{aligned}
 Y_\phi(0, 0) &= \mu(0, 0) X_{\phi\psi}(0, 0), \\
 Y_\phi(n, 0) &= [\mu(n, 0) - j\gamma(n, 0)] X_{\phi\psi}(n, 0), \\
 Y_\phi^*(n, 0) &= [\mu(n, 0) + j\gamma(n, 0)] X_{\phi\psi}(n, 0), \\
 Y_\phi(0, m) &= [\mu(0, m) - j\gamma(0, m)] X_{\phi\psi}(0, m),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_\phi^*(0, m) &= [\mu(0, m) + j\gamma(0, m)] X_{\phi\psi}(0, m), \\
 Y_\phi(k_1, k_2) &= [\mu(k_1, k_2) - j\gamma(k_1, k_2)] X_{\phi\psi}(k_1, k_2), \\
 Y_\phi^*(k_1, k_2) &= [\mu(k_1, k_2) + j\gamma(k_1, k_2)] X_{\phi\psi}(k_1, k_2).
 \end{aligned}$$

По спектру можно представить случайный ряд Фурье $y(i_1, i_2)$, используя методику, описанную в пункте 1 данной статьи. Полученный ряд используется для вычисления алгоритмической АКФ:

$$R_A(m_1, m_2) = M[y(i_1, i_2)y(i_1 + m_1, i_2 + m_2)],$$

а также экспериментальной АКФ – функции корреляции итогового имитационного сигнала и копии такого же сигнала с задержками m_1 и m_2 по соответствующим измерениям:

$$R_\psi(m_1, m_2) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1-m_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-m_2-1} y(i_1, i_2)y(i_1 + m_1, i_2 + m_2)}{(N_1 - m_1)(N_2 - m_2)},$$

и средней погрешности имитации:

$$\Delta R_{A\psi} = \frac{\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} |R_A(m_1, m_2) - R_\psi(m_1, m_2)|}{N_1 N_2},$$

$$m_1 \in [0, N_1], m_2 \in [0, N_2].$$

При разработке алгоритмов имитации и АКФ используются коэффициенты Фурье, приведённые в формулах (7) и (9). Наличие формул для вычисления ФСПЭ, коэффициентов, сигнала и всех трёх АКФ позволило спроектировать программную систему. На основании оригинального математического описания полученные алгоритмы реализованы в программной системе имитации двумерных сигналов в базисе Фурье.

5. Экспериментальное исследование алгоритма имитации двумерных сигналов в базисе Фурье

Программная система имитации двумерных сигналов в базисе Фурье основана на оригинальном спектральном методе имитации в классе случайных событий, описанном выше. Алгоритмы, реализованные в компонентах программной системы, требуют отдельного экспериментального тестирования на типовых примерах. Ниже рассмотрены два примера: один для сигналов с бесконечной или неограниченной ФСПЭ, другой – с ФСПЭ, ограниченной по частотам среза.

5.1. Имитация случайных сигналов с ФСПЭ, заданной на неограниченных интервалах определения

Рассмотрим пример со следующими входными данными: $N=7, T=1$ с, $\omega_c=7\pi$ рад/с, $\lambda_{k_1, k_2}=1, \Delta t_k=1/7$ с, $\rho=10^{-2}$. ФСПЭ в важных точках в таком случае примет следующий вид:

$$S_E(n\Delta\omega_1, 0) = \frac{975,09}{7\pi(49 + 396n^2)},$$

$$S_E(0, m\Delta\omega_2) = \frac{975,09}{7\pi(49 + 396m^2)}, \quad n, m \in [0, 6],$$

$$S_E(k_1\Delta\omega_1, k_2\Delta\omega_2) = \frac{975,09}{7\pi(49 + 198(k_1^2 + k_2^2))},$$

$$k_1 \in [0, 6], k_2 \in [0, 6], \quad S_E(0, 0) = \frac{19,9}{\omega_c}.$$

На рис. 3а приведены результаты построения дискретной ФСПЭ, соответствующей заданным условиям, по которой можно получить следующие значения коэффициентов Фурье:

$$X_{\phi\psi}(0, 0) = 0,95, \quad X_{\phi\psi}(n, 0) = \sqrt{\frac{19,9 \times 49}{14\pi(49 + 396n^2)}},$$

$$X_{\phi\psi}(0, m) = \sqrt{\frac{22,171}{(49 + 396m^2)}}, \quad n, m \in [0, 6],$$

$$X_{\phi\psi}(k_1, k_2) = \sqrt{\frac{22,171}{49 + 198(k_1^2 + k_2^2)}},$$

$$k_1 \in [0, 6], k_2 \in [0, 6].$$

Данные коэффициенты Фурье используются для построения или имитации сигналов, но для возможности случайной имитации используются дополнительные коэффициенты μ и γ [1, 16]. При задании

всех этих коэффициентов равными 1 происходит имитация детерминированного сигнала, результаты которой приведены на рис. 3б. При задании коэффициентов в пространстве случайных событий происходит имитация случайных сигналов, одна из реализаций которых приведена на рис. 3в.

Теоретическая АКФ рассчитывается напрямую из исходных данных и не учитывает структуру коэффициентов или природу конечного сигнала:

$$R_T(m_1, m_2) = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{99}}(m_1 + m_2)\right),$$

$$m_1 \in [0, 6], m_2 \in [0, 6].$$

График теоретической АКФ приведён на рис. 3г.

Алгоритмическая АКФ вычисляется на основании коэффициентов Фурье, полученных ранее:

$$R_A(m_1, m_2) = M[y(i_1, i_2)y(i_1 + m_1, i_2 + m_2)] =$$

$$= X_{\phi\psi}^2(0, 0) + 4 \sum_{n=1}^6 X_{\phi\psi}^2(n, 0) \cos\left(\frac{2\pi}{6}nm_1\right) +$$

$$+ 4 \sum_{m=1}^6 X_{\phi\psi}^2(0, m) \cos\left(\frac{2\pi}{6}mm_2\right) +$$

$$+ 4 \sum_{k_1=1}^6 \sum_{k_2=1}^6 X_{\phi\psi}^2(k_1, k_2) \cos\left(\frac{2\pi}{6}(k_1m_1 + k_2m_2)\right),$$

$$m_1 \in [0, 6], m_2 \in [0, 6].$$

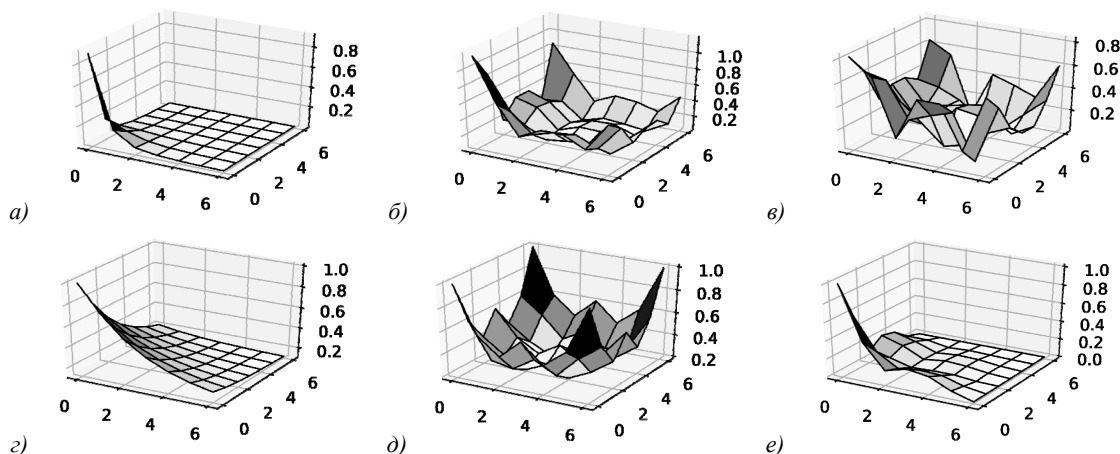


Рис. 3. График неограниченной ФСПЭ (а); график сымитированного детерминированного сигнала (б); график сымитированного случайного сигнала (в); график теоретической АКФ (г); график алгоритмической АКФ (д); график экспериментальной АКФ детерминированного сигнала (е)

График алгоритмической АКФ приведен на рис. 3д. Сравнение алгоритмической и теоретической АКФ позволяет оценить качество вычисления коэффициентов. Однако необходимо заметить, что периодическая природа алгоритмической АКФ, объясняющая симметричность графика, оставляет свой вклад в вычислении погрешности.

Экспериментальная АКФ вычисляется на основании сымитированного сигнала, детерминированного или случайного:

$$R_{\Omega}(m_1, m_2) =$$

$$= \frac{1}{(7 - m_1)(7 - m_2)} \sum_{i_1=1}^{6-m_1} \sum_{i_2=1}^{6-m_2} y(i_1, i_2)y(i_1 + m_1, i_2 + m_2),$$

$$m_1 \in [0, 6], m_2 \in [0, 6].$$

График экспериментальной АКФ для одной реализации случайного сигнала приведен на рис. 3е. Экспериментальная АКФ рассчитывается по сымитированному сигналу и учитывает его случайную или

детерминированную природу. При имитации детерминированного сигнала была вычислена средняя погрешность:

$$\Delta R_{A\text{cp}} = \frac{\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} |R_A(m_1, m_2) - R_{\Sigma}(m_1, m_2)|}{N_1 N_2} = 0,37.$$

5.2. Имитация случайных сигналов с ФСПЭ, заданной на ограниченных интервалах определения

Рассмотрим пример со следующими входными данными: $N_1=9, N_2=5, T=1$ с, $\omega_{1c}=9\pi$ рад/с, $\omega_{2c}=5\pi$ рад/с, $\lambda_{k_1, k_2}=1, \Delta t_1=1/9$ с, $\Delta t_2=1/5$ с.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} X_{\phi\psi}(0,0) &= 0,149, \quad X_{\phi\psi}(n,0) = 0,236, \\ X_{\phi\psi}(0,m) &= 0,3165, \quad n \in [0,8], \quad m \in [0,4], \\ X_{\phi\psi}(k_1, k_2) &= 0,105, \quad k_1 \in [0,8], \quad k_2 \in [0,4]. \end{aligned}$$

Эти коэффициенты позволяют получить случайные коэффициенты и затем случайные сигналы. На рис. 4а приведены три реализации случайного сигнала с ограниченной ФСПЭ.

Алгоритмическая АКФ на основании новых значений коэффициентов будет вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned} R_A(m_1, m_2) &= M[y(i_1, i_2)y(i_1, i_2)] = \\ &= X_{\phi\psi}^2(0,0) + 4 \sum_{n=1}^8 X_{\phi\psi}^2(n,0) \cos\left(\frac{2\pi}{8}nm_1\right) + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^4 X_{\phi\psi}^2(0,m) \cos\left(\frac{2\pi}{4}mm_2\right) + \\ &+ 4 \sum_{k_1=1}^8 \sum_{k_2=1}^4 X_{\phi\psi}^2(k_1, k_2) \cos\left(2\pi\left(\frac{k_1 i_1}{8} + \frac{k_2 i_2}{4}\right)\right), \\ m_1 &\in [0,8], \quad m_2 \in [0,4]. \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 4б приведен график алгоритмической АКФ, рассчитанной по формуле (10). Формула экспериментальной АКФ совпадает с предыдущим примером и позволяет получить графики различных реализаций, приведённых на рис. 4в. Разброс амплитуд случайных сигналов различается, как и ожидается от случайной системы, сохраняя сходную общую природу поведения. Найденные значения средней погрешности для двух реализаций равны 0,15 и 0,21, что демонстрирует большую приспособленность метода к имитации сигналов с ФСПЭ в форме белого шума. Общая погрешность имитации для обеих рассмотренных форм ФСПЭ лежит в допустимом на данном этапе разработки диапазоне, однако дальнейшее развитие метода подразумевает повышение точности.

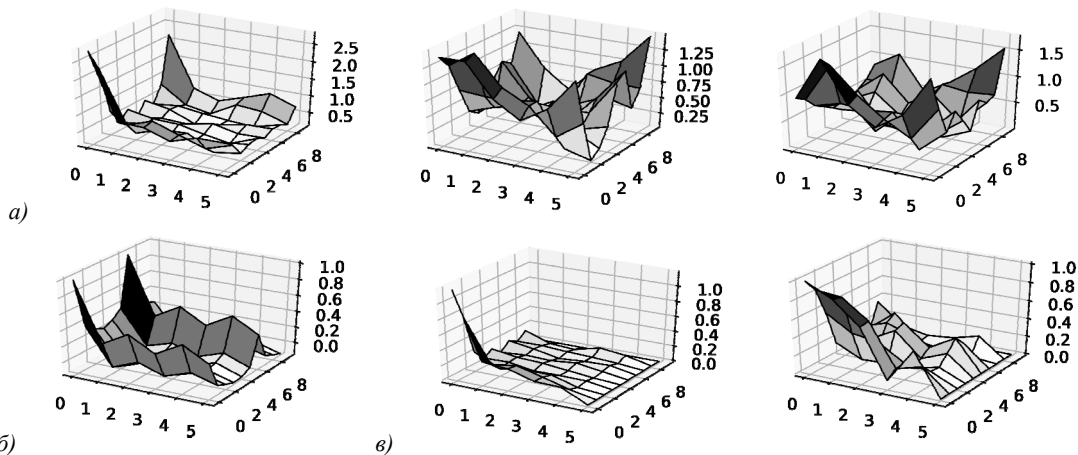


Рис. 4. Графики трёх реализаций случайного сигнала с ограниченной ФСПЭ (а); график алгоритмической АКФ (б); графики экспериментальной АКФ для двух реализаций случайного сигнала (в)

Заключение

Данная статья продолжает серию статей, направленных на исследование новых методов и моделей энергетической теории цифрового матричного процессинга, в рамках которого планируется разработка основ энергетической теории цифрового матричного представления и преобразования реальных сигналов для создания быстрых алгоритмов, обеспечивающих снижение вычислительной сложности и повышение точности восстановления сигналов применительно к нанотехнологическим процессам.

Сравнительный анализ методов имитации двумерных сигналов привёл к формулировке оригиналь-

ного метода имитации в гармоническом базисе Фурье. В статье детально описаны разработанные методы дискретизации функций спектральной плотности энергии, являющиеся важной подготовительной частью процесса имитации в базисе Фурье.

Реализована программная система имитации, на двух типовых примерах показана работоспособность и эффективность полученных результатов, которые имеют самостоятельное научно-техническое значение и могут быть использованы для разработки новых эффективных спектральных средств имитации для интеллектуальных систем поддержки принятия решений [19–22].

Дальнейшее развитие связано с применением рассмотренного спектрального метода для имитации в других базисах и разработкой быстрой версии алгоритма [23]. Также возможно дополнение метода имитации дискретизацией ФСПЭ с формой раstra дискретизации, отличной от прямоугольной, и, в долгосрочной перспективе, постепенное приращение точности имитации и размерности имитируемых сигналов [24, 25].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию «Фундаментальные исследования методов цифровой трансформации компонентной базы микро- и наносистем» (проект № 0705-2020-0041).

Способы имитации, предложенные в статье, будут использованы при разработке и отладке интеллектуальных систем поддержки принятия решения (проект по программе «Университеты 2030» Минобрнауки), а также при разработке корреляционной теории моделирования многомерных сигналов и процессов в гибридных системах искусственного интеллекта реального времени (проект по гранту Российского Научного Фонда, Соглашение от № 22-11-00049 от 12.05.2022 г.).

References

- [1] Syuzev VV, Smirnova EV, Proletarsky AV. Algorithms of multidimensional simulation of random processes. *Computer Optics* 2021; 45(4): 627-637. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-770.
- [2] Dudgeon DE, Mersereau RM. *Multidimensional digital signal processing*. Prentice Hall; 1983.
- [3] Yaroslavsky LP. An introduction to digital imaging [In Russian]. Moscow: "Sovetskoe Radio" Publisher; 1979.
- [4] Bykov VV. *Digital modeling in statistical radio engineering* [In Russian]. Moscow: "Sovetskoe Radio" Publisher; 1971.
- [5] Deykin II. One- and unidirectional two-dimensional signal imitation in complex basis (Extended abstract). In Book: Thalheim B, Makhortov S, Sychev A, eds. *Data analytics and management in data intensive domains. Extended abstracts of the XXII International Conference DAMDID/RCDL' 2020*. Voronezh: Voronezh State University Publisher; 2020: 229-232.
- [6] Katkovnik VY, Poluektov RA. *Multidimensional discrete control signals* [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1966.
- [7] Sotnikov AA, Yakupov SZ, Romanovsky AS. Application of simulation modeling for control of computing systems of hydro-location complexes [In Russian]. *Science and Education* 2013; 6: 351-364. DOI: 10.7463/0613.0570096.
- [8] Shaktarin BN. *Random processes in radio engineering: A series of lectures* [In Russian]. Moscow: "Radio i Svyaz" Publisher; 2000.
- [9] Abdulkadhim HA, Andriyanov NA. Brief review on random fields modeling method [In Russian]. *Radioelektronnaya Tehnika* 2018; 1(11): 139-142.
- [10] Vasilyev KK, Andriyanov NA, Abdulkadhim HA. Efficiency of filtering random fields with multiple roots of characteristic equations [In Russian]. *Radiotekhnika* 2018; 6: 20-23.
- [11] Podrouzek J, Vorel J, Wan-Wendner R. Random and gradient based fields in discrete particle models of heterogeneous materials. *1st Int Conf on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering* 2017: 605-615. DOI: 10.7712/120217.5396.16710.
- [12] Rabiner LR, Gold B. *Theory and application of digital signal processing*. Prentice Hall; 1975.
- [13] Liu Y, Li J, Sun S, Yu B. Advances in Gaussian random field generation: A review. *Comput Geosci* 2019; 23: 1011-1047. DOI: 10.1007/s10596-019-09867-y.
- [14] Pugachev VS. *The theory of random functions and its application to problems of automatic control* [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 1962.
- [15] Syuzev VV. *Fundamentals of the theory of digital signal processing* [In Russian]. Moscow: "RTSoft" Publisher; 2014.
- [16] Deikin II, Syuzev VV, Gurenko VV, Smirnova EV, Lyubavsky KK. Simulation of random bandpass signals in a complex basis [In Russian]. *Problems of Modern Science and Education* 2019; 11(144): 9-14.
- [17] Syuzev VV, Gurenko VV. Harmonic algorithms for signal simulation within the framework of the correlation theory [In Russian]. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*. 2017; 4: 98-117. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-4-98-117.
- [18] Kotelnikov VA. On the bandwidth of ether and wire in telecommunications [In Russian]. *Materials for the I All-Union Congress on the issues of technical reconstruction of communications and the development of low-current industry* 1933.
- [19] Kanev A, Terekhov V, Kochneva M, Chernenky V, Skvortsova M. Hybrid intelligent system of crisis assessment using natural language processing and metagraph knowledge base. *2021 IEEE Conf of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus) 2021*: 2099-2103. DOI: 10.1109/EIConRus51938.2021.9396100.
- [20] Suyatinov SI, Buldakova TI, Vishnevskaya JA. Identification of situations based on synergetic model. *2021 3rd Int Conf on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2021: 509-514. DOI: 10.1109/SUMMA53307.2021.9632207.
- [21] Skvortsova M, Grout V. Basic approaches to assessing risks and threats in decision support systems. *2018 IEEE Conf of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus) 2018*: 1563-1566. DOI: 10.1109/EIConRus.2018.8317397.
- [22] Andreev A, Berezkin D, Kozlov I. Approach to Forecasting the development of situations based on event detection in heterogeneous data streams. In Book: Kalinichenko L, Manolopoulos Y, Malkov O, Skvortsov N, Stupnikov S, Sukhomlin V, eds. *Data analytics and management in data intensive domains. DAMDID/RCDL 2017*. Cham: Springer; 2018: 213-229. DOI: 10.1007/978-3-319-96553-6_16.
- [23] Syuzev VV. *Digital signal processing: methods and algorithms. Part 2: Fourier transforms in classical and generalized bases, fast DSP algorithms on static and sliding time intervals* [In Russian]. Moscow: "Research Institute of Radio Electronics and Laser Technology" Publisher; 2012.
- [24] Smirnova EV, Syuzev VV, Samarev RS, Deykin II, Proletarsky AV. High-dimensional simulation processes in new energy theory: Experimental research (Extended abstract). In Book: Thalheim B, Makhortov S, Sychev A, eds. *Data analytics and management in data intensive domains. Extended abstracts of the XXII International Conference DAMDID*. Voronezh: Voronezh State University Publisher; 2020: 160-163.
- [25] Gurenko VV, Bychkov BI. The discretization of the energy characteristics of signals in harmonic simulation algorithms. *2019 IEEE Conf of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus) 2019*: 2142-2147. DOI: 10.1109/EIConRus.2019.8657153.

Сведения об авторах

Сюзев Владимир Васильевич, 1946 года рождения, в 1970 году окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана, факультет приборостроения, специальность «Счетно-решающие приборы и устройства». В 1976 г. защитил кандидатскую, а в 1999 г. – докторскую диссертацию. С 1999 года по 2015 г. являлся заведующим кафедрой компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н. Э. Баумана, в н/вр. – профессор. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, многомерные структуры, разработка новой энергетической теории математического представления и преобразования моделей, сигналов и процессов в системах управления динамическими объектами на основе имитационного моделирования сигналов. E-mail: k_iub@bmstu.ru.

Пролетарский Андрей Викторович, 1964 года рождения, в 1987 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и системы управления по специальности «Автоматические системы управления». Руководитель Научно-учебного комплекса «Информатика и системы управления», заведующий кафедрой компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н. Э. Баумана, доктор технических наук, профессор. Область научных интересов: интеллектуальные системы и искусственный интеллект, мониторинг и управление динамическими системами, большие данные. E-mail: pav@bmstu.ru.

Миков Дмитрий Александрович, 1990 года рождения, в 2014 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и систем управления по специальности «Информационная безопасность». В 2018 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по теме «Управление информационными рисками в системах дистанционного мониторинга состояния объекта». С 2019 года – доцент кафедры компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление информационными рисками, информационная безопасность автоматизированных систем и систем больших данных. E-mail: mikov@bmstu.ru.

Дейкин Иван Игоревич, 1997 года рождения, в 2021 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и систем управления по специальности «Информатика и вычислительная техника». С 2021 года – аспирант кафедры компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н.Э. Баумана по направлению «Теоретические основы информатики». Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, теория информации, искусственный интеллект. E-mail: deykinii@student.bmstu.ru.

ГРНТИ: 28.17.19, 28.17.23, 28.23.29

Поступила в редакцию 23 ноября 2021 г. Окончательный вариант – 5 марта 2022 г.

Techniques of sampling the energy characteristics of two-dimensional random signals

V.V. Syuzev¹, A.V. Proletarsky¹, D.A. Mikov¹, I.I. Deykin¹

¹ Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia, 2nd Baumanskaya street, 5/1

Abstract

The article is devoted to methods of discretization of energy characteristics of two-dimensional random signals when simulating random signals using the original harmonic method, which is a generalization of the well-known algorithm proposed by V. S. Pugachev for the two-dimensional case. Requirements imposed on the sampling method are aimed at reducing the computational complexity of the simulation method and increasing its flexibility thanks to removing restrictions on the form of autocorrelation functions and spectral energy density functions. The use of the simulation error as a criterion for quality assessment is proposed. The discretization method is considered for signals given both on unlimited definition intervals and on limited ones. The article demonstrates results of the software system implementation in which the original simulation method is realized using the described sampling methods in both cases. The proposed technique is shown to be robust and efficient, with the results obtained being of independent scientific and technical value and showing promise for developing new effective spectral techniques of simulating signals for the use in intelligent decision support systems.

Keywords: random two-dimensional signal, modeling and simulation of signals, Pugachev's algorithm, harmonic Fourier bases, energy characteristics of signals, energy spectral density function, autocorrelation function, intelligent decision support systems, ultra-fast information processing.

Citation: Syuzev VV, Proletarsky AV, Mikov DA, Deykin II. Techniques of sampling the energy characteristics of two-dimensional random signals. *Computer Optics* 2022; 46(5): 828-839. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1074.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Federation Ministry of Science and Higher Education under the government project on "Fundamental research of methods of digital transformation of components for micro- and nano-systems" (Project # 0705-2020- 0041).

Authors' information

Vladimir Vasilievich Syuzev (b. 1946) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 1970, with a degree in Calculating and Solving Devices. He defended his PhD thesis in 1976 and his doctoral thesis - in 1999. From 1999 to 2015, he was the Head of Computer Systems and Networks department at Bauman Moscow State Technical University. Research interests: digital signal processing, multidimensional structures, development of a new energy theory of mathematical representation and transformation of models, signals and processes in control systems of dynamic objects based on signal simulation. E-mail: k_iu6@bmstu.ru.

Andrey Viktorovich Proletarsky (b. 1964), in 1987, he graduated from Bauman Moscow State Technical University, faculty of Computer Science and Control Systems with a degree in Automatic Control systems. He is a Head of the Scientific and Educational Complex "Informatics and Control Systems", head of Computer Systems and Networks department of Bauman Moscow State Technical University, Doctor of Technical Sciences, Professor. Research area: artificial intelligent systems, monitoring and management of dynamic systems, big data. E-mail: pav@bmstu.ru.

Dmitry Alexandrovich Mikov (b. 1990), in 2014, he graduated from Bauman Moscow State Technical University, faculty of Computer Science and Control Systems with a degree in Information Security. In 2018 he defended his thesis for the degree of PhD in Engineering Sciences on the topic «Information security risk management in systems for remote monitoring of the object state». Since 2019 – Associate Professor of the Department of Computer Systems and Networks, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: information security risk management, information security of automated systems and big data systems. E-mail: mikov@bmstu.ru.

Ivan Igorevich Deykin (b. 1997), graduated from Bauman Moscow State Technical University's Faculty of Informatics and System Management in 2021 with a degree in Informatics and Computer Engineering. Since 2021 he is a postgraduate student of Computer Systems and Networks department in Bauman Moscow State Technical University in the direction of "Theoretical Fundamentals of Informatics". Research interests: digital signal processing, information theory, artificial intelligence. Email: deykinii@student.bmstu.ru.

Received November 23, 2021. The final version – March 5, 2022.
