

# Спиновый угловой момент Гауссовых пучков с несколькими поляризационными сингулярностями

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

## Аннотация

Исследован параксиальный векторный Гауссов пучок с несколькими поляризационными сингулярностями, расположенными равномерно на окружности. Такой пучок является суперпозицией цилиндрически поляризованного пучка Лагерра–Гаусса с линейно поляризованным Гауссовым пучком. Показано, что, несмотря на линейную поляризацию в начальной плоскости, при распространении в пространстве формируются чередующиеся области с плотностью спинового углового момента разного знака, что свидетельствует о спиновом эффекте Холла. Установлено, что в любой поперечной плоскости максимальный по величине спиновый угловой момент достигается на окружности определённого радиуса. Получено приближённое выражение для расстояния до поперечной плоскости с максимальной плотностью спинового углового момента. Кроме того, получен радиус окружности с сингулярностями, для которого достижимая плотность спинового углового момента максимальна. Обнаружено, что в этом случае энергии пучков Лагерра–Гаусса и Гаусса равны. Получено выражение для плотности орбитального углового момента, и установлено, что она равна плотности спинового углового момента, умноженной на  $-m/2$ , где  $m$  – порядок пучка Лагерра–Гаусса, равный числу поляризационных сингулярностей. Рассмотрена аналогия с плоскими волнами, и обнаружено, что спиновый эффект Холла возникает из-за разной расходимости у линейно поляризованного Гауссова пучка и у цилиндрически поляризованного пучка Лагерра–Гаусса.

**Ключевые слова:** цилиндрический векторный пучок; радиальная поляризация; поляризационная сингулярность; Гауссов пучок; пучок Лагерра–Гаусса; спиновый угловой момент; оптический спиновый эффект Холла; орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Спиновый угловой момент Гауссовых пучков с несколькими поляризационными сингулярностями / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 6. – С. 863-874. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1312.

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin angular momentum of Gaussian beams with several polarization singularities. Computer Optics 2023; 47(6): 863-874. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1312.

## Введение

Элементы микромашин могут приводиться в действие с помощью света, и в качестве оптических ловушек широко используются вихревые оптические пучки. Естественным обобщением таких пучков являются световые поля с множественными вихрями. Довольно общие выражения для описания таких полей были получены Г. Индебету [1] и Е.Г. Абрамочкиным и В.Г. Волостниковым [2]. Эти поля распространяются в пространстве без изменения своей поперечной формы интенсивности, с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси. Наряду с оптическими вихрями, которые являются фазовыми сингулярностями, или точками с неопределённой фазой, векторные световые поля могут иметь поляризационные сингулярности, где не определена поляризация. Поляризационные сингулярности исследовались в огромном количестве работ. Недавно был опубликован обзор о поляризационных сингулярностях [3].

Наиболее широко изучаемые поляризационные сингулярности – это радиальная и азимутальная поляризация, а также их суперпозиция, известная как цилиндрическая поляризация [4]. Такие поля могут быть представлены в виде суперпозиции двух оптических вихрей с противоположной круговой поляризацией и с противоположным топологическим зарядом  $\pm 1$  [5]. Основываясь на этой схеме, мы исследовали в 2018 году световые поля со множественными поляризационными сингулярностями, расположенными на окружности с центром на оптической оси [6, 7]. Поляризация таких полей локально линейная. Было установлено, что, в отличие от фазовых сингулярностей, которые сохраняются в любой поперечной плоскости, поляризационные сингулярности появляются только в дискретном наборе поперечных плоскостей. Оказалось, что сингулярности могут преобразовываться, например, из радиальной и азимутальной поляризации в начальной плоскости соответственно в азимутальную и радиальную поляризацию в дальней

зоне. Однако мы не изучали, что происходит с поляризацией между плоскостями, где поляризационные сингулярности восстанавливаются, то есть между плоскостями с локально линейной поляризацией. В [8] было замечено, что при распространении такие сингулярности расщепляются на пары С-точек. Как оказалось, такое расщепление свидетельствует об оптическом спиновом эффекте Холла, который заключается в возникновении областей с ненулевым спиновым угловым моментом, несмотря на линейную поляризацию в начальной плоскости. Изначально этот эффект наблюдался, например, в микрорезонаторах [9], метаматериалах [10], диэлектрических решётках [11], а также в свободном пространстве в условиях острой фокусировки [12].

В данной работе мы исследуем этот эффект для параксиального Гауссова пучка со множественными поляризационными сингулярностями из [6,7]. Такой пучок является суперпозицией цилиндрически поляризованного пучка Лагерра–Гаусса (ЛГ) и линейно поляризованного Гауссова пучка. Показано, что максимальная величина плотности СУМ появляется на окружности, и установлен радиус этой окружности. Установлено, что максимальная плотность СУМ формируется в определённой поперечной плоскости, расстояние до которой получено примерно. Получено, что максимальная плотность СУМ может быть достигнута, когда окружность с сингулярностями имеет определённый радиус, такой, при котором энергия Гауссова пучка равна энергии пучка ЛГ. Раскрыт механизм возникновения спинового эффекта Холла в таких пучках. Оказалось, что его причиной является разная расходимость пучка ЛГ и Гауссова пучка.

**1. Параксиальные световые поля со множественными фазовыми или поляризационными сингулярностями**

Ранее было показано (формула (17) в [2]), что любая функция вида

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{r^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{re^{i\varphi}}{qw_0}\right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $w_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $q = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw_0^2/2$  – расстояние Рэлея,  $k$  – волновое число,  $f(re^{i\varphi})$  – произвольная целая аналитическая функция, описывает решение параксиального уравнения Гельмгольца:  $2ik(\partial E/\partial z) + (\partial^2 E/\partial x^2) + (\partial^2 E/\partial y^2) = 0$ .

Световое поле (1) распространяется в свободном пространстве без изменения своей поперечной формы. Параметр  $q$  определяет масштаб и поворот светового поля: на расстоянии  $z$  поле становится в  $|q| = [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}$  раз шире и поворачивается вокруг оптической оси на угол, равный фазе Гоу  $\psi = \arg q = \arctg(z/z_0)$ .

С помощью (1) можно получить решение параксиального уравнения Гельмгольца с оптическими вих-

рями в произвольных точках в начальной плоскости с полярными координатами  $(r_p, \varphi_p)$  ( $p = 0, 1, \dots, m-1$ ). В произвольной поперечной плоскости комплексная амплитуда такого поля имеет вид [1]:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{qw_0^m} \exp\left(-\frac{r^2}{qw_0^2}\right) \prod_{p=0}^{m-1} \left(\frac{re^{i\varphi}}{q} - r_p e^{i\varphi_p}\right). \quad (2)$$

Расположив вихри равномерно на окружности радиуса  $a_0$ , то есть  $r_p = a_0$ ,  $\varphi_p = 2\pi p/m$ , получим:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{qw_0^m} \exp\left(-\frac{r^2}{qw_0^2}\right) \left[\left(\frac{r}{q}\right)^{|m|} e^{im\varphi} - a_0^{|m|}\right]. \quad (3)$$

Это поле является суперпозицией однокольцевого пучка Лагерра–Гаусса (ЛГ)  $m$ -го порядка с фундаментальным Гауссовым пучком.

Известно, что радиально поляризованный свет может быть представлен как суперпозиция оптических вихрей порядков  $\pm 1$  с противоположной круговой поляризацией [5], так как вектор Джонса можно записать в виде суммы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Если в этом выражении заменить экспоненты  $e^{i\varphi}$  и  $e^{-i\varphi}$  полем (3) порядков соответственно  $m$  и  $-m$ , получим векторное световое поле с  $m$  поляризационными сингулярностями, расположенными на окружности радиуса  $a_0$  [6, 7]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{W_0^{-1/2}}{q^{m+1}w_0^m} \exp\left(-\frac{r^2}{qw_0^2}\right) \begin{bmatrix} r^m \cos m\varphi - a_0^m q^m \\ r^m \sin m\varphi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где множитель

$$W_0 = \frac{\pi w_0^2}{2} \left[ \frac{m!}{2^m} + \left(\frac{a_0}{w_0}\right)^{2m} \right] \quad (6)$$

введён для нормировки энергии пучка (чтобы сделать энергию единичной для любых значений  $m$  и  $a_0$ ).

Примеры такого поля при  $m = 2, 3, 4$  показаны на рис. 1. Так как вихри располагаются на окружности радиуса  $a_0$ , далее будем называть этот параметр радиусом окружности сингулярностей.

Заметим, что поле (5) может рассматриваться как суперпозиция двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с противоположным топологическим зарядом и круговой поляризацией, а также линейно поляризованного Гауссова пучка:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{W_0}} \text{LG}_m(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{W_0}} \text{LG}_{-m}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{W_0}} \left(\frac{a_0}{w_0}\right)^m \text{LG}_0(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $LG_m(r, \varphi, z)$  – комплексная амплитуда скалярного однокольцевого пучка Лагерра–Гаусса  $m$ -го порядка:

$$LG_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \left( \frac{r}{qw_0} \right)^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{qw_0^2} + im\varphi\right). \quad (8)$$

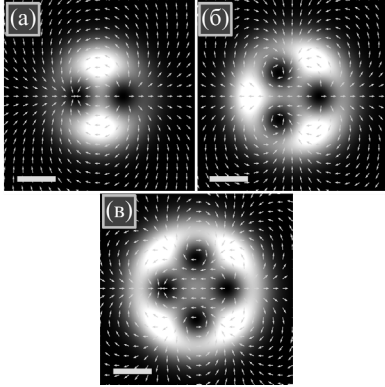


Рис. 1. Распределения интенсивности светового поля (5) в начальной плоскости ( $z = 0$ ) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, количество поляризационных сингулярностей  $m = 2$  (а),  $m = 3$  (б) и  $m = 4$  (в), радиус окружности с сингулярностями  $a_0 = 600$  мкм (а),  $a_0 = 700$  мкм (б),  $a_0 = 800$  мкм (в). Размер всех рисунков –  $5 \times 5$  мм<sup>2</sup>, масштабная метка на каждом рисунке означает 1 мм. Стрелками показаны направления линейной поляризации

## 2. Распределение интенсивности

Из формулы (5) следует, что распределение интенсивности имеет вид:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= |E_x(\mathbf{r})|^2 + |E_y(\mathbf{r})|^2 = \\ &= \frac{1}{|q|^{2m+2} w_0^{2m} W_0} \exp\left(-\frac{2r^2}{|q|^2 w_0^2}\right) \times \\ &\times \left[ r^{2m} + (a_0 |q|)^{2m} - 2(a_0 |q|)^m \cos(m\psi) \cos(m\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда видно, что нули интенсивности могут появляться только в дискретном наборе поперечных плоскостей, для которых  $\cos(m\psi) = \pm 1$ , то есть  $\tan(m\psi) = 0$ , что согласуется с [6, 7].

В начальной плоскости интенсивность равна

$$\begin{aligned} I(r, \varphi, 0) &= \frac{1}{w_0^{2m} W_0} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times \\ &\times \left[ r^{2m} + a_0^{2m} - 2a_0^m r^m \cos(m\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

При малом радиусе окружности сингулярностей  $a_0$  энергия пучков ЛГ в (7) преобладает и распределение интенсивности выглядит как кольцо (рис. 2а, з). При больших значениях  $a_0$ , наоборот, Гауссов пучок ярче и интенсивность больше похожа на пятно (рис. 2б, д). В некоторых приложениях, однако, желательно локализовать нули интенсивности между световыми стенками. Например, в 2008 году показано [13], что вихревой пучок с кольцевым профилем может удержи-

вать металлические наночастицы в тёмной области в центре пучка. Поэтому распределения интенсивности на рис. 2а, б, з, д нежелательны. Тогда найдём радиус  $a_0$ , такой, чтобы интенсивность в центре пучка и на его краях, вблизи нулей интенсивности, была примерно одинаковой. Поскольку первый ноль интенсивности находится при  $\varphi = 0$ , это условие может быть записано как

$$I(0, 0, 0) = \max_{r > a_0} I(r, 0, 0), \quad (11)$$

или, после извлечения корня из обеих частей (11),

$$a_0^m = \max_{r > a_0} \left\{ \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) (r^m - a_0^m) \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, требуется определить максимальную интенсивность на краю пучка, около тёмных пятен. Приравняв нулю производную правой части (12) по  $r$ , получим уравнение для радиальной координаты  $r_{\max}$  точки с максимальной интенсивностью:

$$2(r_{\max}^m - a_0^m) = mw_0^2 r_{\max}^{m-2}. \quad (13)$$

Это уравнение можно решить аналитически только для малых значений  $m$ . Однако нам не нужно его решать, так как требуется найти  $a_0$ , а не  $r_{\max}$ . Выразив  $a_0$  через  $r_{\max}$  и подставляя его в (12), получим:

$$r_{\max}^m - \frac{mw_0^2}{2} r_{\max}^{m-2} = \frac{mw_0^2}{2} r_{\max}^{m-2} \exp\left(-\frac{r_{\max}^2}{w_0^2}\right). \quad (14)$$

Разделив обе части на  $(mw_0^2/2)r_{\max}^{m-2}$ , получим простое уравнение:  $(2/m)\xi - 1 = \exp(-\xi)$ , где  $\xi = (r_{\max}/w_0)^2$ . Так как при больших значениях  $m$  примерное решение равно  $\xi \approx m/2$ , обозначим  $\xi = m/2 + \eta$  и получим новое уравнение  $(2/m)\eta \approx e^{-m/2} (1 - \eta)$ , из которого следует  $\eta \approx e^{-m/2} / (2/m + e^{-m/2})$ . Возвращаясь к переменной  $\xi$ , получим решение:  $\xi = (m/2) [1 + (m/2 + e^{-m/2})^{-1}]$ . Таким образом, мы получаем радиус окружности с сингулярностями  $a_0$ , для которого интенсивность в центре и на краю пучка (около тёмного пятна) примерно одинакова:

$$a_0 = \left( r_{\max}^m - \frac{mw_0^2}{2} r_{\max}^{m-2} \right)^{1/m}, \quad (15)$$

где

$$r_{\max} = w_0 \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{m/2 + e^{-m/2}}}. \quad (16)$$

Отсюда видно, что первые два множителя равны радиусу максимальной интенсивности однокольцевого пучка ЛГ  $m$ -го порядка с радиусом перетяжки  $w_0$ , тогда как третий множитель стремится к единице с ростом числа сингулярностей  $m$ . На рис. 2в, е показаны распределения интенсивности при радиусе окружности сингулярностей, полученном по формуле

(15). Эти рисунки подтверждают, что формула (15) позволяет сделать интенсивности в центре и на краю пучка примерно равными.

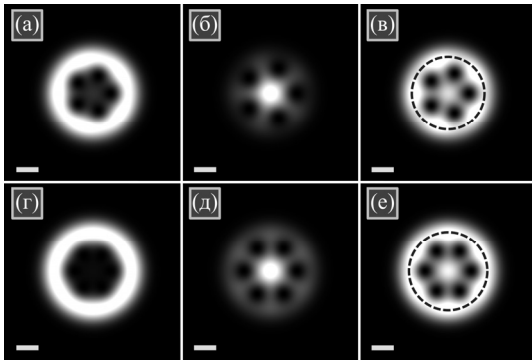


Рис. 2. Распределения интенсивности светового поля (5) в начальной плоскости ( $z = 0$ ) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, количество поляризационных сингулярностей  $m = 5$  (а-в) и  $m = 6$  (г-е), радиус окружности сингулярностей  $a_0 = 800$  мкм (а, г),  $a_0 = 1200$  мкм (б, д),  $a_0 = 942$  мкм (в),  $a_0 = 1041$  мкм (е). Размер всех рисунков –  $8 \times 8$  мм<sup>2</sup>, масштабная метка на каждом рисунке означает 1 мм. Пунктирными окружностями (в, е) показан радиус максимальной интенсивности на краю пучка, рассчитанный по формуле (16)

В оптических ловушках распределение интенсивности влияет на то, где захватываются частицы, но их вращательное движение управляется спиновым и орбитальным угловым моментом.

### 3. Плотность спинового углового момента

В параксиальных световых полях существенное значение может иметь только продольная составляющая вектора СУМ, которая равна

$$S_z = 2 \operatorname{Im} \{ E_x^* E_y \}. \tag{17}$$

Подставив сюда выражение (5) для светового поля, получим:

$$S_z = \frac{2}{|q|^2 W_0} \left( \frac{a_0 r}{|q| w_0^2} \right)^m \exp \left( -\frac{2r^2}{|q|^2 w_0^2} \right) \times \sin(m\psi) \sin(m\varphi). \tag{18}$$

Из этого выражения видно, что существуют поперечные плоскости, в которых СУМ равен нулю, то есть поляризация линейная. В этих плоскостях  $\sin(m\psi) = 0$ , то есть они расположены на следующих расстояниях [6, 7]:

$$z = z_0 \tan \left( \frac{\pi p}{m} \right), \tag{19}$$

где  $p = 0, 1, \dots, [m/2]$ , Знак  $[.]$  означает целую часть дробного числа.

В других плоскостях СУМ в общем случае ненулевой, но в каждой плоскости он равен нулю при полярных углах  $\varphi_p = \pi p/m$ , где  $p = 0, \dots, m - 1$ .

Сравнение выражений для СУМ и для интенсивности показывает, что в произвольной поперечной плоскости световое поле имеет С-точки, в которых поляризация круговая [14, 15]. Уравнение  $S_z(r, \varphi, z) = \pm I(r, \varphi, z)$  приводит соответственно к следующим координатам С-точек:

$$\begin{cases} r = a_0 |q|, \\ \varphi = \pm \psi + \frac{2\pi p}{m}, \end{cases} \tag{20}$$

где  $p = 0, \dots, m - 1$ . Таким образом, имеется  $m$  точек с правой круговой поляризацией (при  $\varphi = \psi + 2\pi p/m$ ) и  $m$  точек с левой круговой поляризацией (при  $\varphi = -\psi + 2\pi p/m$ ).

Из (20) видно, что при распространении С-точки с правой и с левой круговой поляризацией поворачиваются вокруг оптической оси в противоположных направлениях. При прохождении через поперечные плоскости (19) координаты этих С-точек совпадают, они компенсируют друг друга, и поляризация становится линейной. Такая динамика С-точек показана на рис. 3.

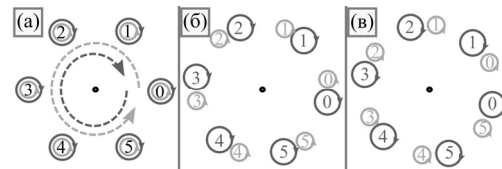


Рис. 3. Динамика С-точек при распространении светового поля (5). В начальной плоскости (а) поляризация линейная, то есть противоположные С-точки располагаются в одних и тех же точках и компенсируют друг друга. Затем, при распространении (б), С-точки с правой и с левой круговой поляризацией поворачиваются в поперечной плоскости в противоположных направлениях. При приближении к очередной плоскости с линейной поляризацией (в), заданной формулой (19), С-точки с правой и с левой круговой поляризацией снова сливаются

Попытаемся определить, где СУМ достигает нулевых и максимальных значений. Если в (18)  $\sin(m\psi) > 0$ , то максимальная и минимальная плотность СУМ достигается соответственно при полярных углах  $\varphi_p = (\pi + 4\pi p)/(2m)$  и  $\varphi_p = (-\pi + 4\pi p)/(2m)$ , где  $p = 0, \dots, m - 1$ , и эти углы не зависят от расстояния распространения и от радиуса окружности с сингулярностями  $a_0$ . Однако после прохождения плоскостей с линейной поляризацией и с поляризационными сингулярностями (19) углы с максимальной и с минимальной плотностью СУМ меняются местами.

Дифференцируя (18) по  $r$ , получим, что на фиксированном расстоянии распространения  $z$  и при углах  $\varphi_p$  максимальная плотность СУМ достигается на окружности радиуса

$$r = \frac{w_0 |q|}{2} \sqrt{m}. \tag{21}$$

Этот радиус в  $\sqrt{2}$  раза меньше радиуса максимальной интенсивности однокольцевого пучка ЛГ  $m$ -го порядка.

Подставляя радиус (21) в выражение (18) для СУМ, установим максимальную плотность СУМ в поперечной плоскости на расстоянии  $z$  от начальной плоскости:

$$\max_{r,\varphi} S_z = \frac{2}{|q|^2 W_0} \left( \frac{a_0 \sqrt{m}}{2w_0} \right)^m \exp\left(-\frac{m}{2}\right) \sin(m\psi). \quad (22)$$

Теперь, установив максимальный СУМ в любой поперечной плоскости, найдём плоскость, в которой СУМ достигает максимальных значений. Для этой плоскости должно быть выполнено условие:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \max_{r,\varphi} S_z \right) = 0. \quad (23)$$

Подставив сюда максимальный СУМ в плоскости [формула (22)], получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-1} \sin \left[ m \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right) \right] \right\} = 0. \quad (24)$$

Это приводит к следующему уравнению для расстояния  $z_{\max}$  до плоскости с максимальным СУМ:

$$\tan \left( m \arctan \left( \frac{z_{\max}}{z_0} \right) \right) = \frac{m z_0}{2 z_{\max}}. \quad (25)$$

Это уравнение может быть также записано в короткой форме через фазу Гоу  $\psi_{\max}$  этой плоскости:

$$\tan(\psi_{\max}) \tan(m\psi_{\max}) = m/2. \quad (26)$$

Согласно обоим этим уравнениям, расстояние до плоскости с максимальным СУМ не зависит от радиуса окружности сингулярностей  $a_0$ .

Эти уравнения могут быть решены аналитически только для малых значений  $m$ . Например,  $z = z_0/\sqrt{2}$  при  $m = 1$  и  $z = z_0/\sqrt{3}$  при  $m = 2$ . Для больших значений  $m$  попытаемся оценить их решения. Так как

$$\sin(m\psi_{\max}) = \frac{m}{\sqrt{4(z_{\max}/z_0)^2 + m^2}}, \quad (27)$$

получим выражение для СУМ в плоскостях, в которых он достигает экстремальных значений:

$$\max_{r,\varphi} S_z(z = z_{\max}) = \frac{2}{W_0} \left( \frac{a_0 \sqrt{m}}{2w_0} \right)^m \times \frac{e^{-m/2}}{\left[ 1 + (z_{\max}/z_0)^2 \right] \left[ 1 + (2/m)^2 (z_{\max}/z_0)^2 \right]^{1/2}}. \quad (28)$$

Согласно этому выражению, в каждой такой плоскости с локально максимальным СУМ он достигает всё меньших и меньших значений, то есть самый большой СУМ находится в первой из плоскостей, описываемых формулами (25) и (26).

Левая и правая части уравнения (25) показаны на рис. 4. Правая часть всегда положительна и спадает гиперболически. Левая часть – разрывная функция с нулями в точках  $z_{1,p} = z_0 \tan(\pi p/m)$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) и с разрывами в точках  $z_{2,p} = z_0 \tan(\pi(2p+1)/(2m))$  ( $p = 0, 1, \dots$ ). Следовательно, корни уравнения (25) находятся в интервалах  $[z_{1,p}, z_{2,p}]$ .

С другой стороны, левая часть (26) стремится к бесконечности при  $\psi \rightarrow \pi/(2m)$ . Тогда корень (26) должен быть в интервале  $0 < \psi < \pi/(2m)$ . При  $m \geq 2$  в этом интервале выполняется неравенство  $\tan(\psi) < 1$ . Поэтому кривая  $y = \tan(\psi) \tan(m\psi)$  ниже кривой  $y = \tan(m\psi)$ , хотя обе они стремятся к бесконечности при  $\psi \rightarrow \pi/(2m)$ . Следовательно, корень (26) должен быть правее, чем корень уравнения  $\tan(m\psi) = m/2$ . Поэтому первый корень уравнения (26) должен быть между значениями  $\psi = m^{-1} \arctan(m/2)$  и  $\psi = \pi/(2m)$ .

Следовательно, первый корень уравнения (25) находится в интервале от  $z = z_0 \tan[m^{-1} \arctan(m/2)]$  до  $z = z_0 \tan(\pi/(2m))$ . В этой работе мы будем использовать приближённое среднее значение

$$z_{\max} \approx \frac{z_0}{2} \tan \left[ \frac{\arctan(m/2)}{m} \right] + \frac{z_0}{2} \tan \left[ \frac{\pi}{2m} \right]. \quad (29)$$

Параграф «Численное моделирование» ниже подтверждает, что это хорошая аппроксимация при  $m > 3$ .

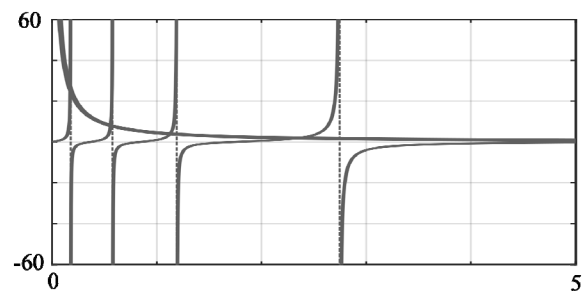


Рис. 4. Левая и правая части уравнения (25) как функции от  $z/z_0$  при  $m = 9$

Заметим, что величина СУМ различна при разных значениях  $a_0$ . В двух крайних случаях, когда все вихри сливаются в центре ( $a_0 = 0$ ) и когда они удаляются в бесконечность ( $a_0 \rightarrow \infty$ ), СУМ должен быть равен нулю. В первом случае световое поле сводится к пучку ЛГ с цилиндрической поляризацией  $m$ -го порядка, которая не разрушается при распространении и поле имеет неоднородную линейную поляризацию в любой поперечной плоскости. Во втором случае суперпозиция (5) состоит только из фундаментального Гауссова пучка, тогда как доля пучка ЛГ с поляризационным вихрем  $m$ -го порядка стремится к нулю. Гауссов пучок линейно поляризован и потому СУМ должен стремиться к нулю.

Продифференцировав (22) по  $a_0$ , определим радиус окружности поляризационных сингулярностей, при котором достигается максимальный СУМ:

$$a_{0,\max} = (m!)^{1/(2m)} \frac{w_0}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

При этом значении максимальный СУМ в произвольной поперечной плоскости равен

$$\begin{aligned} \max_{r,\varphi} S_z(a_0 = a_{0,\max}) &= \\ &= \frac{2}{\pi w_0^2} \frac{1}{|q|^2 \sqrt{m!}} \left(\frac{m}{2}\right)^{m/2} \exp\left(-\frac{m}{2}\right) \sin(m\psi). \end{aligned} \quad (31)$$

Применив формулу Стирлинга  $m! \sim (2\pi m)^{1/2} (m/e)^m$  [16], получим:

$$\begin{aligned} \max_{r,\varphi} S_z(a_0 = a_{0,\max}) &\approx \frac{2}{\pi w_0^2} \frac{1}{|q|^2} \frac{\sin(m\psi)}{(2\pi)^{1/4} 2^{m/2} m^{1/4}} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi w_0^2} \frac{1}{(2\pi)^{1/4} 2^{m/2} m^{1/4}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Согласно этой оценке, максимально достижимый СУМ убывает с ростом числа поляризационных сингулярностей.

Заметим, что линейно поляризованный Гауссов пучок в суперпозиции имеет следующее начальное распределение интенсивности:

$$I_{\text{GB}}(r, \varphi, 0) = \frac{1}{W_0} \left(\frac{a_0}{w_0}\right)^{2m} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \quad (33)$$

и доля его энергии в энергии всего поля имеет вид:

$$\begin{aligned} W_{\text{GB}} &= 2\pi \int_0^\infty I_{\text{GB}}(r, \varphi, 0) r dr = \frac{2\pi}{W_0} \left(\frac{a_0}{w_0}\right)^{2m} \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) r dr = \frac{(a_0/w_0)^{2m}}{m! 2^m + (a_0/w_0)^{2m}}. \end{aligned} \quad (34)$$

При расположении сингулярностей на окружности радиуса (30) эта энергия равна

$$W_{\text{GB}}(a_0 = a_{0,\max}) = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Таким образом, максимальная плотность СУМ достигается, когда энергия линейно поляризованного Гауссова пучка в суперпозиции (5) равна энергии цилиндрически поляризованного пучка ЛГ, то есть равна половине энергии всего светового поля.

#### 4. Плотность орбитального углового момента

В параксиальных световых полях только продольная составляющая вектора ОУМ может принимать существенное значение. Она равна [17, 18]:

$$J_z = \text{Im} \left\{ E_x^* \frac{\partial E_x}{\partial \varphi} + E_y^* \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \right\}. \quad (36)$$

Подставив сюда световое поле (5), получим:

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{1}{|q|^{2m+2} w_0^{2m} W_0} \exp\left(-\frac{2r^2}{|q|^2 w_0^2}\right) \times \\ &\times \text{Im} \left\{ \begin{aligned} &(r^m \cos m\varphi - a_0^m q^m)^* \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^m \cos m\varphi - a_0^m q^m) + \\ &+ (r^m \sin m\varphi)^* \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^m \sin m\varphi) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Мнимая часть второго слагаемого равна нулю, и потому плотность ОУМ имеет вид:

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{1}{|q|^{2m+2} w_0^{2m} W_0} \exp\left(-\frac{2r^2}{|q|^2 w_0^2}\right) \times \\ &\times \text{Im} \left\{ (r^m \cos m\varphi - a_0^m q^m) (-mr^m \sin m\varphi) \right\} = \\ &= \frac{-m}{|q|^2 W_0} \exp\left(-\frac{2r^2}{|q|^2 w_0^2}\right) \left(\frac{a_0 r}{|q| w_0}\right)^m \times \\ &\times \sin(m\psi) \sin(m\varphi). \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда видно, что ОУМ равен СУМ (18), но умноженному на  $-m/2$ .

Это отличается от стандартных вихревых пучков с однородной круговой поляризацией, чей ОУМ превосходит СУМ в  $m$  или  $-m$  раз.

#### 5. Аналогия с плоскими волнами и установление механизма

Согласно (5), световое поле включает в себя два пучка ЛГ с противоположными топологическими зарядами и с круговой поляризацией. При распространении в пространстве они поворачиваются, один по часовой стрелке, другой – против неё. Таким образом, формируется угловой аналог стоячей волны. Отсюда возникает вопрос, может ли описанный выше эффект возникать в обычной стоячей волне, если она состоит из двух плоских волн с противоположным углом наклона к оптической оси и противоположную круговую поляризацию. При сложении с линейно поляризованной плоской волной без наклона такое поле имеет следующую комплексную амплитуду:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{W_1}} \exp(ik_x x + ik_z z) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{W_1}} \exp(-ik_x x + ik_z z) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{a_0}{\sqrt{W_1}} \exp(ikz) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $k_x^2 + k_z^2 = k^2 = (2\pi/\lambda)^2$ ,  $k_x = \cos \alpha$ , и  $\alpha$  – угол наклона. Множитель  $a_0$  определяет относительную амплитуду плоской волны без наклона. Поле (39) обладает бесконечной энергией, но чтобы сделать её одинаковой для разных значений  $a_0$ , введён нормировочный множитель  $W_1^{-1/2}$ , где  $W_1 = 4 + a_0^2$  (четыре скалярные

наклонные плоские волны и одна волна без наклона с комплексной амплитудой, пропорциональной  $a_0$ .

Оказывается, при распространении в пространстве такое поле также приобретает ненулевую плотность СУМ:

$$S_z(x, y, z) = \frac{-4a_0}{4 + a_0^2} \sin(k_x x) \sin[(k - k_z)z]. \quad (40)$$

Плоские волны обладают бесконечной энергией и не расходятся при распространении. Поэтому плотность СУМ повторяется периодически и не убывает, в отличие от пучка (5) с конечной энергией, чья плотность СУМ убывает.

Из (40) видно, что независимо от того, как поляризована волна без наклона, ненулевой СУМ не возник бы без разности  $k - k_z$ . Из-за круговой поляризации вектора электрической напряжённости наклонных плоских волн вращаются, но в противоположных направлениях. Эти вращения компенсируют друг друга, и общая поляризация наклонных волн линейна (рис. 5а). Добавление в суперпозицию линейно поляризованного ненаклонного пучка изменяет направление поляризации, но оставляет её линейной в начальной плоскости, где все волны складываются в фазе. Однако при распространении наклонные волны получают фазовую задержку по сравнению с ненаклонной волной (рис. 5б). Этот сдвиг фаз приводит к эллиптической поляризации.

Однако если электрическое поле линейно поляризованной ненаклонной волны сильно превосходит или, наоборот, намного слабее электрического поля наклонных волн с круговой поляризацией, то, несмотря на фазовую задержку между ними, эллиптическая поляризация близка к линейной и плотность СУМ мала. Тогда возникает вопрос, при каких энергиях наклонных волн и ненаклонной волны достигается максимальный СУМ. Из (40) следует, что максимальная величина СУМ достигается при  $a_0 = 2$ . Это означает, что энергия линейно поляризованной волны равна половине энергии всей суперпозиции. Таким образом, мы получили точно такой же результат, что и для поля (5) с несколькими поляризационными сингулярностями: энергия линейно поляризованной составляющей должна быть равна половине энергии всего поля.

Эллиптическая поляризация не возникает, когда линейная поляризация двух наклонных плоских волн с круговой поляризацией параллельна линейной поляризации ненаклонной волны. Поэтому, согласно (40), если  $k_x x = \pi p$  ( $p$  – целое число), то поляризация остаётся линейной. Напротив, если эти вектора ортогональны, поляризация ближе всего к круговой. Это происходит, когда  $\cos(k_x x) = 0$ . Поэтому максимальная величина СУМ поля (5) должна достигаться, когда  $\text{LG}_m(r, \varphi, z) + \text{LG}_{-m}(r, \varphi, z) = 0$ , то есть при  $\cos(m\varphi) = 0$ . Это происходит в точности при тех же

полярных углах, что установлены выше:  $\varphi_p = (\pm \pi + 4\pi p)/(2m)$ , где  $p = 0, \dots, m - 1$ .

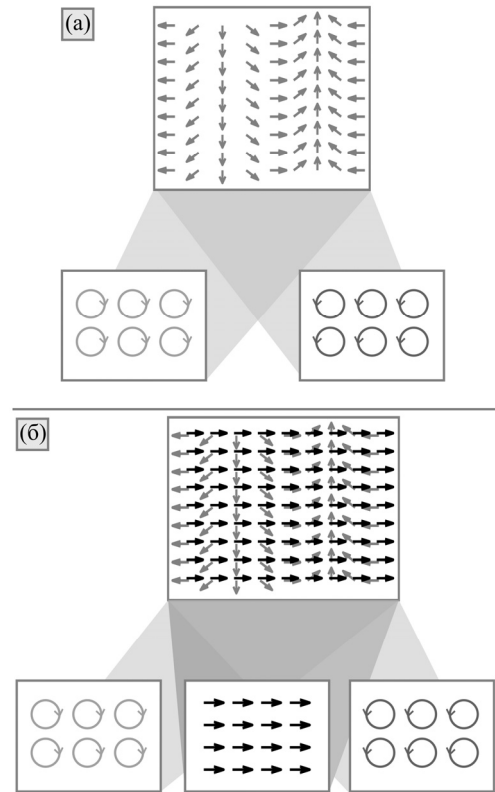


Рис. 5. Формирование линейно поляризованного поля в суперпозиции двух наклонных плоских волн с противоположными углами наклона и противоположной круговой поляризацией (а), формирование ненулевой плотности СУМ в суперпозиции двух наклонных плоских волн с круговой поляризацией и линейно поляризованной волной без наклона: наклонные волны приобретают фазовую задержку, и поляризация становится эллиптической (б)

Приведённое выше обоснование возникновения ненулевого СУМ также объясняет пропорциональность между плотностями ОУМ и СУМ. Она является следствием особого вида комплексной амплитуды (5). Действительно, ненулевая плотность СУМ возникает из-за разности фаз между слагаемыми  $r^m \sin(m\varphi)$  и  $(a_0 q)^m$ , тогда как плотность ОУМ определяется только составляющей  $E_x$  и отлична от нуля из-за разности фаз между слагаемыми  $r^m \cos(m\varphi)$  и  $(a_0 q)^m$ . Можно показать, что у произвольного векторного светового поля вида

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} A(r, \varphi) e^{i\psi(r)} + B(r) e^{iX(r)} \\ \gamma(\partial A / \partial \varphi) e^{i\psi(r)} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

где  $A, B, \psi, X$  – вещественные функции и  $\gamma$  – вещественный параметр, плотности СУМ и ОУМ равны

$$\begin{aligned} S_z &= 2\gamma B(\partial A / \partial \varphi) \sin(\psi - X), \\ J_z &= B(\partial A / \partial \varphi) \sin(\psi - X). \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда  $J_z = S_z / (2\gamma)$ . Для поля (5)  $\gamma = -1/m$  и потому плотность ОУМ (38) равна плотности СУМ (18), умноженной на  $(-m/2)$ .

### 6. Численное моделирование

На рис. 6 показаны начальные распределения интенсивности светового поля (5) для нескольких порядков  $m$ , а также распределения интенсивности и плотности СУМ при распространении в пространстве до плоскости, в которой СУМ максимален. Радиус окружности с сингулярностями  $a_0$  был выбран так,

чтобы уравнять интенсивность в центре и на краях, то есть по формуле (15). Распределения интенсивности получены по формуле (9), но сравнивались с распределениями, рассчитанными численно с помощью преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с использованием быстрого преобразования Фурье. Все распределения, полученные двумя способами, выглядели одинаковыми. Чтобы придать всем величинам значения порядка единиц, все компоненты поля были умножены на постоянный множитель  $C_0 = 3000$ .

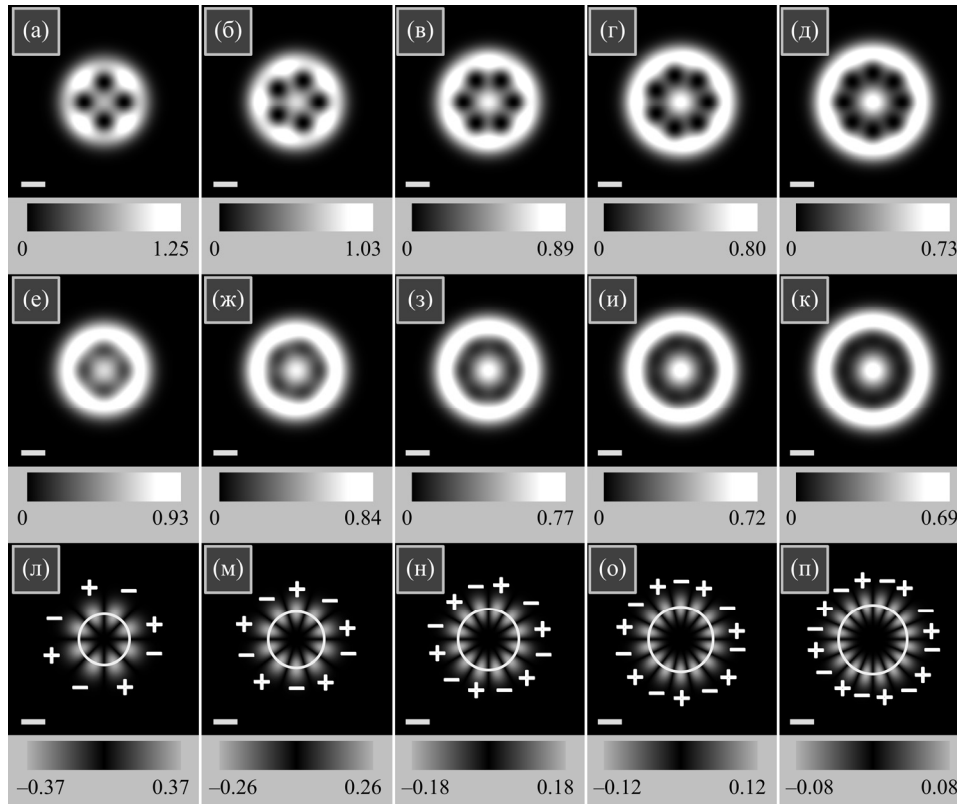


Рис. 6. Распределения интенсивности в начальной плоскости (а–д) и на расстоянии максимального СУМ (29) (е–к), а также распределения плотности СУМ на расстоянии максимального СУМ (л–п) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, число поляризационных сингулярностей в начальной плоскости  $m = 4$  (а,е,л),  $m = 5$  (б,ж,м),  $m = 6$  (в,з,н),  $m = 7$  (з,и,о),  $m = 8$  (д,к,п), радиус окружности с сингулярностями  $a_0 = 828$  мкм (а,е,л),  $a_0 = 942$  мкм (б,ж,м),  $a_0 = 1041$  мкм (в,з,н),  $a_0 = 1129$  мкм (з,и,о),  $a_0 = 1210$  мкм (д,к,п), расстояние распространения  $z = 0,349z_0$  (а,е,л),  $z = 0,284z_0$  (б,ж,м),  $z = 0,240z_0$  (в,з,н),  $z = 0,208z_0$  (з,и,о),  $z = 0,183z_0$  (д,к,п). Радиусы  $a_0$  были получены по формуле (15) для выравнивания интенсивности в центре и на краях. Радиусы окружностей на распределениях СУМ (л–п) получены по формуле (21) и соответствуют окружностям с максимальным СУМ. Все величины (максимальные значения интенсивности и СУМ) приведены в условных единицах. Масштабная метка на каждом рисунке означает 1 мм. Знаками «+» и «-» показаны области с положительной и отрицательной плотностью СУМ

Из рис. 6 видно, что действительно радиус окружности сингулярностей (15) позволяет выровнять интенсивность пучка в центре и на краях. Из рис. 6 также видно, что в поперечной плоскости максимальные значения СУМ достигаются на окружности с радиусом (21), который в  $\sqrt{2}$  раз меньше радиуса кольца максимальной интенсивности однокольцевого пучка ЛГ  $m$ -го порядка.

Кроме того, рис. 6 подтверждает, что поперечная плоскость с максимальным СУМ становится всё ближе и ближе к начальной плоскости при возрастании

числа сингулярностей  $m$ . Это происходит, потому что эта плоскость должна быть ближе, чем первая поперечная плоскость с линейной поляризацией, которая также приближается, согласно формуле (19).

Чтобы проверить приближённое выражение (29) для нахождения плоскости с максимальным СУМ, на рис. 7 показана зависимость СУМ от расстояния распространения для пучков с рис. 6. Для расчёта СУМ использовалась формула (22). Точки вверху каждого графика показывают расстояние с максимальным СУМ, полученное по формуле (29).



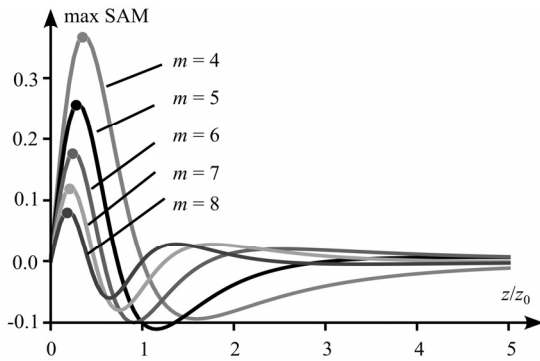


Рис. 7. Максимальный СУМ для разного числа поляризационных сингулярностей  $m$ , когда радиус окружности сингулярностей выбран так, чтобы уравнивать интенсивность пучка в центре и на краях. Точки верху каждого графика показывают расстояние с максимальным СУМ, полученное по приближённой формуле (29)

На рис. 8 изображены начальные распределения интенсивности светового поля (5), а также распределения

интенсивности и плотности СУМ в плоскости, в которой СУМ максимален, при тех же параметрах, что и для рис. 6, но с радиусом окружности сингулярностей, выбранным так, чтобы максимизировать плотность СУМ.

Из рис. 8 видно, что при любом числе сингулярностей  $m$  плотность СУМ достигает величин, примерно в полтора раза выше, чем на рис. 6.

Кроме того, видно, что начальное поле имеет одну и ту же максимальную интенсивность, независимо от  $m$ . Это происходит потому, что максимальный СУМ достигается, согласно вышеизложенной теории, когда энергия Гауссова пучка равна половине энергии всего поля. Оставшаяся половина энергии идёт в световое кольцо и интенсивность этого кольца слабее, чем центральная интенсивность Гауссова пучка. Из-за этого центральная часть распределений интенсивности всех пучков на рис. 8 – это Гауссов пучок с одной и той же энергией и потому с одной и той же амплитудой. Этим объясняется одна и та же интенсивность в центре.

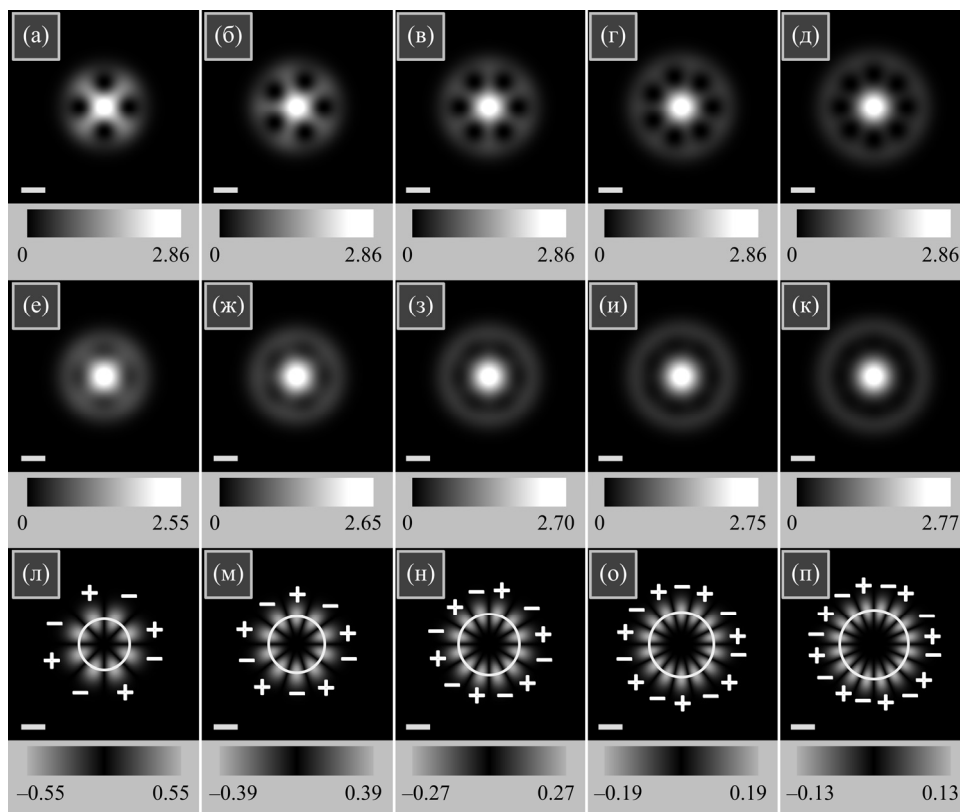


Рис. 8. Распределения интенсивности в начальной плоскости (а–д) и на расстоянии с максимальным СУМ (29) (е–к), а также распределения плотности СУМ на расстоянии с максимальным СУМ (л–п) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, число поляризационных сингулярностей в начальной плоскости  $m = 4$  (а, е, л),  $m = 5$  (б, ж, м),  $m = 6$  (в, з, н),  $m = 7$  (г, и, о),  $m = 8$  (д, к, п), радиус окружности сингулярностей  $a_0 = 1052$  мкм (а, е, л),  $a_0 = 1141$  мкм (б, ж, м),  $a_0 = 1223$  мкм (в, з, н),  $a_0 = 1300$  мкм (г, и, о),  $a_0 = 1371$  мкм (д, к, п), расстояние распространения  $z = 0,349z_0$  (а, е, л),  $z = 0,284z_0$  (б, ж, м),  $z = 0,240z_0$  (в, з, н),  $z = 0,208z_0$  (г, и, о),  $z = 0,183z_0$  (д, к, п). Радиусы  $a_0$  были получены по формуле (30) для максимизации СУМ (по сравнению с другими радиусами  $a_0$ ). Расстояния распространения были получены по формуле (29) для достижения максимальной плотности СУМ. Радиусы окружностей на распределениях СУМ (л–п) получены по формуле (21) и соответствуют окружностям с максимальным СУМ. Все величины (максимальные значения интенсивности и СУМ) приведены в условных единицах. Масштабная метка на каждом рисунке означает 1 мм. Знаками «+» и «-» показаны области с положительной и отрицательной плотностью СУМ

Теперь убедимся, что расположение сингулярностей на окружности радиуса  $a_0$  (30) действительно

приводит к максимальной плотности СУМ по сравнению с другими радиусами. На рис. 9 показаны про-

дольные распределения СУМ светового поля (5) при значениях  $a_0$ , полученных по формуле (30), и при некоторых других значениях  $a_0$ .

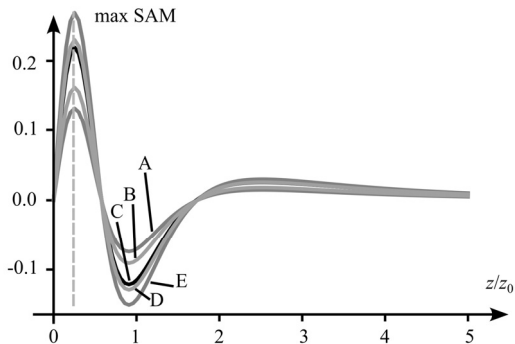


Рис. 9. Максимальный СУМ светового поля (5) при  $m = 6$  для нескольких значений радиуса окружности с сингулярностями  $a_0$ :  $a_0 = a_{0,max}$  (по формуле (30)) (кривая E),  $a_0 = 0,8a_{0,max}$  (кривая A),  $a_0 = 1,2a_{0,max}$  (кривая B),  $a_0 = 0,9a_{0,max}$  (кривая C),  $a_0 = 1,1a_{0,max}$  (кривая D). Пунктирной вертикальной линией показано расстояние с максимальным СУМ, полученное по приближённой формуле (29), которое не зависит от радиуса  $a_0$

Из рис. 9 видно, что максимальный СУМ достигается действительно при радиусе  $a_0$  из (30).

Наконец, получим плотность ОУМ светового поля (5).

На рис. 10 изображены распределения плотности ОУМ светового поля, показанного на рис. 8. Распределения ОУМ выглядят как инвертированные распределения СУМ, но они были получены полностью иным способом: по формуле (36), где производная по полярному углу была представлена как  $\partial/\partial\phi = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$  и вычислена с помощью конечных разностей.

Максимальные значения ОУМ подтверждают, что ОУМ превосходит СУМ в  $-m/2$  раз.

### Заключение

Исследованы параксиальные световые пучки с множественными поляризационными сингулярностями, расположенными равномерно на окружности (окружность сингулярностей). В начальной плоскости поляризация такого светового пучка линейна во всех точках, и потому пучок имеет нулевой спиновый и орбитальный угловые моменты (СУМ и ОУМ). Когда такой пучок распространяется в свободном пространстве, имеется несколько поперечных плоскостей, в которых поляризация также линейна и возникают поляризационные сингулярности. Однако между этими плоскостями поляризация в общем случае эллиптическая и формируются чередующиеся области с положительным и отрицательным СУМ, то есть возникает спиновый эффект Холла.

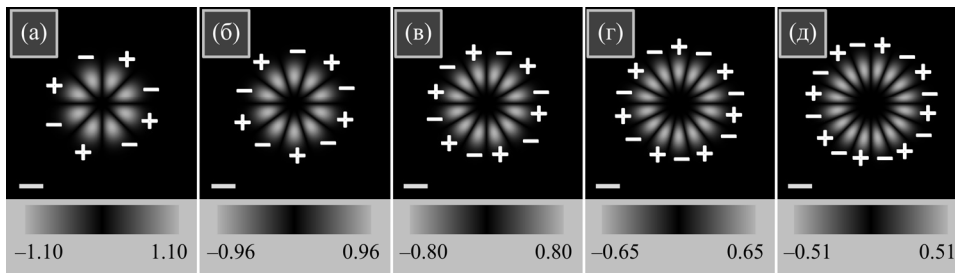


Рис. 10. Распределения плотности ОУМ светового поля (5) на расстоянии с максимальным СУМ (29) при следующих параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 1$  мм, число поляризационных сингулярностей в начальной плоскости  $m = 4$  (а),  $m = 5$  (б),  $m = 6$  (в),  $m = 7$  (г),  $m = 8$  (д), радиус окружности сингулярностей  $a_0 = 1052$  мкм (а),  $a_0 = 1141$  мкм (б),  $a_0 = 1223$  мкм (в),  $a_0 = 1300$  мкм (г),  $a_0 = 1371$  мкм (д), расстояние распространения  $z = 0,349z_0$  (а),  $z = 0,284z_0$  (б),  $z = 0,240z_0$  (в),  $z = 0,208z_0$  (г),  $z = 0,183z_0$  (д). Радиусы  $a_0$  были получены по формуле (30) для максимизации СУМ (а значит, и ОУМ) по сравнению с другими радиусами  $a_0$ . Расстояния распространения были получены по формуле (29) для достижения максимальной плотности СУМ (ОУМ). Все величины приведены в условных единицах. Масштабная метка на каждом рисунке означает 1 мм. Знаками «+» и «-» показаны области с положительной и отрицательной плотностью ОУМ

Мы получили выражение для распределения интенсивности, а также примерное выражение [формулы (15) и (16)] для радиуса окружности сингулярностей, при котором интенсивность в центре пучка и на его краях примерно одинакова. В этом случае радиус максимальной интенсивности на краю пучка стремится (с ростом числа сингулярностей  $m$ ) к радиусу максимальной интенсивности однокольцевого пучка Лагерра–Гаусса.

Когда пучок распространяется, в каждой поперечной плоскости плотность СУМ достигает максимальных значений в  $2m$  точках ( $m$  точек максимальной плотности СУМ и  $m$  точек минимальной плотности СУМ) на кольце с радиусом, не зависящим от радиуса

окружности сингулярностей. Оказалось, что этот радиус окружности с максимальной СУМ равен половине радиуса Гауссова пучка, умноженного на квадратный корень от числа сингулярностей (то есть в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем радиус кольца максимальной интенсивности однокольцевого пучка ЛГ  $m$ -го порядка).

В каждой поперечной плоскости имеется  $2m$  С-точек с круговой поляризацией ( $m$  точек с левой поляризацией и  $m$  точек с правой поляризацией). Эти точки находятся на окружности, радиус которой пропорционален радиусу окружности с сингулярностями.

Получено приближённое выражение [формула (29)] для расстояния распространения, при котором плотность СУМ достигает максимальных значений.

Оказалось, что это расстояние не зависит от радиуса окружности сингулярностей и оно короче, чем расстояние до первой поперечной плоскости с линейной поляризацией и с поляризационными сингулярностями.

Получено точное выражение [формула (30)] для радиуса окружности сингулярностей, при котором достигается максимальная плотность СУМ. Оказалось, что максимально достижимая плотность СУМ убывает с ростом числа сингулярностей  $m$ . Кроме того, установлено, что для пучка с максимальной плотностью СУМ и для пучка с равной интенсивностью в центре и на краях радиус окружности сингулярностей должен быть разным.

Исследованный световой пучок является суперпозицией пучка ЛГ с цилиндрической поляризацией и линейно поляризованного Гауссова пучка. Выяснено, что максимальная плотность СУМ достигается, когда энергия Гауссова пучка равна половине энергии всего пучка, то есть равна энергии пучка ЛГ.

Получено выражение для плотности ОУМ [формула (38)]. Оказалось, что она пропорциональна плотности СУМ и превышает её в  $-m/2$  раз, что отличается от стандартных вихревых пучков с круговой поляризацией, чья плотность ОУМ превышает плотность СУМ в  $\pm m$  раз.

Мы рассмотрели простую аналогию исследованных пучков – суперпозицию трёх плоских волн. Две волны наклонены и имеют круговую поляризацию, а третья волна без наклона (параллельна оптической оси) и поляризована линейно. Доказано, что и у такого простого поля также возникает спиновый эффект Холла, и раскрыт его физический механизм. Эффект возникает из-за фазовой задержки, которая появляется между наклонными волнами и ненаклонной волной при их распространении. Точно так же и в исследованном векторном Гауссовом пучке с множественными поляризационными сингулярностями спиновый эффект Холла возникает из-за разной расходимости цилиндрически поляризованного пучка ЛГ и линейно поляризованного Гауссова пучка.

Область применения полученных результатов – оптическое управление движением микрообъектов [19, 20] или элементов в лабораториях на чипе [21]. В отличие от орбитального углового момента, который заставляет микрочастицы вращаться вдоль светового кольца, спиновый угловой момент заставляет частицы вращаться вокруг своих центров масс [22], а формирование нужного распределения плотности СУМ может позволить одновременно управлять набором частиц. Для этой цели частицы должны быть неметаллическими, но поглощающими, так как максимумы интенсивности притягивают диэлектрические частицы. Другая область применения – оптическая передача информации, в которой распределение плотности СУМ используется для кодирования данных.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-12-00137) в частях «Параксимальные световые поля со множественными фазовыми или поляризационными сингулярностями», «Распределение интенсивности», «Плотность спинового углового момента», «Плотность орбитального углового момента», «Аналогия с плоскими волнами и установление механизма», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в частях «Введение», «Численное моделирование», «Заключение».

### References

- [1] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87. DOI: 10.1080/09500349314550101.
- [2] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral-type beams. *Opt Commun* 1993; 102(3-4): 336-350. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90406-U.
- [3] Wang Q, Tu CH, Li YN, Wang HT. Polarization singularities: Progress, fundamental physics, and prospects. *APL Photonics* 2021; 6(4): 040901. DOI: 10.1063/5.0045261.
- [4] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [5] Tidwell SC, Ford DH, Kimura WD. Generating radially polarized beams interferometrically. *Appl Opt* 1990; 29(15): 2234-2239. DOI: 10.1364/AO.29.002234.
- [6] Kovalev AA, Kotlyar VV. Tailoring polarization singularities in a Gaussian beam with locally linear polarization. *Opt Lett* 2018; 43(13): 3084-3087. DOI: 10.1364/OL.43.003084.
- [7] Kovalev AA, Kotlyar VV. Gaussian beams with multiple polarization singularities. *Opt Commun* 2018; 423: 111-120. DOI: 10.1016/j.optcom.2018.04.023.
- [8] Wang H, Wojcik CC, Fan S. Topological spin defects of light. *Optica* 2022; 9(12): 1417-1423. DOI: 10.1364/OPTICA.474612.
- [9] Kavokin A, Malpuech G, Glazov M. Optical spin Hall effect. *Phys Rev Lett* 2005; 95(13): 136601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.136601.
- [10] Kim M, Lee D, Kim TH, Yang Y, Park HJ, Rho J. Observation of enhanced optical spin Hall effect in a vertical hyperbolic metamaterial. *ACS Photonics* 2019; 6(10): 2530-2536. DOI: 10.1021/acsp Photonics.9b00904.
- [11] Kim M, Lee D, Ko B, Rho J. Diffraction-induced enhancement of optical spin Hall effect in a dielectric grating. *APL Photonics* 2020; 5(6): 066106. DOI: 10.1063/5.0009616.
- [12] Stafeev SS, Nalimov AG, Kovalev AA, Zaitsev VD, Kotlyar VV. Circular polarization near the tight focus of linearly polarized light. *Photonics* 2022; 9(3): 196. DOI: 10.3390/Photonics9030196.
- [13] Dienerowitz M, Mazilu M, Reece PJ, Krauss TF, Dholakia K. Optical vortex trap for resonant confinement of metal nanoparticles. *Opt Express* 2008; 16(7): 4991-4999. DOI: 10.1364/OE.16.004991.
- [14] Dennis MR. Polarization singularities in paraxial vector fields: Morphology and statistics. *Opt Commun* 2002; 213(4-6): 201-221. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02088-6.
- [15] Cardano F, Karimi E, Marrucci L, de Lisio C, Santamato E. Generation and dynamics of optical beams with polari-

- zation singularities. *Opt Express* 2013; 21(7): 8815-8820. DOI: 10.1364/OE.21.008815.
- [16] Robbins HA. Remark on Stirling's formula. *Am Math Mon* 1955; 62(1): 26-29. DOI: 10.2307/2308012.
- [17] Berry MV, Jeffrey MR, Mansuripur M. Orbital and spin angular momentum in conical diffraction. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2005; 7(11): 685-690. DOI: 10.1088/1464-4258/7/11/011.
- [18] Berry MV, Liu W. No general relation between phase vortices and orbital angular momentum. *J Phys A Math Theor* 2022; 55(37): 374001. DOI: 10.1088/1751-8121/ac80de.
- [19] Andrew PK, Williams MAK, Avci E. Optical micromachines for biological studies. *Micromachines* 2020; 11(2): 192. DOI: 10.3390/mi11020192.
- [20] Favre-Bulle IA, Zhang S, Kashchuk AV, Lenton ICD, Gibson LJ, Stilgoe AB, Nieminen TA, Rubinsztein-Dunlop H. Optical tweezers bring micromachines to biology. *Opt Photonics News* 2018; 29(4): 40-47. DOI: 10.1364/OPN.29.4.000040.
- [21] Liu YJ, Lee YH, Lin YS, Tsou C, Baldeck PL, Lin CL. Optically driven mobile integrated micro-tools for a lab-on-a-chip. *Actuators* 2013; 2(2): 19-26. DOI: 10.3390/act2020019.
- [22] Angelsky OV, Bekshaev AY, Maksimyak PP, Maksimyak AP, Hanson SG, Zenkova CYu. Orbital rotation without orbital angular momentum: mechanical action of the spin part of the internal energy flow in light beams. *Opt Express* 2012; 20(4): 3563-3571. DOI: 10.1364/OE.20.003563.

### Сведения об авторах

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0002-0488-4267.

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0003-1737-0393.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 31 марта 2023 г. Окончательный вариант – 18 мая 2023 г.

---

# Spin angular momentum of Gaussian beams with several polarization singularities

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We study a paraxial vector Gaussian beam with several polarization singularities located on a circle. Such a beam is superposition of a cylindrically polarized Laguerre-Gaussian beam and a linearly polarized Gaussian beam. It is found that although polarization in the initial plane is linear, alternating regions with the different-sign spin angular momentum density are generated upon free-space propagation, showing that a spin Hall effect arises. For an arbitrary transverse plane, it is shown that the spin angular momentum magnitude is maximal on a certain-radius circle. We obtain an approximate expression for the distance to the transverse plane where the spin angular momentum density is maximal. Besides, we derive an optimal radius of the singularity-containing circle in the initial plane for which the maximal spin angular momentum density can be achieved upon propagation. It is revealed that in this case, the energies of the Laguerre-Gaussian beam and the Gaussian beam are equal to each other. We also obtain an expression for the orbital angular momentum density and find it to be defined by the spin angular momentum density, multiplied by  $-m/2$ , with  $m$  being the upper index of the Laguerre-Gaussian beam, equal to the number of the polarization singularities. An analogy with plane waves reveals that the spin Hall effect arises due to different divergence rates of the linearly polarized Gaussian beam and the cylindrically polarized Laguerre-Gaussian beam.

**Keywords:** cylindrical vector beam; radial polarization; polarization singularity; Gaussian beam; Laguerre-Gaussian beam; spin angular momentum; optical spin Hall effect; orbital angular momentum.

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin angular momentum of Gaussian beams with several polarization singularities. *Computer Optics* 2023; 47(6): 863-874. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1312.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #22-12-00137 (Sections "Paraxial light fields with multiple phase or polarization singularities", "Intensity distribution", "Spin angular momentum density", "Orbital angular momentum density", "Analogy with plane waves and revealing the mechanism") and by the RF Ministry of Science and Higher Education within the State Assignment of FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Sections "Introduction", "Numerical simulation", "Conclusion").

---

## Authors' information

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0002-0488-4267.

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0003-1737-0393.

---

Received March 31, 2023. The final version – May 18, 2023.

---