

## Сортировка пучков Лагерра–Гаусса по радиальному числу посредством моментов интенсивности

А.В. Воляр<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, Ю.А. Егоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт, 295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

### Аннотация

Предложен и воплощён на эксперименте новый метод цифровой сортировки мод Лагерра–Гаусса, возникших в результате возмущения исходного пучка Лагерра–Гаусса или их суммы тонкой круглой диафрагмой с различными радиусами отверстия, по радиальному числу при постоянном топологическом заряде. В основу метода был положен цифровой анализ моментов интенсивности высших порядков. Рассмотрены два типа возмущённых пучков: невырожденные и вырожденные по радиальному числу пучки Лагерра–Гаусса. Полученный цифровой спектр амплитуд позволяет восстановить реальные моды Лагерра–Гаусса и определить меру неопределённости, внесённую возмущением, посредством информационной энтропии.

Мы обнаружили, что возмущение сложного пучка приводит к возникновению вырожденного спектра амплитуд, когда одной спектральной линии соответствует множество мод, рождённых исходными пучками Лагерра–Гаусса с различными радиальными числами. Для расшифровки спектра потребовались ключи, в качестве которых использовались спектры амплитуд невырожденных возмущённых пучков. Степень корреляции рассортированных пучков составляет не ниже 0,92.

**Ключевые слова:** информационная оптика, вихревые пучки, энтропия Шеннона.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Сортировка пучков Лагерра–Гаусса по радиальному числу посредством моментов интенсивности / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 2. – С. 155-166. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-677.

**Citation:** Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Sorting Laguerre-Gaussian beams by radial numbers via intensity moments. Computer Optics 2020; 44(2): 155-166. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-677.

### Введение

Уникальное свойство пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ) переносить оптические вихри, а следовательно, и орбитальный угловой момент (ОУМ), вызвало интенсивную волну как теоретических, так и экспериментальных исследований [1–4]. Ключевым моментом исследований явилось решение проблемы сортировки пучков ЛГ из оптического массива по азимутальному числу  $m$  (по топологическому заряду) и измерение его величины, что стало одной из отправных точек дальнейшего развития сингулярной оптики. Заметим, что задача сортировки и синтеза лазерных пучков была поставлена и частично решена В. Сойфером и М. Голубом на основе метода компьютерных голографических решёток (см., например, [5–9] в списке литературы) задолго до начала исследований оптических вихрей. Неожиданный рывок исследований сортировки вихревых пучков по топологическому заряду произошел в начале XXI столетия, когда персональные быстродействующие компьютеры стали надёжным инструментом учёных. Именно тогда были усовершенствованы голографические технологии и созданы устройства формирования голограмм в реальном времени [10–13], развиты новые специальные подхо-

ды астигматических преобразований [14, 15] и методы моментов интенсивности высших порядков [16–19], а также созданы специальные оптические транспаранты [20], которые в сочетании с интерферометрическими устройствами [21] позволяют быстро оценивать состояния вихревых пучков.

Повышенный интерес к топологическому заряду оптических вихрей затенил исследования свойств массивов пучков ЛГ с различными радиальными числами  $n$ , которые отвечают за число нулей поля в радиальном направлении (за число кольцевых дислокаций) в каждой вихревой моде. И только недавние исследования процессов уплотнения информационных массивов [22] и поиск оптимальных квантовых ключей в криптографии [23] показали, что дальнейшее совершенствование соответствующих оптических систем возможно, главным образом, за счёт увеличения числа степеней свободы оптических сигналов, а именно за счёт сортировки пучков по радиальным числам  $n$  [24].

Анализ проблемы показал, что сортировку модовых пучков Лагерра–Гаусса, Эрмита–Гаусса и Бесселя–Гаусса по радиальному числу можно осуществлять с помощью метода компьютерных голографических решёток [10–13]. Теоретические разработки

ключевых физических принципов сортировки мод [20, 25–27] были подкреплены рядом экспериментов [28–32]. Особый метод сортировки мод с помощью управления фазой Гуи каждой модой ЛГ был предложен в работе [29] и экспериментально воплощён в работе [30]. Указанный метод разрабатывался с целью дальнейшего использования в компактных оптоэлектронных устройствах. Основными элементами оптической установки являлись два интерферометра (либо Маха–Цендера, либо Саньяка). Первый интерферометр осуществлял компенсацию фазы Гуи модовых пучков, а второй интерферометр предназначался для конечного этапа сортировки мод.

Более простой и надёжный метод сортировки мод по топологическому заряду, с нашей точки зрения, был предложен авторами работ [16–19], ключевой идеей которого явилось использование метода моментов интенсивности высших порядков для цифровой сортировки вихревых мод по топологическому заряду. Цифровая сортировка мод предполагает измерение спектра квадратов модовых амплитуд и фаз с последующим воспроизведением модовых пучков. Дополнительная корректировка алгоритма сортировки мод по азимутальному индексу позволит распространить этот подход на сортировку мод по радиальному числу.

Предположим, что нам удалось разработать и воплотить упомянутый метод сортировки мод. Но если исходный пучок содержит массив мод ЛГ и, предположим, что этот массив подвергается простому возмущению посредством диафрагмы с круговым отверстием, то каждая мода в массиве порождает широкий спектр вторичных ЛГ мод. Тогда каждому радиальному числу в спектре мод будет соответствовать множество вторичных мод. Спектр оказывается вырожденным по радиальному числу. Сразу возникает вопрос: как сортировать моды комбинированного пучка? Эта проблема ранее не исследовалась. Таким образом, целью данной статьи явилась разработка и воплощение метода сортировки мод по радиальному индексу с учётом вырождения на основе подхода моментов интенсивности высших порядков.

### 1. Предварительные замечания

В общем случае нашей задачей является исследование структуры пучка Лагерра–Гаусса, подверженного возмущению при прохождении через непрозрачный экран, отверстие в котором описывается апертурной функцией  $f(\rho, \varphi)$ , где  $\rho$  и  $\varphi$  являются радиальной и азимутальной полярными координатами соответственно. Тогда комплексную амплитуду возмущённого пучка ЛГ запишем в виде

$$\Psi_{m,n} = f(r, \varphi) \Psi_{m,n}(r, \varphi, z), \tag{1}$$

где амплитудная функция модового пучка есть

$$\Psi_{m,n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{w} \left( \frac{r}{w} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left( 2 \frac{r^2}{w^2} \right) \times \exp(im\varphi + i\Gamma_{m,n}) \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma}\right), \tag{2}$$

$r = \rho/w_0$  – безразмерный радиус,  $w_0$  – радиус перетяжки пучка в исходной плоскости  $z=0$ ,  $L_n^m(x)$  – многочлены Лагерра,  $m$  и  $n > 0$  – азимутальное (топологический заряд) и радиальное число,  $\sigma = 1 - iz/z_0$ ,  $w = |\sigma|$ ,  $z_0 = k w_0^2 / 2$ ,  $\Gamma_{m,n}(z) = (2n + m + 1) \arctg z/z_0$  – фаза Гуи,  $k$  – волновое число. Топологический заряд  $m$  отвечает за ОУМ модового пучка, являясь собственным значением оператора углового момента. Число  $n = 0, 1, 2, \dots$  характеризует дополнительные степени свободы пучка ЛГ и было названо «внутренним зарядом гиперболического момента» [26], как собственное значение соответствующего оператора.

Основным предметом нашего анализа является распределение интенсивности возмущённого пучка  $\mathfrak{I}_{00}(r, \varphi) = \Psi(r, \varphi) \Psi^*(r, \varphi)$ , которое включает в себя полную информацию о модовом составе пучка (амплитуде и фазе мод) и действующем возмущении.

Нашей главной задачей является извлечение этой информации на эксперименте. Мы уже показали [16–18], что локальное возмущение голографической решётки может вызвать лавину оптических вихрей, спектр которой охватывает вихри как с положительными  $m > 0$ , так и с отрицательными  $m < 0$  топологическими зарядами, что вызывает резкое снижение ОУМ. В то же время секторное возмущение вихревого пучка почти не изменяет ОУМ в широком диапазоне углов диафрагмы, но резко снижает его, когда диафрагма оставляет только узкую щель для пучка [21].

Чтобы воспользоваться методом моментов интенсивности, разложим возмущённый пучок в ряд по ортогональному базису пучков Лагерра–Гаусса:

$$\Psi_{m,n}(\rho, \varphi, z=0) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n,s,k} \rho^{|s|} L_k^{|s|} \left( 2 \frac{\rho^2}{w^2} \right) e^{is\varphi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right), \tag{3}$$

где амплитуды мод  $C_{m,n,s,k}$  задаются соотношением

$$C_{m,n,s,k} = \int_{\mathbb{R}} \Psi_{m,n} \Psi_{s,k}^* dS \tag{4}$$

в плоскости  $z=0$  и  $\Psi_{m,n} = f(\rho, \varphi) \Psi_{m,n}(\rho, \varphi)$ .

В нашей работе мы сосредоточимся на возмущении пучка ЛГ диафрагмой с круговой апертурой, ось которой совпадает с осью пучка. Очевидно, что в этом случае интеграл (4) оставит единственный член с  $m=s$ , т.е. топологический заряд не изменяется при действии возмущения ( $m = \text{const}$ ).

### 2. Принципы цифровой сортировки мод ЛГ

Прежде чем анализировать возмущение пучка, при котором моды с одинаковыми радиальными чис-

лами в спектре амплитуд интерферируют друг с другом (вырожденные состояния пучка), остановимся на простейшем невырожденном состоянии, когда единичный пучок ЛГ проходит через диафрагму с круговым отверстием с функцией пропускания

$$f(r) = \text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (5)$$

В этом случае диафрагма не вводит дополнительную фазу, а амплитуда (5) является действительной функцией. Фактически, диафрагма действует как возмущение, вызывающее рождение широкого спектра мод ЛГ, который можно представить в виде разложения по ортогональному базису пучков Лагерра–Гаусса как

$$\Psi_{m,n}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n,k} r^{|m|} L_k^{|m|}(2r^2) e^{im\varphi} \exp(-r^2), \quad (6)$$

где амплитуды мод определяются согласно (4) в виде

$$C_{m,n,k} = \frac{\int_0^R \Psi(r, \varphi) \Psi_{m,k}^*(r, \varphi) r dr}{\int_0^{\infty} |\Psi_{m,k}(r, \varphi)|^2 r dr} \quad (7)$$

и являются действительными числами. Раскрывая выражение (7), находим

$$C_{m,n,k} = \frac{k!}{(m+k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{m+k}{k-j} \times \frac{(m+1)_n}{2^j j! n! (m+j+1)} \times (2R^2)^{m+j+1} \times {}_2F_2(m+n+1, m+j+1; m+1, m+j+2; -(2R^2)^2), \quad (8)$$

здесь использовался интеграл [33]

$$\int_0^x x^\lambda e^{-x} L_n^m(x) dx = \frac{(m+1)_n}{n! (\lambda+1)} x^{\lambda+1} \times {}_2F_2(m+n+1, \lambda+1; m+1, \lambda+2; -x) \quad (9)$$

совместно с представлением многочлена Лагерра

$$L_k^m(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{m+k}{k-j} \frac{x^j}{j!}, \quad (10)$$

где  ${}_2F_2$  – гипергеометрическая функция. Амплитуды мод ЛГ  $C_{m,n,k}$  задаются тройкой целых чисел:  $m$  – исходный топологический заряд вихря,  $n > 0$  – исходное радиальное число,  $k > 0$  – радиальное число моды ЛГ в спектре амплитуд (6). Топологический заряд  $m$  не участвует в суммировании в (6), а следовательно, ОУМ возмущённого пучка не изменяется. Действие возмущения сводится к расщеплению единичного пучка с радиальным числом  $n$  на множество пучков с

радиальными индексами  $k$ , что удобно представить в виде спектра квадратов модовых амплитуд  $C_{m,n,k}^2(k, R)$ , представленного на рис. 1.

Даже небольшие изменения величины возмущения  $R$  приводят к резким изменениям формы спектра для различных радиальных чисел  $n$  в виде перераспределения энергии между модами, что можно заметить, сравнивая рис. 1а и 1б. Важно отметить, что каждому радиальному числу  $k$  соответствует только одна мода при любом возмущении  $R$ . Это значит, что спектр не вырожден относительно радиального числа  $k$ , что способствует единообразной сортировке модовых пучков по радиальному числу. Однако спектр квадратов амплитуд не позволяет определить знаки модовых амплитуд. Поэтому для выполнения сортировки мод нам потребуется также измерять перекрёстные члены в распределении интенсивности возмущённого пучка.

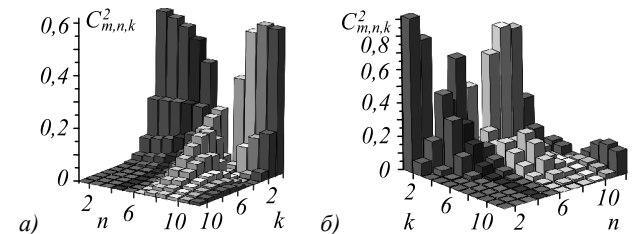


Рис. 1. Спектры квадратов амплитуд  $C_{m,n,k}^2(n, k)$  для  $m = 3$  и различных радиусов отверстия диафрагмы  $R = 1$  (а),  $R = 2$  (б). Спектр  $C_{m,n,k}^2(n, k)$  задаёт вызванную возмущением сортировку мод ЛГ по радиальному числу  $k$  при условии, что исходный ЛГ – пучок имеет топологический заряд  $m$  (и равный ему ОУМ  $\ell_z = m = 3$ ) и радиальное число  $n$  (число кольцевых дислокаций)

Используя преобразование Френеля для ЛГ – пучка в плоскости  $z = 0$  [9], можно записать вид комплексной амплитуды в произвольной плоскости  $z = \text{const}$ :

$$\Psi_{m,n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma(z)} \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n,k} \left( \frac{r}{w(z)} \right)^{|m|} \times L_k^{|m|} \left( 2 \frac{r^2}{w^2(z)} \right) e^{im\varphi + i\Gamma_{m,k}(z)} \exp \left( -\frac{r^2}{\sigma(z)} \right), \quad (11)$$

где  $\sigma(z) = 1 - iz/z_0$ ,  $z_0 = k w_0^2 / 2$ ,  $w(z) = |\sigma(z)|$ ,  $\Gamma_{m,n}(z) = (2n + m + 1) \arctg z/z_0$  – фаза Гуи,  $k$  – волновое число.

Нашей основной задачей является экспериментальная сортировка ЛГ-мод возмущённого пучка по радиальному числу. С этой целью мы воспользуемся методом моментов интенсивности  $J_{p,q}$  высших порядков [16, 34] в виде

$$J_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} M_{p,q}(r, \varphi) \mathfrak{I}_{m,n}(r) dS, \quad (12)$$

где  $\mathfrak{I}_{m,n}(r, \varphi, z = 0) = |\Psi_{m,n}(r, z = 0)|^2$  – распределение интенсивности в плоскости  $z = 0$ ,  $M_{p,q}(r, \varphi)$  – функция мо-

ментов, интегрирование проводится по всей плоскости поперечного сечения модового пучка,  $p, q = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку распределение интенсивности  $\mathfrak{I}_{m,n}(r)$  является радиально симметричной функцией, то функцию моментов удобно выбрать в аналогичном виде  $M_{p,q}(r)$ . Запишем распределение интенсивности в виде

$$\mathfrak{I}_{m,n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{m,n,k}^2 |\Psi_{m,k}(r)|^2 + 2 \sum_{\substack{k,s=0, \\ k \neq s}}^{\infty} C_{m,n,k} C_{m,n,s} \Psi_{m,k} \Psi_{m,s}^* \quad (13)$$

Для оптимального выбора вида функции моментов  $M_{p,q}$  в (12) необходимо, прежде всего, воспользоваться характерными свойствами амплитуд  $C_{m,n,k}$  в спектре (11). В качестве примера на рис. 2а приведено распределение модовых амплитуд  $C_{m,n,k}$  по радиальному числу  $k$ , построенному в соответствии с уравнением (8). Во-первых, амплитуды мод быстро уменьшаются по мере роста радиального числа. Это значит, что сумму в выражении (13) можно прервать на некотором числе  $k_{\max} = N$ , скажем, при  $C_{m,n,N}^2 \geq 0,001$ . Во-вторых, в спектре наблюдается чередование знаков амплитуд, что указывает на необходимость измерения перекрёстных амплитуд. В-третьих, зависимость  $C_{m,n,k}^2(R)$  на рис. 2б имеет быстрые осцилляции на некотором интервале радиусов  $R$  отверстия диафрагмы.

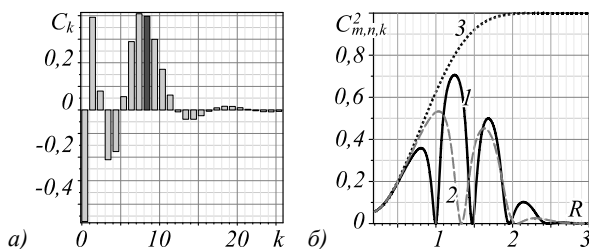


Рис. 2. Спектр модовых амплитуд  $C_{m,n}(k)$  по радиальному числу  $k$  ЛГ-пучка с числами  $t = 3, n = 8$ , возмущённого круговой апертурой  $R = 2$  (а); зависимость квадратов амплитуд  $C_{m,n,k}^2(R)$  от радиуса  $R$  радиальных чисел, (1)  $k = 6$ , (2)  $k = 3$ , (3)  $k = 0$  при начальных числах пучка  $t = 3, n = 6$  (б)

Наличие этих осцилляций накладывает жёсткие ограничения на выбор функции моментов  $M_{p,q}$ . Как мы покажем ниже, неудачный выбор функции моментов неизбежно приводит к большой величине ошибки измерений спектров и сортировки пучков.

Заметим, что определение (12) момента интенсивности можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно квадратов амплитуд  $C_{m,n,k}^2$  и перекрёстных амплитуд  $2C_{m,n,k}C_{m,n,s}$ . Действительно, члены правой части уравнения (12) с учётом (13) зависят от квадратов амплитуд, перекрёстных амплитуд и множителей, которые легко вычислить

$$j_{pq} = \int_0^{\infty} r^{2m+1} M_{p,q} L_k^m(2r^2) L_s^m(2r^2) e^{-2r^2} dr \quad (14)$$

Правая часть уравнения представляет собой также интеграл, который определяется на эксперименте. Сначала сканируется произведение экспериментально измеренного распределения интенсивности на функцию момента  $\mathfrak{I}_{\text{exp}}(r)M_{p,q}$ , а затем вычисляется интеграл. Получаем систему линейных уравнений относительно переменных  $X_p = C_{m,n,k}^2$  и  $Y_p = 2C_{m,n,k}C_{m,n,s}$ . Число уравнений задаётся числом квадратов амплитуд и перекрёстных амплитуд. Если число квадратов амплитуд равно  $N$ , а число перекрёстных амплитуд задаётся числом сочетаний  $N!/(2!(N-2)!)$ , то полное число уравнений равно

$$N_{\text{total}} = N + \frac{N!}{2!(N-2)!} \quad (15)$$

Введём обозначение вектор-столбца  $\mathbf{X} = (X_1 X_2 \dots X_N Y_{N+1} \dots Y_{N_{\text{tot}}})^T$ , где символ  $T$  указывает на операцию транспонирования, а измеренные моменты интенсивности запишем в виде столбца  $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \dots, J_{N_{\text{tot}}})^T$ . Используя соотношение (14), сформируем матрицу

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} j_{11} & \dots & j_{1s} & \dots & j_{1N_{\text{tot}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{s1} & \dots & j_{ss} & \dots & j_{sN_{\text{tot}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{N_{\text{tot}}1} & \dots & j_{N_{\text{tot}}s} & \dots & j_{N_{\text{tot}}N_{\text{tot}}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

и окончательно запишем матричное уравнение в виде

$$\mathbf{J} = \hat{K} \mathbf{X} \quad (17)$$

Его символическое решение есть

$$\mathbf{X} = \hat{K}^{-1} \mathbf{J} \quad (18)$$

Однако обратная матрица  $\hat{K}^{-1}$  может быть определена только тогда, когда  $\det \hat{K} \neq 0$ . Но это только необходимое условие. Достаточным условием является требование минимальности ошибки измерений компонент вектора  $\mathbf{X}$ . Выполнение как необходимого, так и достаточного условия зависят от оптимального выбора функции момента  $M_{p,q}$ . Поясним это. В работе [19] при измерении спектра вихрей в пучке с вырожденным составом оптических вихрей (когда топологический заряд в спектре мод может быть только положительным или отрицательным) достаточно было ограничиться выбором функции момента в виде ортогонального базиса многочленов Лагерра. Иная ситуация сложилась при измерении спектра вихрей в пучке с вырожденным составом вихрей (различные знаки топологических зарядов) в работе [20]. Здесь пришлось сначала подвергать пучок астигматичному преобразованию, чтобы снять вырождение по топологическому заряду, и представлять распределение интенсивности в базисе многочленов Эрмита, а затем использовать преобразование Фурье для  $M_{p,q}$ , чтобы

система уравнений стала разрешённой, а ошибка измерений снизилась до 0,03.

В данной статье топологический заряд постоянный, и мы сначала выбрали функцию  $M_{p,q}$  в базе многочленов Лагерра. При этом система уравнений не замыкалась. Затем мы воспользовались функцией моментов, определяющей преобразование Фурье:

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} \sin pr \\ \cos qr \end{pmatrix}.$$

Хотя теперь система уравнений замкнулась ( $\det \hat{K} \neq 0$ ), ошибка измерений в модельном эксперименте могла достигать 70% при произвольном выборе чисел  $p \neq q$ . Единственный вариант, при котором ошибка измерений снизилась до 1%, сводился к требованию  $p = q = 1, 3, 5, \dots$

Важным элементом процесса цифровой сортировки мод является определение знаков перекрёстных амплитуд  $Y_s$  и каждой амплитуды в отдельности. Для того, чтобы определить знак любой модовой амплитуды в спектре, достаточно знать знак амплитуды невозмущённого пучка. Далее знаки вычисляются, например, по цепочке

$$Y_0 \leftarrow \dots \leftarrow Y_{n-1} \leftarrow Y_n \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_{N_{tot}}.$$

### 3. Сортировка невырожденных состояний

При экспериментальной сортировке мод в возмущённом пучке мы сначала детально исследовали сортировку мод единичного ЛГ-пучка (невырожденный случай), а затем распространили метод на сложный пучок (вырожденный случай), содержащий несколько исходных ЛГ-пучков с одинаковыми топологическими зарядами  $m$ , но различными радиальными числами  $n$ . Эксперимент проводился на экспериментальной установке, блок-схема которой приведена на рис. 3. Гауссов пучок ( $TEM_{00}$  мода) излучался He–Ne лазером ( $\lambda = 0,6328$  мкм), проходил через пространственный фильтр P-FF, где проводилась пространственная фильтрация пучка и согласование его параметров с параметрами рабочей ячейки SLM модулятора типа Thorlabs EXULUS-4K1. Пространственный модулятор позволял формировать ЛГ-пучки с топологическим зарядом  $m < 70$  и радиальным числом  $n < 50$ . Регулировка размеров отверстия диафрагмы  $R$  осуществлялась посредством ограничения размеров голографической решётки на SLM-модуляторе. Отражённый от голографической решётки пучок расщеплялся на два плеча делительной призмой BS. В первом плече возмущённый пучок фокусировался сферической линзой L ( $f_{sph} = 10$  см) на входное окно CCD-камеры, расположенное в фокальной плоскости линзы. Второе плечо предназначалось для проверки топологического заряда и ОУМ пучка. Для этого использовалась цилиндрическая линза CL с фокусным расстоянием  $f_{cyl} = 20$  см. ОУМ регистрировался в

фокальной плоскости цилиндрической линзы в соответствии с методикой, подробно изложенной в работах [15, 16, 35]. Оценка топологического заряда основывается на наших предварительных экспериментах и теоретических исследованиях авторов работы [36].

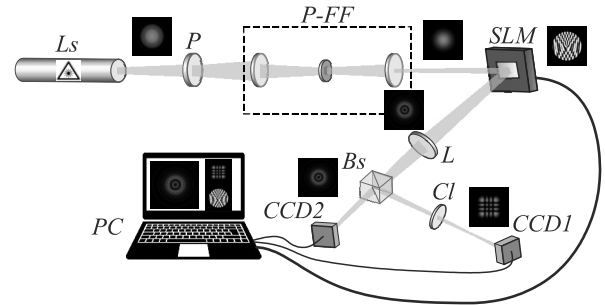


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки для измерения спектра вихрей и цифровой сортировки ЛГ-пучков. P – поляризатор, P-FF – пространственный фильтр, SLM – пространственный модулятор света, L – сферическая линза, BS – делительная призма, CL – цилиндрическая линза, CCD – детектор пучка

Мы обнаружили, что астигматическое преобразование с помощью цилиндрической линзы преобразует единичный пучок ЛГ в плоскости двойного фокуса в пучок Эрмита–Гаусса с числом нулей интенсивности (скажем, для  $m > 0$ )  $m + n$  вдоль оси  $x$  и  $n$  нулей в ортогональном направлении. Исследования измерения топологического заряда для пучков ЛГ с нулевым радиальным числом ( $n = 0$ ) были детально рассмотрены в работе [14]. Рассмотрим алгоритм цифровой сортировки мод ЛГ, возникших в результате возмущения единичного пучка ЛГ, схема которого приведена на рис. 4.

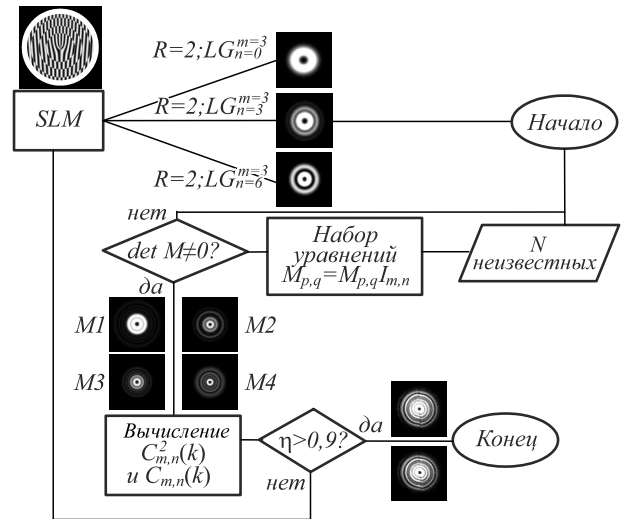


Рис. 4. Алгоритм цифровой сортировки ЛГ-мод по радиальным числам

Сначала сканируется распределение интенсивности  $\mathfrak{I}_{exp}$ , формируется массив из  $M_{p,q} = M_{p,q} \mathfrak{I}_{exp}$  и рассчитывается следующий массив моментов интенсивности  $J_{p,q}$  для каждого значения индексов  $p$  и  $q$ . Эти вычисления позволяют задать вектор  $\mathbf{J}$  в правой части

уравнения (18). Следующим шагом является формирование матрицы  $\hat{M}$  в (16) и нахождение её детерминанта. Если  $\det \hat{M} = 0$ , то включается обратная связь и алгоритм требует уточнения вида функций момента  $M_{p,q}$ , если же  $\det \hat{M} \neq 0$ , то программа продолжает работу.

Далее матрица  $M_{p,q}$  и вектор  $\mathbf{J}$  подставляются в уравнение (18), уравнения решаются, формируется массив компонент вектора  $\mathbf{X}$  и строится спектр квадратов амплитуд  $C_{m,n}^2(k)$ . Следующий шаг – вычисление знаков цепочки перекрёстных амплитуд и построение спектра амплитуд  $C_{m,n}(k)$ . Далее формируется комплексная амплитуда  $\Psi_{m,n}^{\text{exp}}$  в (6) из отсортированных мод ЛГ, включается второй контур обратной связи и формируется дифракционная решётка с функцией пропускания

$$T_{m,n}^{\text{exp}} = \text{signum} \left[ \cos(\arg \Psi_{m,n}^{\text{exp}} - Qr \cos \varphi) \right], \quad (19)$$

где  $Q$  – масштабный множитель. Голографическая решётка формируется на рабочем элементе SLM – модулятора, а лазерный пучок восстанавливает вторичный пучок как результат сортировки мод первичного возмущённого пучка, и его распределение интенсивности  $\mathfrak{I}_2^{\text{exp}}$  сканируется. Сравнение распределений интенсивности  $\mathfrak{I}_2^{\text{exp}}$  и  $\mathfrak{I}_{\text{exp}}$  осуществлялось посредством степени корреляции

$$\eta = \frac{\int_0^\infty \mathfrak{I}_{\text{exp}}(r) \mathfrak{I}_2^{\text{exp}}(r) r dr}{\int_0^\infty \mathfrak{I}_{\text{exp}}(r) r dr \int_0^\infty \mathfrak{I}_2^{\text{exp}}(r) r dr}. \quad (20)$$

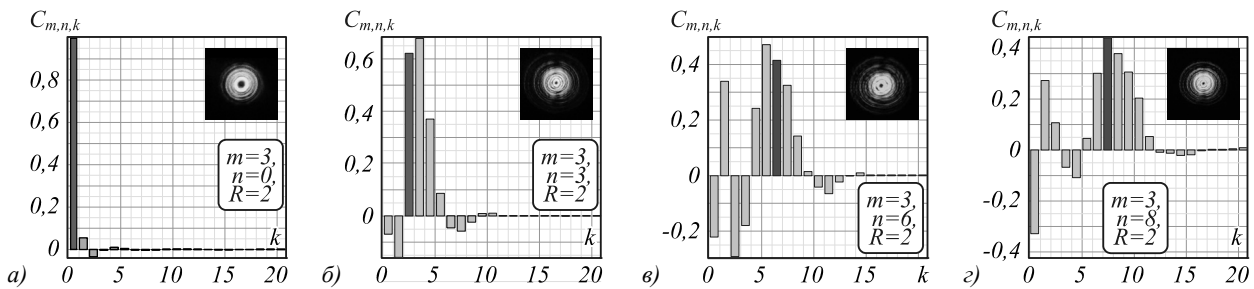


Рис. 5. Спектр амплитуд  $C_{m,n}(k)$  пучка ЛГ с топологическим зарядом, возмущенного диафрагмой с  $R = 2$  для различных исходных радиальных чисел:  $n = 0$  (а),  $n = 3$  (б),  $n = 6$  (в) и  $n = 8$  (з). На выноске показаны распределения интенсивности  $\mathfrak{I}_{m,n}(r)$  соответствующих возмущённых пучков ЛГ. Амплитуды мод с исходными радиальными числами окрашены тёмно-серым

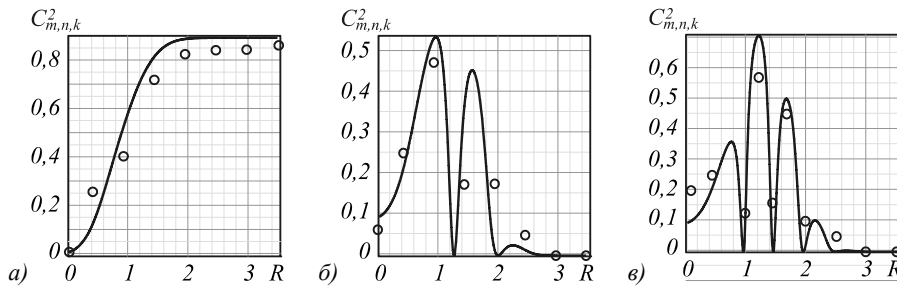


Рис. 6. Вклад различных мод возмущённых ЛГ – пучков с исходным топологическим зарядом  $m = 3$  и радиальными числами  $n = 0$  (а),  $n = 3$  (б) и  $n = 6$  (в) в компоненту  $k = 0$  спектра квадратов амплитуд  $C_{m,n,k}^2(R)$  для различных радиусов  $R$ . Сплошные линии – теория, кружки – эксперимент

Если степень корреляции оказывается меньше заданного оптимального значения  $\eta < 0,9$ , процесс сортировки прерывается, а экспериментальная установка подвергается дополнительной юстировке. В противном случае ( $\eta \geq 0,9$ ) на экран монитора выводился спектр квадрата амплитуды, спектр  $C_{m,n}(k)$ , амплитуды  $C_{m,n}(k)$  и информационная энтропия  $H_{m,n}$ . Этих данных вполне достаточно, чтобы восстановить с высокой степенью точности каждую из ЛГ – мод в отдельности и возмущённый пучок в целом.

Спектр амплитуд  $C_{m,n}(k)$  на рис. 5, полученный на эксперименте, описывает характерные черты ЛГ – пучка с топологическим зарядом  $m = 3$ , но с различными радиальными числами  $n = 0, n = 3, n = 6$  и  $n = 8$ , возмущённого диафрагмой с радиусом отверстия

$R = 2$ . Вихревой пучок с радиальным числом  $n = 0$  на рис. 5а не испытывает существенных структурных изменений, не считая появления двух соседних мод с малыми амплитудами, фазы которых сдвинуты на  $\pi$ . Заметный отклик на возмущение возникает по мере роста величины радиального числа, так что энергия быстро перераспределяется среди большого числа мод с бинарными скачками фаз 0 и  $\pi$  на рис. 5б-з.

Более общая картина  $C_{m,n,k}^2(R)$  перераспределения энергии и вклада различных пучков с  $n = 0, n = 3$  и  $n = 6$  в спектральное состояние  $k = 0$  для разных радиусов  $R$  приведена на рис. 6.

Монотонное снижение энергии от  $C_{m,n,k}^2 = 1$  до  $C_{m,n,k}^2 = 0,1$  на рис. 6а указывает на постепенный отток энергии из  $k = 0$  спектральной компоненты и её

перераспределение среди других спектральных компонент по мере уменьшения радиуса  $R$  апертуры. В то же время энергия перетекает из модовых компонент высших порядков (рис. 6б, в) в  $k=0$  моду. Однако отток энергии из мод высших порядков неравномерен, квадраты амплитуд испытывают осцилляции. Интересно отметить, что максимум кривой  $C_{3,3,0}^2|_{\max}$  вклада  $n=3$  пучка в  $k=0$  моду на рис. 6б соответствует нулям многочлена Лагерра

$$L_3^3(2r^2) = 0 \rightarrow r_{\max} = R_0 \approx (1,035; 1,63; 2,3),$$

а минимальный вклад  $C_{3,3,0}^2 = 0$  приходится на экстремумы многочленов Лагерра

$$\frac{d}{dr} L_3^3(2r^2) = 0 \rightarrow r_0 = R_{\max} \approx (1,33; 2,06).$$

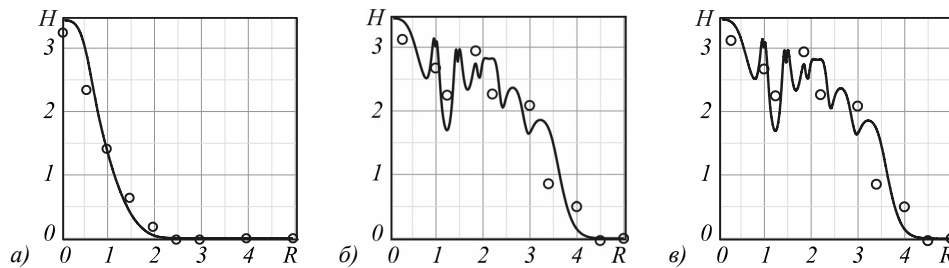


Рис. 7. Зависимость энтропии  $H_{m,n}$  от радиуса апертуры  $R$  для различных исходных пучков ЛГ с одинаковыми топологическими зарядами  $m=3$ , но различными радиальными числами  $n=0$  (а),  $n=3$  (б),  $n=6$  (в).

Сплошные линии – теория, кружки – эксперимент

Возрастание неопределённости в возмущённом пучке может быть оценено с помощью информационной энтропии  $H_{m,n}$  (энтропии Шеннона) [38]. Чтобы найти энтропию  $H_{m,n}$  в нашем случае, прежде всего заметим, что нормированный квадрат амплитуды  $C_n^2 \in (0,1)$  в разложении (2) можно трактовать как условную вероятность  $P(k/n)$  встретить вихревой пучок в состоянии  $|k\rangle$  среди  $N$  состояний при условии, что внешнее возмущение  $R$  действовало на пучок в состоянии  $|n\rangle$ , т.е.  $P(k/n) = C_{m,n}^2(R,k)$ . Такой подход учёта беспорядка вихревых состояний позволяет использовать формулу Шеннона [39] в виде

$$\begin{aligned} H_{m,n} &= -\sum_{k=0}^N P(k/n) \log_2 P(k/n) = \\ &= -\sum_{k=0}^N C_{m,n}^2(R,k) \log_2 C_{m,n}^2(R,k) > 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где энтропия измеряется в битах. С другой стороны, энтропию  $H_{m,n}$  можно рассматривать как меру новой информации, которая появилась в пучке в результате действия возмущения пучка ЛГ. Эта интерпретация оказывается полезной для совершенствования квантовых криптографических систем, поскольку позволяет просто создавать требуемые распределения квантовых ключей [40].

Аналогичная ситуация наблюдается и для возмущённого  $n=6$  пучка на рис. 6в. Перекачка энергии из высших гармоник ( $m, n$ ) в  $k$ -ю моду прекращается, когда радиус апертуры  $R$  достигает критического радиуса пятна исходного пучка  $R_{cr} = r_{spot} = \sqrt{2n+m+1}$  [37]. Как видно из рис. 6, наблюдается небольшое рассогласование экспериментальных точек и компьютерного моделирования. Такое рассогласование эксперимента и расчёта связано, с нашей точки зрения, с отклонениями экспериментального распределения интенсивности  $\mathfrak{I}_{\text{exper}}(r, \varphi)$  от осевой симметрии. Это указывает на необходимость включения обратной связи в алгоритм сортировки мод для дополнительной юстировки оптической системы. Однако, как мы покажем ниже, отмеченное рассогласование не превышает требований к оптимальной степени корреляции  $\eta$  рассортированных пучков в данном случае.

Также важно отметить, что энтропия  $H_{m,n}$  задается исключительно спектром квадратов амплитуд. Рис. 7 иллюстрирует возрастание неопределённости исходных состояний (3,0), (3,3) и (3,6) в виде зависимости  $H_{m,n}(R)$ . Все три состояния пучка характеризуются аналогичным типом эволюции энтропии: высокая величина энтропии  $H_{m,n}$  соответствует малым радиусам апертуры  $R$  и её снижению до нуля при больших радиусах. Однако если энтропия состояния (3,0) испытывает монотонное снижение по мере увеличения радиуса возмущения  $R$ , то состояния (3,3) и (3,6) сопровождаются быстрыми осцилляциями, которые замечены на эксперименте.

Окончательным этапом процесса цифровой сортировки мод по радиальному числу является формирование комбинированного пучка с помощью спектра амплитуд  $C_{m,n,k}$  на рис. 5 и рис. 6, который сопровождается формированием цифровой голограммы в жидкокристаллической ячейке SLM-модулятора и воспроизведением реального комбинированного пучка с оптимальной степенью корреляции  $\eta = 0,94$ .

Результат такой сортировки пучков демонстрирует рис. 8.

#### 4. Сортировка вырожденных состояний

Основным предметом исследований систем передачи и обработки оптической информации является смесь световых пучков с различными амплитудами и

фазами [38]. В данном параграфе мы упростили задачу и выбрали невозмущённую комбинацию ЛГ-пучков с действительными амплитудами  $A_n$  без начальных фаз, возмущённую круглой апертурой. По аналогии с возмущением единичного пучка в параграфе 2 (11), запишем комплексную амплитуду смеси в виде

$$\Psi_m(r, \varphi, z) = \frac{e^{-\frac{r^2}{\sigma(z)} + im\varphi}}{\sigma(z)} \times \sum_{n=0}^M \sum_{k=0}^N A_{m,n} C_{m,n,k} \left(\frac{r}{w(z)}\right)^{|m|} L_k^{|m|} \left(2 \frac{r^2}{w^2(z)}\right) e^{i\Gamma_{m,k}(z)}, \quad (22)$$

где  $M$  – полное число ЛГ-пучков. Из (22) видно, что каждой  $k$ -й компоненте соответствует  $M$  ЛГ-мод с амплитудами  $A_{m,n}$ , т.е. каждая компонента спектра имеет  $M$ -кратное вырождение. Для того чтобы снять вырождение, необходимо подвергнуть пучок соответствующему преобразованию. Насколько нам известно, в настоящее время таких исследований не проводилось.

Физический аспект проблемы сортировки вырожденных пучков заключается в следующем. Каждую вырожденную  $k$ -ю моду волнового поля (22) запишем в виде

$$\Psi_{m,k}(r, \varphi, z) = \left( \sum_{n=0}^M A_n C_{m,n,k} \right) \Psi_{m,k}(r, \varphi, z), \quad (23)$$

где  $\Psi_{m,k}(r, \varphi, z)$  – комплексная амплитуда  $k$ -го пучка ЛГ. На эксперименте требуется отсортировать каждую такую моду. Но функция поля  $\Psi_{m,k}(r, \varphi, z)$  определяется только двумя числами –  $m$  и  $k$ , а в сортировке должно участвовать ещё исходное радиальное число  $n$ . Очевидно, что рассмотренный выше подход не позволяет выполнить такую операцию. Для этого необходимо поставить метку на амплитуду  $A_n$ , например, в виде дополнительной модуляции амплитуды или начальной фазы. Мы воспользуемся более простым методом, рассмотренным ниже.

Без потери общности ограничимся простым случаем сложного исходного пучка, содержащего три  $M=3$  моды ЛГ с радиальными числами  $n_1=0, n_2=3, n_3=6$ , но с одинаковыми топологическими зарядами  $m=3$ . Действие диафрагмы с круговым отверстием  $R$  приводит к возникновению широкого спектра вторичных мод ЛГ  $C_m(k)$  для каждого исходного пучка ЛГ с индивидуальными спектрами  $C_{m,n_1}(k), C_{m,n_2}(k)$  и  $C_{m,n_3}(k)$ , которые в общем случае перекрывают друг друга. Каждая  $k$ -я мода оказывается трижды вырожденной.

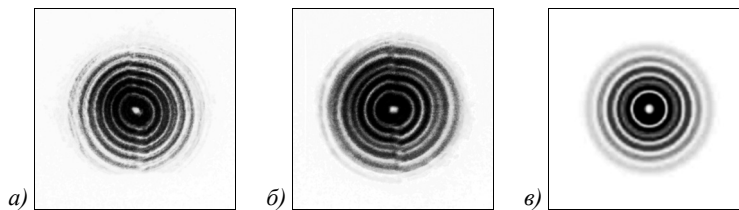


Рис. 8. Распределение интенсивности (инверсия)  $\mathcal{I}(r, \varphi)$  вихревого пучка с топологическим зарядом  $m = 3$  и радиальным числом  $n = 6$ , возмущённого круговой апертурой  $R = 2,5$ : исходный возмущённый пучок (а), пучок, восстановленный с помощью цифровой сортировки мод (б), компьютерное моделирование возмущённого пучка (в). Степень корреляции изображений (а) и (б) составляет  $h = 0,94$

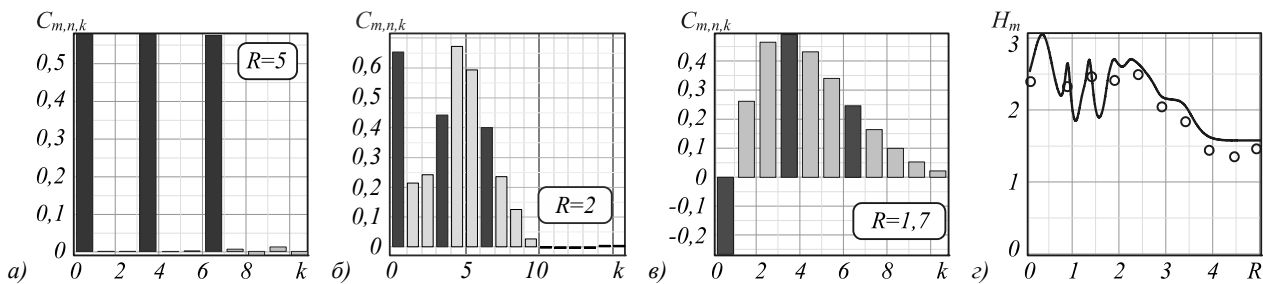


Рис. 9. Динамика ЛГ-мод (а, б, в) в вырожденном спектре мод  $C_{m,k}$  с радиальными числами  $n_1 = 0, n_2 = 3, n_3 = 6$  соответственно, вызванная изменением радиуса апертуры  $R$ ; энтропия  $H_m(R)$  сложного пучка (г); непрерывная линия – теория, эксперимент – кружки

Для компьютерного моделирования и реальной сортировки пучков можно воспользоваться алгоритмом, рассмотренным ранее, с учётом суммы в выражении (22). Однако спектр амплитуд содержит вырожденные моды. В случае невозмущённого пучка ( $R \rightarrow \infty$ ) каждая спектральная амплитуда записывается в виде

$$C_{m,k} = \sum_{n=0}^M A_n,$$

как показано на рис. 9а. На рисунке все три моды имеют почти одинаковые амплитуды в пределах ошибки измерений. Когда включается возмущение и с ним происходит перекачка энергии между модами, то возникают дополнительные спектральные моды в окрестности каждой моды с числом  $n_j, j = 0, 3, 6$ , которые перекрывают друг друга (рис. 9б). Малые изменения возмущения ( $\Delta R = 1,7$ ) приводят к резким изменениям формы спектра амплитуд вплоть до переключения знаков амплитуд  $C_m(k)$ , как показано на рис. 9в.



Для того, чтобы расшифровать вырожденный спектр на рис. 9б, требуется 3 ключа. Такими ключами являются спектры невырожденных пучков ЛГ (см. например, рис. 5) по аналогии с тем, как это делается в оптической спектроскопии при анализе спектров излучения источников света [41]. Особый интерес представляет измерение энтропии Шеннона сложного пучка с вырождением. В соответствии с формулой Шеннона (см. [39], стр. 8) энтропия сложного сигнала вычисляется как

$$H_m = \sum_{n=0}^M \sum_{k=0}^N \tilde{C}_{m,n,k}^2 \log_2 \tilde{C}_{m,n,k}^2 \quad (\text{bit}), \quad (24)$$

где  $\tilde{C}_{m,n,k}^2 = p_n C_{m,n,k}^2$  являются перенормированными квадратами амплитуд  $C_{m,n,k}$ ,  $p_n = A_{m,n}^2$ , есть вероятность обнаружить  $n$ -ю моду в исходном невозмущённом сложном пучке с вырождением. Другими словами, каждая  $k$ -я компонента в сумме (21) даёт вклад в  $n$ -й член в сумме (24) с вероятностью  $p_n$ . Следовательно, имеет смысл сначала измерить энтропию сложного пучка, используя формулу (21), а затем сравнить её с энтропией (24), составленной из вторичных пучков ЛГ. Каждый модовый пучок в вырожденном спектре на рис. 9 вносит свой вклад в каждую линию сложного спектра, например,

$$C_{3,0} = C_{3,0,0} + C_{3,3,0} + C_{3,6,0}.$$

Используя спектры на рис. 5а, б, в, находим  $C_{3,0,0} \approx 0,9$ ,  $C_{3,3,0} \approx -0,05$ ,  $C_{3,6,0} \approx -0,22$ , откуда

$$C_0 \approx 0,9 - 0,05 - 0,22 = 0,67,$$

в то время как спектр на рис. 9б даёт  $C_{3,0} \approx 0,65$ , т.е. два альтернативных измерения отличаются в пределах ошибки измерений  $\Delta C_{3,0} \approx 0,02$ .

Измерение меры неопределённости, введённой в сложный пучок возмущением, задаётся энтропией  $H_m$ , зависимость которой от радиуса апертуры  $R$  приведена на рис. 9г. Теоретическая кривая на рисунке иллюстрирует два режима динамики обмена энергией мод в вырожденном пучке. Быстрые осцилляции при малых радиусах апертуры сменяются монотонным стремлением энтропии к асимптотическому значению  $H_m \approx 1,584962501$  после достижения радиусом критического значения  $R_{cr} = 4$ . В самом деле, когда радиус апертуры достигает своего критического значения, равного оптимальным размерам ЛГ-пучка  $R_n = \sqrt{m+2n+1}$ , энтропия каждой моды достигает асимптотического значения  $H_{m,n} \rightarrow -(-1/3 \log_2 3\sqrt{2})$  и далее не изменяется. После того как радиус апертуры сравнивается с оптимальными размерами пятна ЛГ-моды  $R_{cr} = 4$  с максимальным радиальным числом  $n = 6$  изменение энтропии сложного пучка

$$H_{m,6} \rightarrow -3 \cdot (-1/3 \log_2 3) \approx 1,584962501$$

прекращается.

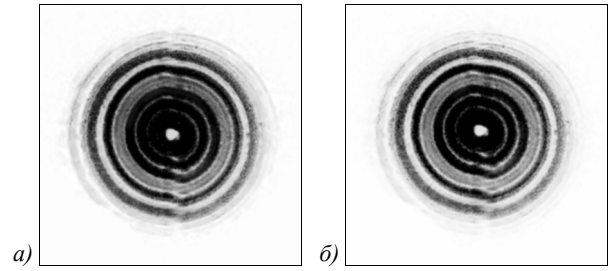


Рис. 10. Распределение интенсивности (инверсия) сложного пучка до сортировки (а); распределение интенсивности (инверсия) сложного пучка (б), сформированного рассортированными модами ЛГ с  $m = 3$  и  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 3$ , и  $n_3 = 6$ ,  $R = 2$ . Степень корреляции изображений (а) и (б) составляет  $\eta = 0,92$

Экспериментальные точки на рис. 9г следуют за теоретически предсказанным изменением энтропии с небольшими отклонениями. Довольно большая неопределённость, обозначенная энтропией сложного пучка, вносит ощутимую ошибку в измерительный процесс. Такие отклонения немедленно сказываются на процессе цифровой сортировки пучков. Реальным результатом сортировки являются два изображения сложных пучков на рис. 10.

Распределение интенсивности на рис. 10а сформировано из трёх пучков ЛГ с различными радиальными числами на голографической решетке SLM-модулятора. Изображение на рис. 10б является результатом цифровой сортировки мод этого пучка с последующим восстановлением также на SLM-модуляторе. Сравнение изображений даёт степень корреляции  $\eta \approx 0,92$ , которая едва превосходит критическое значение  $\eta_{cr} \approx 0,9$ . Полученный результат, хотя и соответствует поставленным целям и задачам статьи, указывает на необходимость дальнейшего совершенствования метода цифровой сортировки пучков ЛГ для его практического использования.

### Выводы

Таким образом, в результате проведённых исследований разработаны и воплощены основные принципы цифровой сортировки мод Лагерра–Гаусса по радиальному числу как в случае невырожденного, так и в случае вырожденного сложного пучка, подверженного возмущению в виде круглой апертуры переменного радиуса. Цифровая сортировка пучков ЛГ по ортогональному базису предполагает использование моментов интенсивности высших порядков и последующее сканирование соответствующих изображений модулированных пучков в фокальной плоскости сферической линзы. В результате получаем систему линейных уравнений относительно квадратов амплитуд и перекрёстных амплитуд мод возмущённого пучка. Решение системы уравнений задаёт массив квадратов амплитуд и перекрёстных амплитуд, которые позволяют определить амплитуды каждой моды ЛГ и восстановить как реальный массив пучков, так и сам комбинированный пучок в целом.

На эксперименте рассматривалось два типа пучков: простой пучок ЛГ и композиция простых пучков ЛГ с одинаковыми топологическими зарядами  $m$  (азимутальные числа) и различными радиальными числами  $n$ . Возмущение пучка осуществлялось посредством тонкой круглой диафрагмы с различными радиусами  $R$  отверстия. В результате возмущения возникало множество вторичных мод ЛГ с различными радиальными числами  $k$ , которое характеризовалось спектром амплитуд  $C_{m,n}(k)$ . Полученный спектр позволил восстановить как реальный массив мод ЛГ, так и сам возмущённый пучок со степенью корреляции не ниже  $\eta=0,94$ . В качестве меры неопределённости, внесённой возмущением, измерялась информационная энтропия  $H_{m,n}$  (энтропия Шеннона).

Возмущение сложного пучка приводило к возникновению вырожденного спектра амплитуд, когда одному радиальному числу  $k$  в спектре соответствует  $M$  возмущённых мод ЛГ с исходными радиальными числами  $n$ . Число вырождения равнялось числу исходных мод  $M$ . Для расшифровки и последующей сортировки вырожденного возмущённого числа потребовалось  $M$  ключей. В качестве таких ключей мы выбрали  $M$  спектров амплитуд  $C_{m,n}(k)$  невырожденных возмущённых пучков при заданных радиусах  $R$  и начальных радиальных числах  $n$ . Измерения показали, что величина информационной энтропии существенно возрастала. Это сказало на качестве сортировки реальных пучков, поскольку степень корреляции снизилась до  $\eta=0,92$ , но не превышала критическую степень корреляции.

Рассмотренный новый метод цифровой сортировки пучков позволяет существенно упростить устройства сортировки пучков по радиальным числам, известные авторам, поскольку исключает из оптических устройств ряд интерферометрических элементов со сложным механическим и оптоэлектронным обеспечением. Вместо этого, измерения спектра пучка сводятся к сканированию распределения интенсивности и дальнейшей цифровой обработке массива данных с последующим восстановлением реальных пучков. Кроме того, использование вырожденных возмущённых пучков позволяет использовать новые распределения квантовых ключей в криптографии, в системах оптической связи и устройствах анализа рассеянного излучения от различных поверхностей.

### Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-01233.

### Литература

1. **Allen, L.** Introduction to phase-structured electromagnetic waves / L. Allen, M. Padgett. – In: Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces / ed. by D.L. Andrews. – New

York: Elsevier; 2008. – Chap. 1. – 400 p. – DOI: 10.1016/B978-0-12-374027-4.00001-3.

2. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – 8185. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

3. **Padgett, M.J.** Optical tweezers / M.J. Padgett, J. Molloy, D. McGloin. – Boca Raton: CRC Press; 2010. – 508 p. – ISBN: 978-1-4200-7414-7.

4. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar / Physical Review A. – 2017. – Vol. 96. – 063807. – DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.

5. **Березный, А.Е.** Бессель-оптика / А.Е. Березный, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 274, Вып. 4. – С. 802-805.

6. **Golub, M.A.** Synthesis of spatial filters for investigation of the transverse mode composition of coherent radiation / M.A. Golub, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // Soviet Journal of Quantum Electronics. – 1982. – Vol. 9. – P. 1208-1209.

7. **Golub, M.A.** An experimental-study into the power distribution over transverse-modes in a fiber-optic waveguide with the use of spatial filters / M.A. Golub, S.V. Karpeev, S.G. Krivoshlykov, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // Kvantovaya Elektronika. – 1984. – Vol. 11, No. 9. – P. 1869-1871.

8. **Голуб, М.А.** Фазовые пространственные фильтры, согласованные с поперечными модами / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, Н.Л. Казанский, А.В. Мирзов, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, Г.В. Уваров // Квантовая электроника. – 1988. – Т. 15, № 3. – С. 617-618.

9. **Abramochkin, E.** Beam transformations and non-transformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issue 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.

10. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.

11. **Khonina, S.N.** Measuring the light field orbital angular momentum using DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2001. – Vol. 10, Issue 4. – P. 241-255.

12. **Khonina, S.N.** Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode self-imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer. – In: Recent progress in optical fiber research / ed. by M. Yasin, S.W. Harun, H. Arof. – Chap. 15. – Rijeka, Croatia: InTech, 2012. – P. 327-352. – DOI: 10.5772/28067.

13. **Kirilenko, M.S.** Information transmission using optical vortices / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Optical Memory and Neural Networks. – 2013. – Vol. 22, Issue 2. – P. 81-89. – DOI: 10.3103/S1060992X13020069.

14. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.

15. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederiter, J.T. Gopinath, K.E. Siemets

- // Optics Letters. – 2016. – Vol. 41. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
16. **Volyar, A.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 22. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
  17. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // Journal of the Optical Society of America A. – 2019. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1064-1071. – DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
  18. **Volyar, A.** Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // Applied Optics. – 2019. – Vol. 58, Issue 21. – P. 5748-5755. – DOI: 10.1364/AO.58.005748.
  19. **Volyar, A.** Orbital angular momentum and informational entropy in perturbed vortex beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // Optics Letters. – 2019. – Vol. 44, Issue 23. – P. 2687-2690. – DOI: 10.1364/OL.44.005687.
  20. **Lavery, M.P.J.** Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation / M.P.J. Lavery, G.C.G. Berkhout, J. Courtial, M.J. Padgett // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13, Issue 6. – 064006.
  21. **D'errico, A.** Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of structured light beams / A. D'errico, R. D'amelio, B. Piccirillo, F. Cardano, L. Marrucci // Optica. – 2017. – Vol. 4, Issue 11. – P. 1350-1357. – DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
  22. **Bozinovic, N.** Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // Science. – 2013. – Vol. 340, Issue 6140. – P. 1545-1548. – DOI: 10.1126/science.1237861.
  23. **Shields, A.J.** Overcoming the rate–distance limit of quantum key distribution without quantum repeaters / A.J. Shields, J.F. Dynes, Z.I. Yuan, M. Lucamarini // Nature. – 2018. – Vol. 557, Issue 7705. – P. 400-403. – DOI: 10.1038/s41586-018-0066-6.
  24. **Karimi, E.** Radial coherent and intelligent states of paraxial wave equation / E. Karimi, E. Santamato // Optics Letters. – 2012. – Vol. 37. – P. 2484-2386. – DOI: 10.1364/OL.37.002484.
  25. **Karimi, E.** The quantum nature of the radial degree of freedom of a photon via Hong-Ou-Mandel interference / E. Karimi, D. Giovannini, E. Bolduc, N. Bent, F.M. Miatto, M.J. Padgett, R.W. Boyd // Physical Review A. – 2014. – Vol. 89. – 013829. – DOI: 10.1103/PhysRevA.89.013829.
  26. **Plick, W.N.** Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams / W.N. Plick, M. Krenn // Physical Review A. – 2015. – Vol. 92, Issue 6. – 063841. – DOI: 10.1103/PhysRevA.92.063841.
  27. **Karimi, E.** Quantum number of Laguerre-Gauss modes / E. Karimi, R.W. Boyd, P. de la Hoz, H. de Guise, J. Řeháček, Z. Hradil, A. Aiello, G. Leuchs, L.L. Sánchez-Soto // Physical Review A. – 2014. – Vol. 89, Issue 6. – 063813. – DOI: 10.1103/PhysRevA.89.063813.
  28. **Malik, M.** Multi-photon entanglement in high dimensions / M. Malik, M. Erhard, M. Huber [et al.] // Nature Photonics. – 2016. – Vol. 10. – P. 248-252. – DOI: 10.1038/nphoton.2016.12.
  29. **Gu, X.** Gouy phase radial mode sorter for light: Concepts and experiments / X. Gu, M. Krenn, M. Erhard, A. Zeilinger // Physical Review Letters. – 2018. – Vol. 120, Issue 10. – 103601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.103601.
  30. **Zhou, Y.** Sorting photons by radial quantum number / Y. Zhou, M. Mirhosseini, D. Fu, J. Zhao, S.M.H. Rafsanjani, A.E. Willner, R.W. Boyd // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119, Issue 26. – 263602. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.263602.
  31. **Fu, D.** Realization of a scalable Laguerre–Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter / D. Fu, Y. Zhou, R. Qi, S. Oliver, Y. Wang, S.M.H. Rafsanjani, J. Zhao, M.Z. Shi, P. Zhang, R.W. Boyd // Optics Express. – 2018. – Vol. 26, Issue 25. – P. 33057-33065. – DOI: 10.1364/OE.26.033057.
  32. **Zhou, Y.** Using all transverse degrees of freedom in quantum communications based on a generic mode sorter / Y. Zhou, M. Mirhosseini, S. Oliver, J. Zhao, S.M.H. Rafsanjani, M.P.J. Lavery, A.E. Willner, R.W. Boyd // Optics Express. – 2019. – Vol. 27, Issue 7. – P. 10383-10394. – DOI: 10.1364/OE.27.010383.
  33. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
  34. **Flusser, J.** Moments and moment invariants in pattern recognition / J. Flusser, T. Suk, B. Zitová. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2009. – 312 p. – ISBN: 978-0-470-69987-4.
  35. **Котляр, В.В.** Методы определения орбитального углового момента лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 42-53. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
  36. **Abramochkin, E.** General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams / E. Abramochkin, E. Razueva, V. Volostnikov // Journal of the Optical Society of America A. – 2010. – Vol. 27, Issue 11. – P. 2506-2513. – DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
  37. **Phillips, R.L.** Spot size and divergence for Laguerre Gaussian beams of any order / R.L. Phillips, L.C. Andrews // Applied Optics. – 1983. – Vol. 22. – P. 643-644. – DOI: 10.1364/AO.22.000643.
  38. **Yu, F.T.S.** Entropy and information optics / F.T.S. Yu. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 2<sup>nd</sup> ed. – 210 p. – DOI: 10.1201/b22443.
  39. **Shannon, C.E.** A mathematical theory of communication / C.E. Shannon // Bell System Technical Journal. – 1948. – Vol. 27, Issue 3. – P. 379-423. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
  40. **Mirhosseini, M.** High-dimensional quantum cryptography with twisted light / M. Mirhosseini, O.S. Magaña-Loaiza, M.N. O'Sullivan, B. Rodenburg, M. Malik, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, D.J. Gauthier, R.W. Boyd // New Journal of Physics. – 2015. – Vol. 17. – 033033. – DOI: 10.1088/1367-2630/17/3/033033.
  41. **Hollas, J.M.** Modern spectroscopy / J.M. Hollas. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 482 p. – ISBN: 978-0-470-84416-8.

#### Сведения об авторах

Информация об авторе **Воляр Александр Владимирович** – см. стр. 154 этого номера.

**Брецько Михаил Владимирович** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант второго курса кафедры общей физики физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, обработка графических изображений, программирование. E-mail: [mikhailbretcko4@gmail.com](mailto:mikhailbretcko4@gmail.com).

**Акимова Яна Евгеньевна** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант второго курса кафедры общей физики, физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Егоров Юрий Александрович** – 1975 года рождения. Выпускник Таврического национального университета (в настоящее время КФУ). Получил степень кандидата физико-математических наук в области оптики и лазерной физики в Таврическом национальном университете в 2005 году. Начиная с 2006 года: доцент кафедры общей физики. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптика анизотропных сред. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

---

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 06 января 2019 г. Окончательный вариант – 12 февраля 2020 г.

---

---

# Sorting Laguerre-Gaussian beams by radial numbers via intensity moments

A.V. Volyar<sup>1</sup>, M. Bretsko<sup>1</sup>, Ya. Akimova<sup>1</sup>, Yu. Egorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,  
Academician Vernadsky 4, 295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia

## Abstract

We propose and experimentally implement a new technique for digitally sorting Laguerre-Gaussian (LG) modes by radial number at a constant topological charge, resulting from the perturbation of the original LG beam, or superposition thereof, by passing them through a thin dielectric diaphragm with various aperture radii. The technique is based on a digital analysis of higher-order intensity moments. Two types of perturbed beams are considered: non-degenerate and degenerate beams with respect to the initial radial number of the LG beam superposition. A diaphragm with a circular pinhole causes the appearance of a set of secondary LG modes with different radial numbers, which are characterized by an amplitude spectrum. The digital amplitude spectrum makes it possible to recover the real LG modes and find the measure of uncertainty due to perturbation by means of information entropy.

It is found that the perturbation of a complex beam leads to the appearance of a degenerate amplitude spectrum since a single spectral line corresponds to a set of modes generated by  $M$  original Laguerre-Gaussian beams with different radial numbers. For the spectrum to be deciphered, we use  $M$  keys represented by the amplitude spectra of the nondegenerate perturbed beams in our experiment. However, the correlation degree decreases to 0.92.

**Keywords:** information optics, vortex beams sorting, Shannon entropy.

**Acknowledgements:** The work was funded by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR grant No. 19-29-01233.

**Citation:** Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Sorting Laguerre-Gaussian beams by radial numbers via intensity moments. *Computer Optics* 2020; 44(2): 155-166. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-677.

## References

- [1] Allen L, Padgett M. Introduction to phase-structured electromagnetic waves. In Book: Andrews DL, ed. *Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces*. Ch 1. New York: Elsevier; 2008. DOI: 10.1016/B978-0-12-374027-4.00001-3.
  - [2] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes. *Phys Rev A* 1992; 45: 8185. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
  - [3] Padgett MJ, Molloy J, McGloin D, eds. *Optical tweezers*. London: Chapman and Hall; 2010. ISBN: 978-1-4200-7414-7.
  - [4] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 96: 063807. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
  - [5] Bereznyi AE, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Bessel Optics [In Russian]. *Proc Acad Sci USSR* 1984; 274(4): 802-805.
  - [6] Golub MA, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Synthesis of spatial filters for investigation of the transverse mode composition of coherent radiation. *Sov J Quant Electron* 1982; 9: 1208-1209.
  - [7] Golub MA, Karpeev SV, Krivoshlykov SG, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. An experimental-study into the power distribution over transverse-modes in a fiber-optic waveguide with the use of spatial filters. *Kvantovaya Elektronika* 1984; 11(9): 1869-1871.
  - [8] Golub MA, Karpeev SV, Kazanskiy NL, Mirzov AV, Sisakyan IN, Soifer VA, Uvarov GV. Spatial phase filters matched to transverse modes. *Quantum Electronics* 1988; 18(3): 392-393. DOI: 10.1070/QE1988v018n03ABEH011528.
  - [9] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and non-transformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
  - [10] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
  - [11] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. *Optical Memory and Neural Networks* 2001; 10(4): 241-255.
  - [12] Khonina SN, Kazanskiy NL, Soifer VA. Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode self-imaging. In book: Yasin M, Harun SW, Arof H, eds. *Recent progress in optical fiber research*. Ch 15. Rijeka, Croatia: InTech; 2012: 327-352. DOI: 10.5772/28067.
  - [13] Kirilenko MS, Khonina SN. Information transmission using optical vortices. *Optical Memory and Neural Networks* 2013; 22(2): 81-89. DOI: 10.3103/S1060992X13020069.
  - [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
  - [15] Alperin SN, Niederiter RD, Gopinath JT, Siemets KE. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41: 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
  - [16] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
-

- [17] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(6): 1064-1071. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
- [18] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58(21): 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.
- [19] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Orbital angular momentum and informational entropy in perturbed vortex beams. *Opt Lett* 2019; 44(23): 2687-2690. DOI: 10.1364/OL.44.005687.
- [20] Lavery MPJ, Berkhout GCG, Courtial J, Padgett MJ. Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation. *J Opt* 2011; 13(6): 064006.
- [21] D'errico A, D'amelio R, Piccirillo B, Cardano F, Marrucci L. Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of structured light beams. *Optica* 2017; 4(11): 1350-1357. DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
- [22] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, Tur M, Kristensen P, Huang H, Willner AE, Ramachandran S. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Sci* 2013; 340(6140): 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [23] Shields AJ, Dynes JF, Yuan ZI, Lucamarini M. Overcoming the rate-distance limit of quantum key distribution without quantum repeaters. *Nature* 2018; 557(7705): 400-403. DOI: 10.1038/s41586-018-0066-6.
- [24] Karimi E, Santamato E. Radial coherent and intelligent states of paraxial wave equation. *Opt Lett* 2012; 37: 2484-2386. DOI: 10.1364/OL.37.002484.
- [25] Karimi E, Giovannini D, Bolduc E, Bent N, Miatto FM, Padgett MJ, Boyd RW. Exploring the quantum nature of the radial degree of freedom of a photon via Hong-Ou-Mandel interference. *Phys Rev A* 2014; 89: 013829. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.013829.
- [26] Plick WN, Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams. *Phys Rev. A* 2015; 92(6): 063841. DOI: 10.1103/PhysRevA.92.063841.
- [27] Karimi E, Boyd RW, de la Hoz P, de Guise H, Řeháček J, Hradil Z, Aiello A, Leuchs G, Sánchez-Soto LL. Radial quantum number of Laguerre-Gauss modes. *Phys Rev A* 2014; 89(6): 063813. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.063813.
- [28] Malik M, Erhard M, Huber M, et al. Multi-photon entanglement in high dimensions. *Nat Photon* 2016; 10: 248-252. DOI: 10.1038/nphoton.2016.12.
- [29] Gu X, Krenn M, Erhard M, Zeilinger A. Gouy phase radial mode sorter for light: Concepts and experiments. *Phys Rev Lett* 2018; 120(10): 103601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.103601.
- [30] Zhou Y, Mirhosseini M, Fu D, Zhao J, Rafsanjani SMH, Willner AE, Boyd RW. Sorting photons by radial quantum number. *Phys Rev Lett* 2017; 119(26): 263602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.263602.
- [31] Fu D, Zhou Y, Qi R, Oliver S, Wang Y, Rafsanjani SMH, Zhao J, Shi MZ, Zhang P, Boyd RW. Realization of a scalable Laguerre-Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter. *Opt Express* 2018; 26(25): 33057-33065. DOI: 10.1364/OE.26.033057.
- [32] Zhou Y, Mirhosseini M, Oliver S, Zhao J, Rafsanjani SMH, Lavery MPJ, Willner AE, Boyd RW. Using all transverse degrees of freedom in quantum communications based on a generic mode sorter. *Opt Express* 2019; 27(7): 10383-10394. DOI: 10.1364/OE.27.010383.
- [33] Prudnikov AP, ed, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series, special functions. Washington: Gordon and Breach; 1986.
- [34] Flusser J, Suk T, Zitová B. Moments and moment invariants in pattern recognition. New York: John Wiley & Sons Inc; 2009. ISBN: 978-0-470-69987-4.
- [35] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam. *Computer Optics* 2019; 43(1): 42-53. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
- [36] Abramochkin E, Razueva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [37] Phillips RL, Andrews LC. Spot size and divergence for Laguerre Gaussian beams of any order. *Appl Opt* 1983; 22: 643-644. DOI: 10.1364/AO.22.000643.
- [38] Yu FTS. Entropy and information optics. 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton: CRC Press; 2017.
- [39] Shannon CE. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal* 1948; 27(3): 379-423. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [40] Mirhosseini M, Magaña-Loaiza OS, O'Sullivan MN, Rodenburg B, Malik M, Lavery MPJ, Padgett MJ, Gauthier DJ, Boyd RW. High-dimensional quantum cryptography with twisted light. *New J Phys* 2015; 17: 033033. DOI: 10.1088/1367-2630/17/3/033033.
- [41] Hollas JM. Modern spectroscopy. New York: John Wiley & Sons Inc; 2002. ISBN: 978-0-470-84416-8.

#### Authors' information

The information about authors **Alexander Vladimirovich Volyar** you can find on page 154 of this issue.

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Co-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, programming. E-mail: [mikhailbretsko4@gmail.com](mailto:mikhailbretsko4@gmail.com).

**Yana Evgenievna Akimova** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the of General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: [aklmova.yana@yandex.ru](mailto:aklmova.yana@yandex.ru).

**Yuriy Alexandrovich Egorov** – born in 1975. A graduate of Taurida National University (2001). Received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the field of Optics and Laser Physics at the Taurida Na-

---

tional V.I. Vernadsky University (Crimean Federal University is now) in 2005. Since 2006, he has been a Associate Professor at the Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The sphere of scientific interests is singular optics, diffraction optics. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

---

*Received January 06, 2019. The final version – February 12, 2020.*

---