

## Орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Д.С. Калинкина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Исследован теоретически и численно Гауссов пучок с несколькими оптическими вихрями с единичным топологическим зарядом одного знака, центры которых расположены равномерно на окружности. Получены простые выражения для его мощности, орбитального углового момента и топологического заряда. Показано, что орбитальный угловой момент, нормированный на мощность, не может превышать количество вихрей в пучке. Этот орбитальный угловой момент убывает с увеличением расстояния от оптической оси до центров вихрей. Топологический заряд, напротив, не зависит от этого расстояния и равен числу вихрей. При прохождении через случайный фазовый экран (диффузор) и распространении в свободном пространстве рассмотренные пучки можно идентифицировать по числу локальных минимумов интенсивности (теневого пятна) и по орбитальному угловому моменту, что подтверждается численным моделированием.

**Ключевые слова:** Гауссов пучок, оптический вихрь, фазовая сингулярность, орбитальный угловой момент, топологический заряд, случайный экран, диффузор, рассеивающая среда.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 1. – С. 34-39. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-632.

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS. Orbital angular momentum and topological charge of a Gaussian beam with multiple optical vortices. Computer Optics 2020; 44(1): 34-39. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-632.

### Введение

В настоящее время активно исследуется оптическая связь в свободном пространстве [1]. Для повышения пропускной способности одним из способов является мультиплексирование светового пучка по орбитальному угловому моменту (ОУМ). Поэтому большое количество работ посвящено исследованию распространения различных видов оптических вихрей в атмосфере с турбулентностью. Если рассматривать вихревые пучки Бесселя [2], то они удобны тем, что их форма не искажается при распространении и восстанавливается при прохождении через препятствия. Однако для их формирования и использования в оптической связи требуются аксиконы с большой апертурой [3]. Если использовать пучки Лагерра–Гаусса [4–7], Бесселя–Гаусса [8–11] или простые оптические вихри, формирующиеся при дифракции Гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке (СФП) [12], то их поперечное распределение интенсивности состоит из набора световых колец. Идентифицировать порядок вихря (или топологический заряд, ТЗ) можно, например, по радиусу самого яркого кольца. Однако этот радиус растёт с ростом ТЗ (то есть пучок становится шире), и потому для использования пучков высших порядков необходимо увеличивать размер приёмной аппаратуры.

Поэтому в качестве носителей информации практический интерес представляют также альтернативные световые поля, которые бы имели аналитическое описание и обладали устойчивостью к случайным искажениям. Если такие поля не обладают осевой симметрией, то их ОУМ уже не равен ТЗ. Тем не менее, ОУМ также может быть использован для идентификации пучка, поэтому его определению посвящён ряд работ [13, 14].

В данной работе исследуется Гауссов пучок с несколькими единичными фазовыми сингулярностями, расположенными равномерно на окружности. Получены точные выражения для некоторых его интегральных характеристик, а именно для мощности, ОУМ, а также ТЗ. Картина интенсивности такого пучка представляет собой большое световое пятно с набором теневых пятен внутри, по числу которых пучок может быть идентифицирован. Проведено моделирование распространения таких пучков в среде со случайными неоднородностями (с помощью экрана со случайной фазой).

### **1. Мощность, орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с фазовыми сингулярностями, расположенными на окружности**

В [15] было получено выражение для Гауссова пучка с множественными оптическими вихрями. Если

$m$  фазовых сингулярностей расположены в точках с координатами  $(a_p, b_p)$  ( $p=0, \dots, m-1$ ), то комплексная амплитуда такого пучка имеет вид:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \times \exp \left( -\frac{r^2}{\sigma w_0^2} \right) \prod_{p=0}^{m-1} \left( \frac{r e^{i\varphi}}{\sigma} - a_p - i b_p \right), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $w_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $\sigma = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw_0^2/2$  – расстояние Рэлея ( $k$  – волновое число). Из (1) следует, что пучок (1) структурно устойчив и поперечное распределение фазы при распространении сохраняется с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси.

Далее ограничимся случаем, когда все фазовые сингулярности расположены равномерно на окружности радиуса  $a$ , то есть в точках с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi_p, \\ y = a \sin \varphi_p, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi_p = 2\pi p/m$ ,  $p=0, \dots, m-1$ . Выписав в явном виде выражения (1) для нескольких небольших значений  $m$  с учётом (2), можно предположить и доказать методом математической индукции, что для произвольного количества вихрей  $m$  комплексная амплитуда (1) равна:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp \left( -\frac{r^2}{\sigma w_0^2} \right) \left( \frac{r^m e^{im\varphi}}{\sigma^m} - a^m \right). \quad (3)$$

Чтобы убедиться в верности выражения (3) при любом  $m$ , надо доказать, что, во-первых, в начальной плоскости в точках (2) будет нулевая амплитуда, и, во-вторых, пучок (3) удовлетворяет парааксиальному уравнению распространения.

Равенство нулю комплексной амплитуды в точках (2) доказывается тривиально, поскольку полярные координаты точек (2) равны  $r=a$  и  $\varphi=2\pi p/m$ . При подстановке этих значений в (3) выражение в круглых скобках при  $z=0$  (то есть  $\sigma=1$ ) обращается в нуль.

То, что пучок (3) удовлетворяет парааксиальному уравнению распространения, следует из того, что он является суперпозицией пучка Лагерра–Гаусса с нулевым радиальным индексом и Гауссова пучка, которые являются решением парааксиального уравнения распространения.

Из (3) видно, что соосная суперпозиция пучка Лагерра–Гаусса с нулевым радиальным индексом и Гауссова пучка приводит к расщеплению оптического вихря  $m$ -го порядка на  $m$  вихрей первого порядка, центры которых расположены равномерно на окружности, радиус которой пропорционален амплитуде Гауссова пучка [16]. Возникновение вихрей на

окружностях ранее замечено также и для суперпозиций оптических вихрей с дробным топологическим зарядом [17].

Таким образом, ТЗ пучка Лагерра–Гаусса можно определять при интерференции с пучком Гаусса простым подсчётом количества нулей в распределении интенсивности. Заметим, что независимо от количества нулей все они расположены на окружности радиуса  $r_0 = a|\sigma| = a[1 + (z/z_0)^2]^{1/2}$ . Это означает, что если использовать осесимметричные вихревые пучки, то с ростом их ТЗ для их идентифицирования требуется регистрировать более широкое световое поле (так как растёт радиус светового кольца), а при использовании пучка (3) достаточно, чтобы на зарегистрированном распределении интенсивности поместились нули, расположенные на окружности радиуса  $r_0$ , который не зависит от количества вихрей в пучке.

Далее найдём мощность  $W$  и ОУМ  $J_z$  пучка (3). Они вычисляются по стандартным формулам:

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E|^2 r dr d\varphi, \quad (4)$$

$$J_z = -i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r dr d\varphi, \quad (5)$$

где распределение комплексной амплитуды  $E(r, \varphi, z)$  может быть взято в любой поперечной плоскости.

Подставляя комплексную амплитуду (3) в формулы (4) и (5), получим (см. Приложения А и В):

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \left[ m! + \left( \frac{2a^2}{w_0^2} \right)^m \right], \quad (6)$$

$$J_z = m \frac{\pi w_0^2}{2} m!. \quad (7)$$

Разделив (7) на (6), получим значение ОУМ, нормированное на мощность пучка:

$$\frac{J_z}{W} = m \frac{m!}{m! + (2a^2/w_0^2)^m}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что нормированный ОУМ не может превышать число оптических вихрей в пучке и убывает до нуля с удалением вихрей от оптической оси.

Наряду с ОУМ, вихревое поведение пучка характеризуется топологическим зарядом. В [18] приведена формула для топологического заряда вихревого светового поля (силы вихря):

$$S = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\arg E(r, \varphi, z)] d\varphi. \quad (9)$$

Заметим, что в отличие от ОУМ топологический заряд всегда является целым числом, характеризующим совокупность всех оптических вихрей в составном пучке. В частности, это показано для пучков, ис-

кажённных возмущённой СФП [18] или голографической решёткой [19].

Перепишем формулу (9) в более удобном виде:

$$S = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varphi} d\varphi \right\}. \quad (10)$$

Подставив в (10) комплексную амплитуду (3), получим:

$$S = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{im\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi}}{\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi} - a^m} d\varphi \right\}. \quad (11)$$

Так как при  $r \rightarrow \infty$  слагаемым  $a^m$  в знаменателе можно пренебречь, получаем, что ТЗ пучка (3) не зависит от пройденного расстояния  $z$  и от радиуса  $a$  окружности, на которой расположены оптические вихри, а равен числу оптических вихрей в пучке:

$$S = m. \quad (12)$$

Из (12) видно, что в отличие от ОУМ топологический заряд остаётся неизменным с расстоянием  $a$  и равен количеству вихрей.

## 2. Численное моделирование распространения в случайной среде

Если использовать в качестве носителей информации традиционные осесимметричные оптические вихри (например, одиночные невозмущённые пучки Лагерра–Гаусса или Бесселя–Гаусса), то их распределение интенсивности состоит из концентрических световых колец. Радиусы этих колец разные для разных топологических зарядов и можно определить ТЗ, например, просто измеряя радиус самого яркого кольца. Однако после прохождения через случайную среду это кольцо искажается и потому определение ТЗ по его радиусу затруднительно. Поэтому практический интерес представляют также световые пучки без осевой симметрии. Так, в [20] в качестве такого пучка рассмотрены суперпозиции двух Гауссовых пучков, прошедших через СФП с разным топологическим зарядом. Вместо кольца, распределение интенсивности состоит из световых пятен, число которых равно модулю разности топологических зарядов. В данной работе аналогично рассмотрим пучки (3), в сечении интенсивности которых имеется  $m$  пятен, но не светлых, а тёмных (с нулевой интенсивностью в центре пятна).

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы пучков (3) в начальной плоскости, а также после распространения в свободном пространстве со случайными искажениями. Случайная среда заменена на диффузор со случайной фазой  $\Psi(x, y)$ , помещённый в начальной плоскости. Корреляционная функция этого диффузора аппроксимировалась в виде Гауссовой экспоненты:

$$\langle \exp(i\Psi(x, y) - i\Psi(x', y')) \rangle = \exp \left[ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\sigma^2} \right], \quad (13)$$

где  $\sigma$  – радиус корреляции однородного фазового диффузора, угловые скобки в (13) означают усреднение по ансамблю статистически подобных фазовых диффузоров. Таким образом, поля, показанные на рис. 1, рассчитаны с помощью преобразования Фурье:

$$E(x, y, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x', y') \exp[i\Psi(x', y')] \times \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x'-x)^2 + (y'-y)^2] \right\} dx' dy', \quad (14)$$

где  $z$  – пройденное световым пучком расстояние,  $E_0(x', y')$  – распределение комплексной амплитуды (3) в начальной плоскости (то есть при  $z=0$ ).

Использовались следующие параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 1,55$  мкм (при такой длине волны свет в летних условиях на средних широтах пропускается примерно на 70%, и в то же время эта длина волны широко используется в телекоммуникациях), радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 1,5$  мм, расстояние распространения  $z = 2$  м, количество вихрей с единичным топологическим зарядом в пучке  $m = 3$ , расстояния от оптической оси до центров вихрей  $a = 0,7w_0$  (при таком расстоянии на картине интенсивности все три нуля не сливаются и отчётливо различимы), радиус корреляции диффузора  $\sigma = 50$  мкм. Фаза на диффузоре варьировалась в интервалах  $[-\pi/6, \pi/6]$  (рис. 1в-д),  $[-\pi/2, \pi/2]$  (рис. 1е-з),  $[-\pi, \pi]$  (рис. 1и-л). На всех рисунках показана область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 5$  мм.

Из рис. 1 видно, что, даже несмотря на существенные фазовые искажения (рис. 1и), на распределении интенсивности (рис. 1к) присутствуют три тёмных пятна вокруг центра картины, а на распределении фазы (рис. 1л) видны три точки фазовой сингулярности.

На рис. 2 показан пучок с рис. 1е-з, но для других радиусов корреляции  $\sigma$  фазового диффузора.

Из рис. 2 видно, что при  $\sigma = 100$  мкм нули интенсивности ещё различимы, но при  $\sigma = 150$  мкм и  $\sigma = 250$  мкм они сливаются, и определение их количества затруднено.

На рис. 3 показаны распределения интенсивности пучка (3) для разного количества оптических вихрей в пучке и разной вариации случайной фазы на диффузоре. Параметры расчёта те же, что и на рис. 1, но число вихрей равно  $m = 2$  (рис. 3а, б),  $m = 3$  (рис. 3в, г),  $m = 4$  (рис. 3д, е),  $m = 5$  (рис. 3ж, з). При этом расстояние от оптической оси до центров вихрей составляло  $a = 0,55w_0$  (рис. 3а, б),  $a = 0,7w_0$  (рис. 3в, г),  $a = 0,85w_0$  (рис. 3д, е),  $a = w_0$  (рис. 3ж, з). Фаза на диффузоре ва-

рьюровалась в интервалах  $[-\pi/2, \pi/2]$  (рис. 3а, в, д, ж) и  $[-\pi, \pi]$  (рис. 3б, г, е, з).

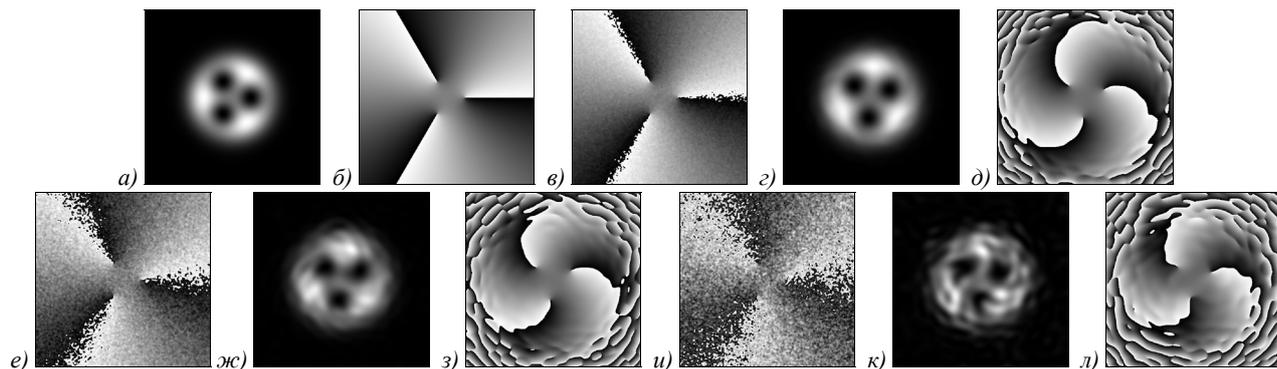


Рис. 1. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) пучка (3) с  $m=3$  в начальной плоскости, распределения фаз после прохождения через случайный фазовый диффузор (в, е, и), распределения интенсивности (г, ж, к) и фазы (д, з, л) после распространения в свободном пространстве.

Случайная фаза на диффузоре варьировалась в интервалах  $[-\pi/6, \pi/6]$  (в-д),  $[-\pi/2, \pi/2]$  (е-з),  $[-\pi, \pi]$  (и-л)

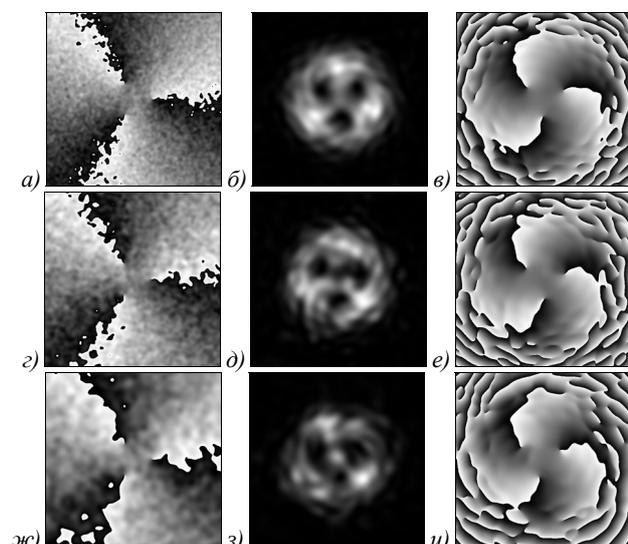


Рис. 2. Распределения фаз после прохождения через случайный фазовый диффузор (а, г, ж), распределения интенсивности (б, д, з) и фазы (в, е, и) после распространения в свободном пространстве. Случайная фаза на диффузоре варьировалась в интервале  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Радиус корреляции на диффузоре равен 100 мкм (а-в), 150 мкм (г-е) и 250 мкм (ж-и)

Из рис. 3 видно, что при вариации фазы на случайном диффузоре от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  нули интенсивности отчётливо видны, но при вариации фазы  $-\pi$  до  $\pi$  при  $m > 2$  их различить сложнее.

Кроме распределения интенсивности, был рассчитан ОУМ. Значения ОУМ после прохождения через случайный фазовый диффузор и распространения в свободном пространстве приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что если фаза на диффузоре варьируется от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , то ОУМ отличается от теоретического значения не более, чем на 12%. Более того, ошибка в 12% встретилась при моделировании только при  $m=3$ , в то время как в остальных случаях ошибка не превышала 5%. Отметим также, что при большем радиусе корреляции, когда дифракционная картина искажена и нули интенсивности трудно сосчитать

(рис. 2д, з), нормированный ОУМ всё равно оказался близок к теоретическому значению 2,59 (2,49 на рис. 2д, ошибка 4%, и 2,56 на рис. 2з, ошибка 1%).

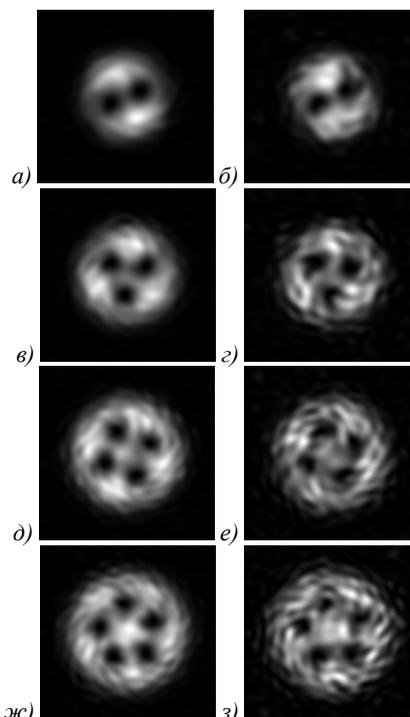


Рис. 3. Распределения интенсивности пучка (3) на расстоянии  $z=2$  м для разного количества оптических вихрей в пучке и для разной вариации случайной фазы на диффузоре

### Заключение

В работе исследованы интегральные характеристики Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями, расположенными на окружности. Получены выражения для мощности такого пучка, его ОУМ и ТЗ. Показано, что нормированный ОУМ меньше числа вихрей в пучке, причём эта величина убывает с расстоянием от оптической оси до центров вихрей. Также показано, что ТЗ, напротив, не зависит от этого расстояния и равен числу вихрей.

Табл. 1. Нормированный ОУМ пучка (3) после прохождения через случайный диффузор и распространения в свободном пространстве для разного количества вихрей в пучке ( $m$ ) и для разной вариации фазы в случайном диффузоре (СКО), рассчитанный теоретически по формуле (8) и численно по формулам (4), (5)

	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
ОУМ (теор.)	1,69	2,59	3,39	3,95
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi/6$ до $\pi/6$	1,64	2,52	3,31	3,85
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (3%)	1,64	2,28 (12%)	3,23 (5%)	3,78 (4%)
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi$ до $\pi$	1,14	2,17	2,75	2,42

С помощью преобразования Френеля проведено численное моделирование распространения Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями после его искажения фазовым случайным экраном (диффузором) с корреляционной функцией в виде Гауссовой экспоненты. При умеренных вариациях фазы на диффузоре (от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ ) на рассчитанных распределениях видны локальные минимумы интенсивности (центры оптических вихрей). При этом ошибка ОУМ от теоретического значения составила не более 12% для  $m=2$  и не более 5% для других значений  $m$ . Таким образом, ОУМ может, наряду с количеством тёмных пятен, быть использован для идентификации пучка.

Рассмотренные пучки могут являться альтернативой традиционным осесимметричным оптическим вихрям при оптической передаче информации в силу простоты идентификации оптического вихря по числу локальных минимумов интенсивности в Гауссовом пучке.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003, в части «Мощность, орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с фазовыми сингулярностями, расположенными на окружности», и грант 18-07-01129, в частях «Приложение А. Вывод формулы для мощности пучка» и «Приложение В. Вывод формулы для ОУМ пучка»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Численное моделирование распространения в случайной среде».

### Литература

1. **Krenn, M.** Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2014. – Vol. 16. – 113028. – DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028.
2. **Durnin, J.** Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1987. – Vol. 4. – P. 651-654. – DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.

3. **Васильев, В.С.** Распространение пучков Бесселя и суперпозиций вихревых пучков в атмосфере / В.С. Васильев, А.И. Капустин, Р.В. Скиданов, Н.А. Ивлиев, В.В. Подлипов, С.В. Ганчевская // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 376-384. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.
4. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – Sausalito, CA: University Science Books, 1986.
5. **Wang, F.** Average intensity and spreading of partially coherent standard and elegant Laguerre-Gaussian beams in turbulent atmosphere / F. Wang, Y. Cai, H.T. Eyyuboglu, Y. Baykal // *Progress in Electromagnetics Research*. – 2010. – Vol. 103. – P. 33-55. – DOI: 10.2528/PIER10021901.
6. **Chen, Y.** Experimental demonstration of a Laguerre-Gaussian correlated Schell-model vortex beam / Y. Chen, F. Wang, C. Zhao, Y. Cai // *Optics Express* – 2014. – Vol. 22, Issue 5. – P. 5826-5838. – DOI: 10.1364/OE.22.005826.
7. **Lukin, V.P.** Beam spreading of vortex beams propagating in turbulent atmosphere / V.P. Lukin, P.A. Konyaev, V.A. Sennikov // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51, Issue 10. – P. C84-C87. – DOI: 10.1364/AO.51.000C84.
8. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64. – P. 491-495. – DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
9. **Zhu, K.** Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere / K. Zhu, G. Zhou, X. Li, X. Zheng, H. Tang // *Optics Express*. – 2008. – Vol. 16, Issue 26. – P. 21315-21320. – DOI: 10.1364/OE.16.021315.
10. **Avramov-Zamurovic, S.** Experimental study of electromagnetic Bessel-Gaussian schell model beams propagating in a turbulent channel / S. Avramov-Zamurovic, C. Nelson, S. Guth, O. Korotkova, R. Malek-Madani // *Optics Communications*. – 2016. – Vol. 359. – P. 207-215. – DOI: 10.1016/j.optcom.2015.09.078.
11. **Lukin, I.P.** Integral momenta of vortex Bessel-Gaussian beams in turbulent atmosphere / I.P. Lukin // *Applied Optics*. – 2016. – Vol. 55, Issue 12. – P. B61-B66. – DOI: 10.1364/AO.55.000B61.
12. **Wang, L.G.** The effect of atmospheric turbulence on the propagation properties of optical vortices formed by using coherent laser beam arrays / L.G. Wang, W.W. Zheng // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2009. – Vol. 11, Issue 6. – 065703. – DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065703.
13. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
14. **Kotlyar, V.V.** Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 8. – P. 11236-11251. – DOI: 10.1364/OE.27.011236.
15. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87. – DOI: 10.1080/09500349314550101.
16. **Dennis, M.** Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam / M. Dennis // *Optics Letters*. – 2006. – Vol. 31, Issue 9. – P. 1325-1327. – DOI: 10.1364/OL.31.001325.
17. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Ya.A. Egorov, A.V. Volyar // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96. – 063807. – DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
18. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics*.

- tics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6. – P. 259-268. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
19. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Y. Akimova, Y. Egorov // Journal of the Optical Society of America A. – 2019. – Vol. 36. – P. 1064-1071. – DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
20. **Котляр, В.В.** Топологическая стабильность оптических вихрей при дифракции на случайном фазовом экране / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 917-925. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
21. **Abramovitz, M.** Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables / ed. by M. Abramovitz, I.A. Stegun. – New York: Dover Publications, Inc., 1965. – 1046 p.

### Приложение А.

#### Вывод формулы для мощности пучка

Если подставить комплексную амплитуду (3) в начальной плоскости ( $z=0$ ) в выражение (4) для мощности пучка, получим:

$$W = \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times (r^{2m} - 2a^m r^m \cos m\varphi + a^{2m}) r dr d\varphi. \quad (A1)$$

Интеграл от косинуса по угловой полярной координате  $\varphi$  даст ноль, а далее воспользуемся справочным интегралом (выражение 6.1.1 в [21]):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-pr^2) r^{2m} r dr &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-px) x^m dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-t) \left(\frac{t}{p}\right)^m \frac{dt}{p} = \frac{1}{2p^{m+1}} \Gamma(m+1), \end{aligned} \quad (A2)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

Тогда мощность примет вид:

$$\begin{aligned} W &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \left[ \frac{m!}{2(2/w_0^2)^{m+1}} + a^{2m} \frac{1}{2(2/w_0^2)} \right] = \\ &= \frac{\pi w_0^2}{2} \left[ m! + \left(\frac{2a^2}{w_0^2}\right)^m \right]. \end{aligned} \quad (A3)$$

### Приложение В.

#### Вывод формулы для ОУМ пучка

Аналогично, подставляя комплексную амплитуду (3) в начальной плоскости ( $z=0$ ) в выражение (5) для ОУМ пучка, получим:

$$\begin{aligned} J_z &= -i \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times \\ &\times (r^m e^{-im\varphi} - a^m) (imr^m e^{im\varphi}) r dr d\varphi = \\ &= m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times \\ &\times (r^{2m} - a^m r^m e^{im\varphi}) r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (B1)$$

Интеграл от  $e^{im\varphi}$  по угловой полярной координате  $\varphi$  отличен от нуля только при  $m=0$ . Но так как перед интегралом стоит множитель  $m$ , второе слагаемое в круглых скобках на интеграл не влияет. Поэтому ОУМ равен

$$J_z = 2\pi m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) r^{2m} r dr. \quad (B2)$$

Этот интеграл выражается через гамма-функцию (выражение 6.1.1 в [21]), которая, так как  $m$  – целое, сводится к факториалу (см. (A2)), и ОУМ имеет вид:

$$J_z = 2\pi m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^{2m} \frac{m!}{2(2/w_0^2)^{m+1}} = m \frac{\pi w_0^2}{2} m!. \quad (B3)$$

### Сведения об авторах

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** – см. Стр. 11 этого номера.

**Калинкина Дарья Сергеевна**, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика. В списке научных работ 6 статей. E-mail: [dskalinkina@gmail.com](mailto:dskalinkina@gmail.com).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 13 сентября 2019 г. Окончательный вариант – 31 октября 2019 г.

---

# Orbital angular momentum and topological charge of a Gaussian beam with multiple optical vortices

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, D.S. Kalinkina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

## Abstract

Here we study theoretically and numerically a Gaussian beam with multiple optical vortices with unitary topological charge (TC) of the same sign, located uniformly on a circle. Simple expressions are obtained for the Gaussian beam power, its orbital angular momentum (OAM), and TC. We show that the OAM normalized to the beam power cannot exceed the number of vortices in the beam. This OAM decreases with increasing distance from the optical axis to the centers of the vortices. The topological charge, on the contrary, is independent of this distance and equals the number of vortices. The numerical simulation corroborates that after passing through a random phase screen (diffuser) and propagating in free space, the beams of interest can be identified by the number of local intensity minima (shadow spots) and by the OAM.

**Keywords:** Gaussian beam, optical vortex, phase singularity, orbital angular momentum, topological charge, random screen, diffuser, scattering medium.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under projects 18-29-20003 (“Power, orbital angular momentum and topological charge of a Gaussian beam with phase singularities locates on a circle”) and 18-07-01129 (“Appendix A Derivation of the expression for the beam power” and “Appendix B Derivation of the expression for the beam OAM”) and by the RF Ministry of Science and Higher Education within the state project of FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (“Numerical simulation of propagation in a random medium”).

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS. Orbital angular momentum and topological charge of a Gaussian beam with multiple optical vortices. *Computer Optics* 2020; 44(1): 34-39. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-632.

## References

- [1] Krenn M, Fickler R, Fink M, Handsteiner J, Malik M, Scheidl T, Ursin R, Zeilinger A. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna. *New J Phys* 2014; 16: 113028. DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028.
  - [2] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J Opt Soc Am A* 1987; 4: 651-654. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
  - [3] Vasilyev VS, Kapustin AI, Skidanov RV, Podlipnov VV, Ivliev NA, Ganchevskaya SV. Experimental investigation of the stability of Bessel beams in the atmosphere. *Computer Optics* 2019; 43(3): 376-384. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.
  - [4] Siegman AE. *Lasers*. Sausalito, CA: University Science Books; 1986.
  - [5] Wang F, Cai Y, Eyyuboglu HT, Baykal Y. Average intensity and spreading of partially coherent standard and elegant Laguerre-Gaussian beams in turbulent atmosphere. *Prog Electromagn Res* 2010; 103: 33-55. DOI: 10.2528/PIER10021901.
  - [6] Chen Y, Wang F, Zhao C, Cai Y. Experimental demonstration of a Laguerre-Gaussian correlated Schell-model vortex beam. *Opt Express* 2014; 22(5): 5826-5838. DOI: 10.1364/OE.22.005826.
  - [7] Lukin VP, Konyaev PA, Sennikov VA. Beam spreading of vortex beams propagating in turbulent atmosphere. *Appl Opt* 2012; 51(10): C84-C87. DOI: 10.1364/AO.51.000C84.
  - [8] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64: 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
  - [9] Zhu K, Zhou G, Li X, Zheng X, Tang H. Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere. *Opt Express* 2008; 16(26): 21315-21320. DOI: 10.1364/OE.16.021315.
  - [10] Avramov-Zamurovic S, Nelson C, Guth S, Korotkova O, Malek-Madani R. Experimental study of electromagnetic Bessel-Gaussian Schell Model beams propagating in a turbulent channel. *Opt Commun* 2016; 359: 207-215. DOI: 10.1016/j.optcom.2015.09.078.
  - [11] Lukin IP. Integral momenta of vortex Bessel-Gaussian beams in turbulent atmosphere. *Appl Opt* 2016; 55(12): B61-B66. DOI: 10.1364/AO.55.000B61.
  - [12] Wang LG, Zheng WW. The effect of atmospheric turbulence on the propagation properties of optical vortices formed by using coherent laser beam arrays. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2009; 11(6): 065703. DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065703.
  - [13] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
  - [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments. *Opt Express* 2019; 27(8): 11236-11251. DOI: 10.1364/OE.27.011236.
  - [15] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87. DOI: 10.1080/09500349314550101.
  - [16] Dennis M. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt Lett* 2006; 31(9): 1325-1327. DOI: 10.1364/OL.31.001325.
  - [17] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices.
-

- 
- ces. Phys Rev A 2017; 96: 063807. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.063807.
- [18] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A: Pure Appl Opt 2004; 6: 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [19] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. J Opt Soc Am A 2019; 36: 1064-1071. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
- [20] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Topological stability of optical vortices diffracted by a random phase screen. Computer Optics 2019; 43(6): 917-925. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
- [21] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications Inc; 1979.
- 

#### *Author's information*

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Darya Sergeevna Kalinkina** (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering faculty. She is a postgraduate student of Technical Cybernetics department in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics. She is co-author of 6 scientific papers.

---

*Received September 13, 2019. The final version – October 31, 2019.*

---