

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ С ПОМОЩЬЮ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.П. Порфирьев^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

В работе теоретически и экспериментально показано, что если внести цилиндрическую линзу в лазерный пучок с оптическим вихрем с целым топологическим зарядом n и с нулем интенсивности на оптической оси, то на расстоянии за линзой, равном ее двойному фокусному расстоянию, n -кратно вырожденный ноль интенсивности разделяется на n изолированных нулей интенсивности, которые лежат на прямой в поперечной плоскости под углом плюс или минус 45 градусов к оси цилиндрической линзы в зависимости от направления спиральности оптического вихря (или от знака топологического заряда). Экспериментально показано, что таким методом можно определить топологический заряд с большим номером $n = 100$.

Ключевые слова: оптический вихрь, топологический заряд, цилиндрическая линза, астигматическое преобразование.

Цитирование: Котляр, В.В. Определение топологического заряда оптического вихря с помощью астигматического преобразования / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 781-792. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-781-792.

Введение

Оптические вихри или вихревые лазерные пучки с сингулярностью фазы, несущие орбитальный угловой момент, в настоящее время активно исследуются, так как их применяют при зондировании атмосферы в условиях турбулентности [1], в системах беспроводной связи [2], уплотнении каналов передачи информации по волокну [3], астрономии [4], квантовой информатике [5] и микроманипуляции [6].

Одним из важных вопросов сингулярной оптики является вопрос определения топологического заряда (ТЗ) оптического вихря. Первые работы, связанные с этим вопросом, рассматривали преобразования пучка Эрмита–Гаусса с помощью цилиндрической линзы в пучок Лагерра–Гаусса [7], формирование астигматического пучка Бесселя [8] и эллиптического пучка Лагерра–Гаусса [9]. Если в [7] с помощью астигматического преобразования цилиндрической линзы формировался оптический вихрь, то в [8–10], наоборот, оптический вихрь «разваливался» с помощью астигматических преобразований. В [10] для этого использовалась астигматическая линза, а в [8, 9] оптический вихрь подвергался астигматическому преобразованию путём наклона оптического элемента, который формирует этот оптический вихрь [11]. Укажем также на работы, которые посвящены оптическому измерению орбитального углового момента (ОУМ) светового поля. Так как световое поле может состоять из суперпозиции оптических вихрей с разными топологическими зарядами или иметь дробный топологический заряд, то в этом случае методы определения ТЗ не работают и следует напрямую измерять ОУМ. Измерению ОУМ с помощью многопорядковых дифракционных оптических элементов посвящены работы [12–14]. В этих работах оптические вихри с разным топологическим зарядом разделялись пространственно на несколько пучков. Если в исходном пучке присутствовал оптический вихрь с целым ТЗ, то на оси одного из дифракционных порядков была интенсивность отличная от нуля, если нет, то на оси этого порядка был ноль интенсивности. Этим способом также можно опре-

делить дробный ТЗ [15]. Известны и другие способы измерения ОУМ: с помощью набора отверстий в экране [16], дифракционной решётки с изменяющимся периодом [17], интерферометра [18], каскада интерферометров [19] или модового конвертора [20].

Перечисленные методы измерения ОУМ требуют достаточно сложной оптики: специальных оптических элементов или громоздких интерферометров. Если же целью является определение только целого ТЗ отдельного оптического вихря, то для этого известны более простые способы: с помощью узкой кольцевой апертуры [21], треугольной апертуры [22, 23], конического аксикона [24], регистрации интенсивности оптического вихря и вычисления Фурье-преобразования от интенсивности [25], квадратичного преобразования оптического вихря с помощью пространственного модулятора (SLM) [26], наклона сферической линзы [27, 28] и цилиндрической линзы [29, 30]. Заметим, что экспериментально с помощью указанных методов определены ТЗ оптических вихрей с небольшими номерами $n:1$ [29], 2 [28], 4 [25, 30], 5 [21, 24], 7 [22, 23], 10 [26], 14 [27].

В данной работе мы рассмотрим только простые методы определения ТЗ с помощью внесения в оптический вихрь астигматизма путём наклона освещающего пучка, наклона сферической линзы и внесения цилиндрической линзы. Причем все способы будут описаны теоретически и экспериментально. С помощью SLM будет показана возможность с цилиндрической линзой определить ТЗ с максимальным номером $n = 100$. Это на порядок больше, чем во всех ранее предложенных методах.

1. Определение целого топологического заряда с помощью внесения астигматизма

Пусть в Гауссов пучок

$$E_0(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \quad (1)$$

с единичной максимальной амплитудой и радиусом перетяжки w внедрён оптический вихрь с топологическим зарядом n :

$$T_n^+(x, y) = (x + iy)^n = \sum_{l=0}^n C_l x^l (iy)^{n-l}, \quad (2)$$

где $C_l = n!/k!(n-k)!$ – биномиальные коэффициенты. В эксперименте Гауссов пучок (1) падает на спиральную фазовую пластинку (СФП) с пропусканием [31]:

$$\bar{T}_n(x, y) = \frac{(x + iy)^n}{(x^2 + y^2)^{n/2}}. \quad (3)$$

Так как знаменатель в (3) не позволяет довести теоретический анализ до конечного явного аналитического результата, то в дальнейшем вместо (3) будем описывать оптический вихрь формулой (2). Такая замена позволит приближённо описать распределение интенсивности в плоскости наблюдения.

Далее для сравнения будут рассмотрены несколько способов определения топологического заряда n оптического вихря (2): с помощью внесения в пучок цилиндрической линзы, наклона сферической линзы, наклона СФП и освещения СФП эллиптическим Гауссовым пучком.

1.1. Определение ТЗ с помощью цилиндрической линзы

Пусть после СФП расположена цилиндрическая линза, ось которой совпадает с осью y :

$$t(x) = \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f}\right), \quad (4)$$

где k – волновое число света, f – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Заметим, что поворот цилиндрической линзы вокруг оптической оси на некоторый угол приводит только к повороту картины интенсивности в плоскости наблюдения на такой же угол. Комплексная амплитуда света на расстоянии z от СФП и цилиндрической линзы описывается преобразованием Френеля:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) T_n(x, y) t(x) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{ik}{z}(x\xi + y\eta)\right] dx dy. \quad (5)$$

Заметим, что в [30] дальше выражения (5) не пошли. Подставляя в (5) выражения (1), (2) и (4), получим:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \times \sum_{l=0}^n C_l i^{n-l} \int_{-\infty}^{\infty} x^l e^{-px^2 - rx} dx \int_{-\infty}^{\infty} y^{n-l} e^{-sx^2 - dx} dx, \quad (6)$$

где

$$p = \frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2f} - \frac{ik}{2z}, r = \frac{ik\xi}{z}, s = \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2z}, d = \frac{ik\eta}{z}.$$

Для вычисления интегралов (6) воспользуемся справочным интегралом [32] (выражение 2.3.15.10):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-Ax^2 - Bx} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{i}{2}\right)^m A^{-(m+1)/2} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right) H_m\left(\frac{iB}{2\sqrt{A}}\right), \quad (7)$$

где $H_m(x)$ – многочлен Эрмита. Тогда вместо (6) получим:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2z}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{w^2}{qq_0}\right) \left(\frac{w}{q_0}\right)^n \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{z_0\xi}{zwq}\right)^2 - \left(\frac{z_0\eta}{zwq_0}\right)^2\right] \times \sum_{l=0}^n C_l \left(\frac{-iq_0}{q}\right)^l H_l\left(-\frac{z_0\xi}{zwq}\right) H_{n-l}\left(-\frac{z_0\eta}{zwq_0}\right), \quad (8)$$

где

$$z_0 = \frac{kw^2}{2}, q_0^2 = 1 - \frac{iz_0}{z}, q^2 = 1 + \frac{iz_0}{z_1}, z_1 = \frac{zf}{z-f}, \quad (9)$$

z_0 – длина Рэлея. Сумму в (8) можно вычислить, воспользовавшись справочным выражением [33] (выражение 4.5.2.3):

$$\sum_{l=0}^n C_l v^l H_l(X) H_{n-l}(Y) = (1+v^2)^{n/2} H_n\left(\frac{vX+Y}{\sqrt{1+v^2}}\right). \quad (10)$$

Тогда вместо (8) получим:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-iz_0}{z}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{qq_0}\right) \left(\frac{w}{q_0}\right)^n \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{z_0\xi}{zwq}\right)^2 - \left(\frac{z_0\eta}{zwq_0}\right)^2\right] \times \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right)^{n/2} H_n\left[\frac{\left(\frac{z_0}{wz}\right)\left(\frac{iq_0\xi - q\eta}{q q_0}\right)}{\sqrt{q^2 - q_0^2}}\right]. \quad (11)$$

Чтобы найти нули многочлена Эрмита $H_n(F)$ в (11), выпишем его аргумент F более подробно:

$$F = e^{-i\pi/4 + i\pi/2} \frac{\sqrt{z_0 f}}{wz} \frac{\xi\left(1 - i\frac{z_0}{z}\right) + i\eta\left(1 + i\frac{z_0}{z_1}\right)}{\sqrt{\left(1 - i\frac{z_0}{z}\right)\left(1 + i\frac{z_0}{z_1}\right)}}. \quad (12)$$

Аргумент многочлена Эрмита в (12) существенно упростится, если положить плоскость наблюдения на расстоянии $z = 2f$:

$$F = e^{-i\pi/4+i\pi/2} \frac{\sqrt{z_0 f}}{2wf} \left[\frac{\xi \left(1 - i \frac{z_0}{2f}\right) + i\eta \left(1 + i \frac{z_0}{2f}\right)}{\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{4f^2}}} \right]. \quad (13)$$

Приравнивая действительную часть выражения в аргументе многочлена Эрмита (13) значению корня γ_n , $H_n(\gamma_n) = 0$, а мнимую часть – нулю, получим, что корни многочлена Эрмита (13) должны лежать на биссектрисе второго и четвертого квадрантов ($\eta = -\xi$) и координаты этих корней равны:

$$\xi_n = -\eta_n = 2\gamma_n \sqrt{\frac{f}{k} \left(\frac{\sqrt{4f^2 + z_0^2}}{2f + z_0} \right)}. \quad (14)$$

При смещении с биссектрисы ($\eta = -\xi$, $z = 2f$) корни многочлена Эрмита становятся комплексными, то есть вместо нулей интенсивности поля (11) появляются минимумы интенсивности. Число локальных нулей интенсивности с координатами (14) точно равно топологическому заряду n оптического вихря (2) или (3). Если изменить знак топологического вихря (2) на противоположный:

$$T_n^-(x, y) = (x - iy)^n = \sum_{l=0}^n C_l x^l (-iy)^{n-l}, \quad (15)$$

то можно показать, что нули интенсивности будут лежать на биссектрисе первого и третьего квадрантов ($\eta = \xi$, $z = 2f$), и их координаты будут равны:

$$\xi_n = \eta_n = 2\gamma_n \sqrt{\frac{f}{k} \left(\frac{\sqrt{4f^2 + z_0^2}}{2f + z_0} \right)}. \quad (16)$$

Если выбрать другую плоскость наблюдения при произвольном z , то можно показать, что действительные нули многочлена (12) будут лежать на прямой, которая проходит через начало координат и повернута на угол α по отношению к горизонтальной оси ξ :

$$\text{tg } \alpha = - \frac{\cos(\Psi - \pi/4) - \frac{z_0}{z} \cos(\Psi + \pi/4)}{\cos(\Psi + \pi/4) - \frac{z_0}{z_1} \cos(\Psi - \pi/4)}, \quad (17)$$

где

$$\Psi = \frac{1}{2} \left(\text{arctg } \frac{z_0}{z} - \text{arctg } \frac{z_0}{z_1} \right). \quad (18)$$

Из (17) и (18) видно, что при $z = z_1 = 2f$ получим $\Psi = 0$ и $\text{tg } \alpha = -1$. То есть из (17) следует (14).

Формула для комплексной амплитуды упрощается, если вместо Гауссова пучка (1) нормально осветить СФП (2) или (3) плоской волной с единичной амплитудой. Тогда вместо (11) получим ($w \rightarrow \infty$):

$$E_{1n}(\xi, \eta, z) = (-1)^n e^{i\pi n/4} \left(\frac{z}{2k} \right)^{n/2} \times \left(\frac{f}{z-f} \right)^{1/2} \left(\frac{z}{z-f} \right)^{n/2} \exp \left[\frac{ik\xi^2}{2(z-f)} \right] \times \times H_n \left[e^{-i\pi/4} \frac{1}{z} \sqrt{\frac{k(z-f)}{2}} \left(\frac{f\xi}{z-f} - i\eta \right) \right]. \quad (19)$$

Заметим, что при замене Гауссова пучка на плоскую волну интеграл (5) не обладает абсолютной сходимостью. Однако непосредственная подстановка функции (19) в параксиальное уравнение Гельмгольца $[2ik\partial/\partial z + \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2]E(\xi, \eta, z) = 0$ приводит к верному тождеству.

Приравнивая в аргументе многочлена Эрмита в (19) реальную часть значению корня многочлена Эрмита γ_n , $H_n(\gamma_n) = 0$, а мнимую часть – нулю, получим:

$$\begin{cases} \xi_n = \left(\frac{z}{f} \right) \sqrt{\frac{z-f}{k}} \gamma_n, & z > f, \\ \eta = - \left(\frac{f}{z-f} \right) \xi. \end{cases} \quad (20)$$

Из (20) следует, что наклон прямой, на которой лежат действительные n нулей комплексной амплитуды (19), равен:

$$\text{tg } \alpha = - \frac{f}{z-f}. \quad (21)$$

При выборе $z = 2f$ опять получается, что угол наклона прямой, на которой лежат нули (19), равен – 45 градусов, а сами нули многочлена Эрмита имеют координаты:

$$\xi_n = -\eta_n = 2\gamma_n \sqrt{f/k}. \quad (22)$$

Выражение (22) также следует из (14), если положить, что $w \rightarrow \infty$ или $z_0 \rightarrow \infty$.

Таким образом, в подпараграфе показано теоретически, что при внесении цилиндрической линзы в лазерный пучок с оптическим вихрем с целым топологическим зарядом n и с нулем интенсивности на оптической оси на расстоянии за линзой, равном двойному фокусному расстоянию, n -кратно вырожденный ноль интенсивности разделяется на n нулей интенсивности первого порядка, которые лежат на прямой под углом +45 или – 45 градусов к оси цилиндрической линзы в зависимости от направления спиральности оптического вихря (или от знака топологического заряда).

1.2. Определение ТЗ

с помощью наклона сферической линзы

В этом подпараграфе показано, что для определения ТЗ вместо цилиндрической линзы можно использовать наклон сферической линзы. Теоретически этот способ определения ТЗ был рассмотрен в [27]. Но в [27] полученный результат не был проанализирован и

не было показано, что нули лежат на прямой под углом к горизонтальной оси и что этот угол зависит от расстояния z . Пусть сферическая линза располагается после Гауссова пучка (1) и оптического вихря (2) и повернута относительно оси y на угол β . В приближении тонкой сферической линзы поворот на небольшой угол эквивалентен увеличению фазовой задержки внутри линзы в плоскости (x, z) и, значит, уменьшению фокусного расстояния только по оси x : $f_1 = f \cos \beta$. Тогда пропускание наклонённой сферической линзы можно записать:

$$t_2(x, y) = \exp\left(-\frac{ikx^2}{2f_1} - \frac{iky^2}{2f}\right), \quad f_1 = f \cos \beta. \quad (23)$$

Из вида функции пропускания (23) следует, что наклон сферической линзы эквивалентен использованию двух скрещенных цилиндрических линз с разными фокусами. Для простоты вместо Гауссова пучка будем использовать плоскую волну с оптическим вихрем (2) на оптической оси. Тогда, аналогично (5), для комплексной амплитуды света за наклонной сферической линзой (23) можно записать выражение:

$$E_{2n}(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_n^+(x, y) t_2(x, y) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{ik}{z}(x\xi + y\eta)\right] dx dy. \quad (24)$$

Интегралы (24) можно точно вычислить, используя (7) и (10). Тогда вместо (24) получим:

$$E_{2n}(\xi, \eta, z) = -\left(\frac{z_1 z_2}{z^2}\right)^{1/2} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{-2iz_1}{k}\right)^{n/2} \times \exp\left[\frac{ik\xi^2}{2z}\left(1 + \frac{z_2}{z}\right)\right] \exp\left[\frac{ik\eta^2}{2z}\left(1 + \frac{z_1}{z}\right)\right] \times \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{n/2} H_n\left[\frac{e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2z}} (i\xi z_2 - \eta z_1)}{\sqrt{z_1 - z_2}}\right], \quad (25)$$

где

$$z_1 = zf/(z-f), \quad z_2 = zf_1/(z-f_1). \quad (26)$$

Из (26) видно, что при $z_1 = z_2$ (наклона линзы нет) знаменатель в аргументе многочлена Эрмита стремится к бесконечности, а сам многочлен стремится к своему главному слагаемому степени n . В этом случае вместо многочлена Эрмита $H_n(x)$ остается только слагаемое x^n , и на оптической оси остается оптический вихрь (2). Также аргумент многочлена Эрмита стремится к бесконечности при $z=f$. Но если $z_1 \neq z_2$ (наклон линзы есть) и $z \neq f$, то аргумент многочлена Эрмита в (25) конечный и может иметь действительные нули. Приравнивая действительную часть аргумента многочлена Эрмита в (25) значению корня многочлена

Эрмита, а мнимую часть – нулю, получим, что действительные нули многочлена Эрмита должны лежать на прямой:

$$\eta = -\xi \frac{z_2}{z_1} = -\xi \frac{(z-f) \cos \beta}{z-f \cos \beta}. \quad (27)$$

Угол наклона этой прямой зависит как от расстояния до линзы z , так и от угла наклона сферической линзы β . При $z = 2f \cos \beta (1 + \cos \beta)^{-1} < f$ угол наклона прямой с нулями интенсивности равен 45 градусам.

Из предыдущего анализа можно предположить, что для определения ТЗ оптического вихря n можно применить любой способ внесения в оптический вихрь астигматизма. Например, вместо использования цилиндрической линзы или наклона сферической линзы можно создать эллиптический оптический вихрь с помощью наклона СФП или освещая СФП эллиптическим Гауссовым пучком. В следующих параграфах это будет показано.

1.3. Формирование эллиптического вихря наклоном СФП

Пусть плоская волна падает на СФП (2) или (3). При небольшом наклоне СФП под углом β в плоскости (x, z) по оси x увеличится набег фаз при прохождении через рельеф СФП и вместо (2) можно приближённо записать пропускание наклонной СФП в виде:

$$T_{1n}^+(x, y) = (\sigma x + iy)^n = \sum_{l=0}^n C_l (\sigma x)^l (iy)^{n-l}, \quad \sigma = (\cos \beta)^{-1}. \quad (28)$$

Из (28) видно, что наклон СФП приводит к формированию эллиптического вихря. Тогда на расстоянии z от наклонной СФП комплексную амплитуду света можно записать в виде:

$$E_{3n}(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{1n}^+(x, y) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{ik}{z}(x\xi + y\eta)\right] dx dy. \quad (29)$$

Заметим, что при освещении СФП Гауссовым пучком (1) получаются более реалистичные (так как интегралы в (29) будут конечными), но более громоздкие выражения. Хотя, чтобы показать, что на некотором расстоянии от СФП и на некоторой прямой в плоскости, перпендикулярной к оптической оси, будут находиться n нулей интенсивности, достаточно рассмотреть несобственные интегралы (29). Пользуясь справочными соотношениями (7) и (10), вместо (29) можно записать:

$$E_{3n}(\xi, \eta, z) = (-1/2)^n (-2iz/k)^{n/2} (1 - \sigma^2)^{n/2} \times H_n\left[(-e^{i\pi/4} \sqrt{k/2z} (i\xi\sigma + \eta))/\sqrt{1 - \sigma^2}\right]. \quad (30)$$

Как и (19), выражение (30) получено вычислением интеграла (29), не обладающего абсолютной сходимостью. Поэтому справедливость выражения (30) также была проверена подстановкой в параксиальное уравнение Гельмгольца.

В (30) многочлен Эрмита имеет комплексный аргумент. Приравнявая действительную часть аргумента к значению корня многочлена Эрмита γ_n , $H_n(\gamma_n) = 0$, а мнимую часть – нулю, получим выражения для прямой, на которой аргумент многочлена действительный, и для координат n нулей многочлена:

$$\begin{cases} \xi_n = \sqrt{z/k} (\gamma_n/\sigma), \\ \eta = -\sigma\xi, \quad \sigma = (\cos\beta)^{-1}. \end{cases} \quad (31)$$

Интересно, что в отличие от (20) и (27) наклон прямой, на которой лежат нули интенсивности светового поля, не меняется с расстоянием z . Это связано с тем, что неограниченный пучок всегда находится в дальней зоне и поэтому сохраняет свой вид, меняясь только масштабно. Из (30) следует, что при отсутствии наклона СФП ($\sigma = 1$) аргумент многочлена Эрмита стремится к бесконечности. При этом вместо многочлена Эрмита $H_n(x)$ остается только слагаемое x^n и на оптической оси остается оптический вихрь (2). Поэтому наклон линии нулей интенсивности всегда больше 45 градусов.

1.4. Освещение СФП эллиптическим Гауссовым пучком

Расщепить n -кратно вырожденный изолированный ноль интенсивности оптического вихря (2) на n нулей, лежащих на прямой, можно также с помощью освещения (2) или (3) эллиптическим Гауссовым пучком. Действительно, рассмотрим вместо (1) эллиптический Гауссов пучок:

$$E_{10}(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right), \quad (32)$$

где w_x и w_y – радиусы перетяжки Гауссова пучка по декартовым координатам. Тогда комплексная амплитуда света на расстоянии z после СФП будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E_{4n}(\xi, \eta, z) &= (-ik/2\pi z) \exp\left[(ik/2z)(\xi^2 + \eta^2)\right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{10}(x, y) T_n^+(x, y) \times \\ &\times \exp\left[(ik/2z)(x^2 + y^2) - (ik/z)(x\xi + y\eta)\right] dx dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Интегралы в (33), как и раньше, можно вычислить с помощью (7) и (10), тогда получим:

$$\begin{aligned} E_{4n}(\xi, \eta, z) &= \left(\frac{-ik}{2z}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{q_x q_y}\right) \left(\frac{1}{q_y}\right)^n \times \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{k\xi}{4zq_x}\right)^2 - \left(\frac{k\eta}{4zq_y}\right)^2\right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{q_y^2}{q_x^2}\right)^{n/2} H_n\left[\left(\frac{k}{2z}\right) \left(\frac{iq_y \xi}{q_x} - \frac{q_x \eta}{q_y}\right) / \sqrt{q_x^2 - q_y^2}\right], \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} z_{x0} &= kw_x^2/2, \quad z_{y0} = kw_y^2/2, \\ q_x^2 &= w_x^{-2} (1 - iz_{x0}/z), \quad q_y^2 = w_y^{-2} (1 - iz_{y0}/z). \end{aligned} \quad (35)$$

Выпишем подробнее аргумент F многочлена Эрмита в (34):

$$\begin{aligned} F &= k/(2\sqrt{z(z - iz_{x0})(z - iz_{y0})}) \times \\ &\times \left[i\xi(z - iz_{y0})w_x^2 - \eta(z - iz_{x0})w_y^2 \right] \times \\ &\times \left[w_y^2(z - iz_{x0}) - w_x^2(z - iz_{y0}) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) видно, что при $w_x = w_y$ знаменатель (36) стремится к нулю, а сам аргумент F – к бесконечности. При этом вместо многочлена Эрмита $H_n(x)$ остается только слагаемое x^n и на оптической оси остается оптический вихрь (2). Приравнявая мнимую часть аргумента F нулю, найдем уравнение прямой, на которой лежат n нулей интенсивности поля (34):

$$\begin{aligned} \eta &= -\xi \left[(z \cos A - z_{y0} \sin A) / (z \sin A + z_{x0} \cos A) \right], \\ A &= (-1/2) \left[\arctg(z_{x0}/z) + \arctg(z_{y0}/z) + \right. \\ &\left. + \arctg\left(\frac{w_y^2 z_{x0} - w_x^2 z_{y0}}{z(w_y^2 - w_x^2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) видно, что прямая, на которой расположены n нулей интенсивности, поворачивается вокруг оптической оси при изменении расстояния z от СФП. В дальней зоне ($z \gg z_{x0}, z_{y0}$) $A = 0$ и $\eta = -\xi z / z_{x0}$.

2. Эксперимент

2.1. Определение ТЗ при наклонном падении на СФП

На рис. 1 показана оптическая схема эксперимента. Диаметр пучка света, падающего на дисплей модулятора света, равен $R \approx 6$ мм, длина волны $\lambda = 532$ нм. Вместо наклона СФП удобнее наклонять падающий на неё лазерный пучок. Поэтому в экспериментах менялся угол падения на дисплей модулятора света. Были исследованы три угла падения: $\alpha = 15, 30$ и 45 градусов (угол отсчитывался от нормали к дисплею). При угле падения $\alpha = 15$ градусов уверенно определялись ТЗ $n < 2$. При угле падения $\alpha = 30$ градусов определялись ТЗ $n < 4$ и при угле падения $\alpha = 45$ градусов определялись ТЗ $n < 8$.

На рис. 2 показаны распределения интенсивности в фокусе сферической линзы L4 для разных топологических зарядов n от 1 до 8 при наклонном падении на СФП, записанную на SLM, под углом 45 градусов.

Из рис. 2 видно, что с ростом топологического заряда обнаружить уверенно нули интенсивности становится всё труднее.

На рис. 3 показаны распределения интенсивности, аналогичные картинам на рис. 2, но для некоторых оптических вихрей с отрицательными топологическими зарядами. Из рис. 3 видно, что наклон линии нулей теперь изменился по отношению к линиям нулей для оптических вихрей с положительным топологическим зарядом (рис. 2).

На рис. 4 показаны распределения интенсивности в фокусе сферической линзы при разных углах наклона падения пучка на СФП с ТЗ $n=2$. Согласно формуле (31) угол наклона линии нулей должен меняться от 45 до 90 градусов.

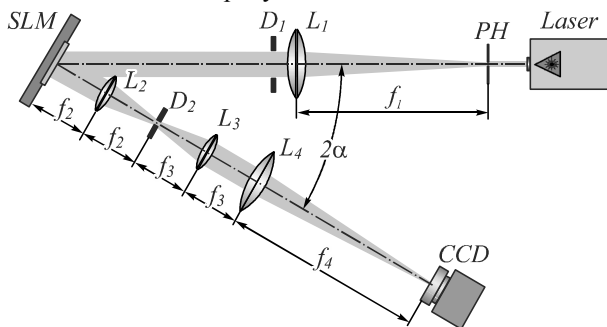


Рис. 1. Экспериментальная схема: Laser – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхолл, L_1, L_2, L_3 и L_4 – линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 150$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 500$ мм), SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя – 8 мкм), D – диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CCD – видеокамера LOMO TC-1000

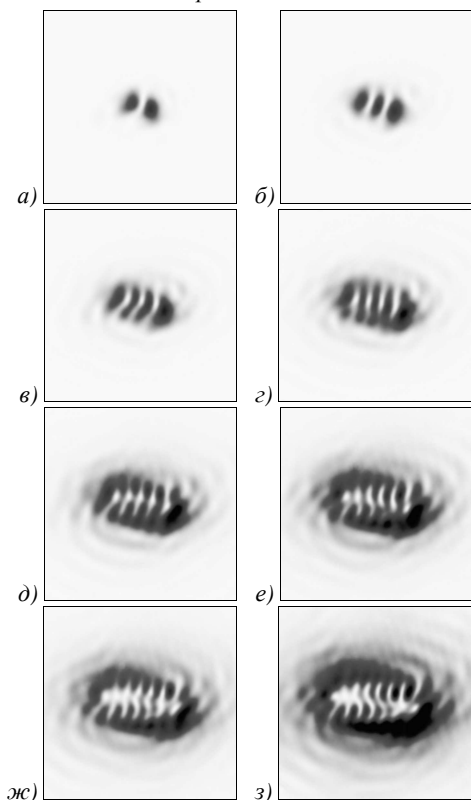


Рис. 2. Угол падения $\alpha = 45$ градусов.

Распределения интенсивности (негатив), сформированные СФП с $n: 1(a), 2(б), 3(в), 4(г), 5(д), 6(е), 7(ж), 8(з)$ в фокальной плоскости линзы L_4 с фокусным расстоянием 500 мм. Размеры картинок – 750×750 мкм

Из рис. 4 видно, что с увеличением угла наклона падающего на СФП пучка линия нулей стремится к горизонтальной линии, а сами нули интенсивности проявляются всё более отчётливо. В эксперименте рассматриваемая ситуация повернута на 90 градусов

по отношению к формуле (31) из-за разного выбора поперечных осей x, y .

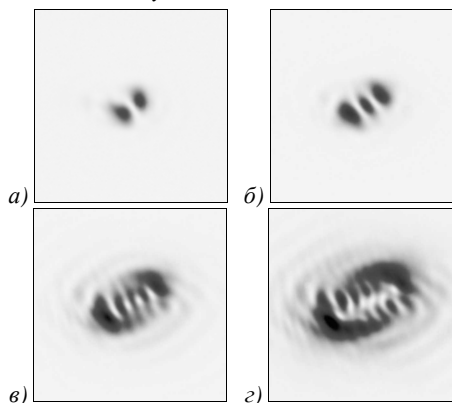


Рис. 3. Угол падения $\alpha = 45$ градусов.

Распределения интенсивности (негатив), сформированные СФП с $n: -1(a), -2(б), -4(в), -6(г)$ в фокальной плоскости линзы L_4 с фокусным расстоянием 500 мм.

Размеры картинок – 750×750 мкм

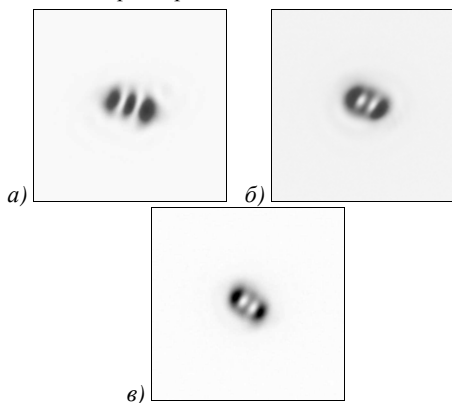


Рис. 4. Распределения интенсивности (негатив) в фокусе сферической линзы для СФП с топологическим зарядом $n = 2$ при освещении ее с наклоном от нормального на 45 (а), 30 (б) и 15 (в) градусов.

Размеры картинок – 750×750 мкм

Из приведённых примеров видно, что метод определения ТЗ с помощью наклона СФП или наклона падающего на СФП пучка ограничен номерами $n < 10$. Поэтому далее рассмотрим метод, в котором не надо ничего поворачивать и в котором определяемый ТЗ ограничивается только разрешением регистрирующего устройства.

2.2. Определение ТЗ

с помощью наклона сферической линзы

В этом подпараграфе мы вслед за работой [27] проведем определение ТЗ с помощью поворота сферической линзы, размещённой в лазерном пучке с оптическим вихрем. На рис. 5 показана схема эксперимента. Сферическая линза L_4 расположена на вращающейся платформе RM , которая позволяет изменять угол наклона линзы по отношению к оптической оси лазерного пучка.

В этом методе максимальный ТЗ, который может быть обнаружен, зависит от угла наклона линзы. На рис. 6 показаны максимальные ТЗ, которые можно уверенно обнаружить при разных углах наклона сферической линзы. Чем больше угол наклона лин-

зы, тем больший ТЗ можно определить. Например, при угле наклона в 15 градусов максимальный обнаруживаемый ТЗ равен $n = 10$ (рис. 6б), при угле наклона 30 градусов – максимальный ТЗ $n = 50$ (рис. 6з), при угле наклона 45 градусов – максимальный ТЗ $n = 100$ (рис. 6е).

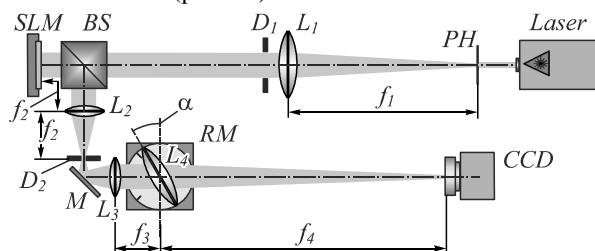


Рис. 5. Экспериментальная схема:

Laser – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхолл (размер отверстия – 40 мкм), L1, L2, L3 и L4 – линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 150$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 500$ мм), SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя – 8 мкм), BS – светоделительный кубик, D1 и D2 – диафрагмы, M – зеркало, RM – вращающаяся платформа, CCD – видеокамера LOMO TC-1000

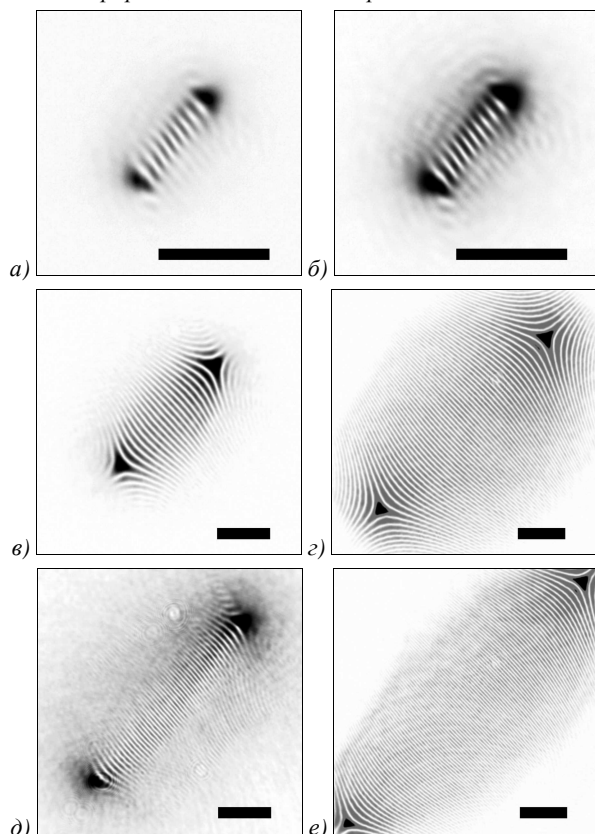


Рис. 6. Распределения интенсивности (негатив), сформированные СФП различного порядка n при фокусировке с использованием сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 500$ мм на расстоянии z , равном 475 мм (а,б), 400 мм (в,з) и 260 мм (д,е) от плоскости линзы. Угол наклона линзы α (град.) изменялся: $\alpha = 15$, $n = +9$ (а); $\alpha = 15$, $n = +10$ (б); $\alpha = 30$, $n = +20$ (в); $\alpha = 30$, $n = +50$ (з); $\alpha = 45$, $n = +50$ (д); $\alpha = 45$, $n = +100$ (е). Размер риски на изображениях – 500 мкм

В методе определения ТЗ с помощью наклона сферической линзы картины интенсивности имеют разный вид при одинаковом ТЗ и разных углах наклона. Так, на рис. 7 показаны распределения интенсивности на разных расстояниях от сферической линзы для оптического вихря, сформированного СФП с ТЗ $n = -6$ при разном угле наклона α . Из рис. 7 видно, все нули интенсивности лежат на прямой под углом -45 градусов (хотя углы наклона α и расстояние z от линзы разные). Заметим, что на рис. 6 все нули интенсивности также независимо от ТЗ $n > 0$, угла наклона α линзы и расстояния z от линзы лежат на прямой под углом $+45$ градусов.

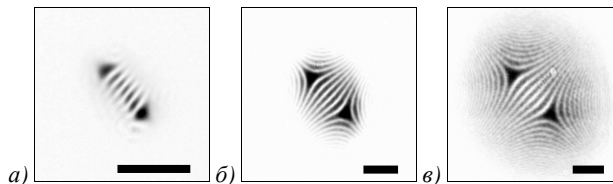


Рис. 7. Распределения интенсивности (негатив), сформированные СФП одного порядка $n = -6$ при фокусировке с использованием сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 500$ мм на расстоянии z , равном 475 мм (а), 400 мм (б) и 260 мм (в) от плоскости линзы. Угол наклона линзы α (град.) изменялся: $\alpha = 15$ (а); $\alpha = 30$ (б); $\alpha = 45$ (в). Размер риски на изображениях – 500 мкм

В следующем подпараграфе рассмотрен метод определения ТЗ с помощью цилиндрической линзы. Этот метод свободен от недостатков двух предыдущих экспериментальных методов, так как без какого-либо наклона линзы в этом методе можно уверенно определить ТЗ до $n = 100$. И, кроме того, в методе с цилиндрической линзой не надо менять расстояние до линзы, а все измерения надо проводить на двойном фокусном расстоянии от линзы.

2.3. Определение ТЗ с помощью цилиндрической линзы

На рис. 8 показана схема эксперимента, аналогичная схеме на рис. 1, но вместо сферической линзы L4 используется цилиндрическая линза L4 с фокусным расстоянием $f = 100$ мм.

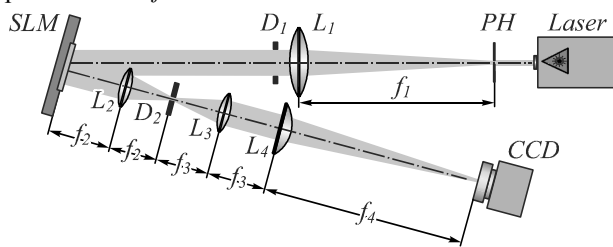


Рис. 8. Экспериментальная схема: L – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхолл (40 мкм), L1, L2, и L3 – сферические линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм), L4 – цилиндрическая линза с фокусным расстоянием $f_4 = 100$ мм, SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм), D – диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CCD – видеокамера TourTek U3CMOS08500KPA (размер пикселя – 1,67 мкм)

Аналогичная схема для астигматического преобразования вихревых пучков, сформированных дифракционными оптическими элементами, была исследована в работе [34].

На рис. 9 показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии $z = 2f = 200$ мм от цилиндрической линзы. В соответствии с (13) и (14) n нулей интенсивности лежат на прямой, под углом -45 градусов к горизонтальной оси. Из рис. 9 видно, что нули разрешаются вплоть до $n = 100$. На рис. 10 показана увеличенная картинка, показанная на рис. 9о, и видны все 100 нулей интенсивности.

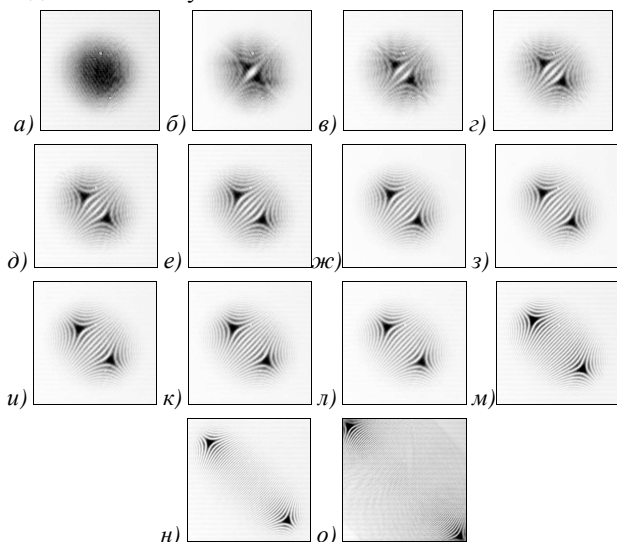


Рис. 9. Распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстоянии $z = 200$ мм с помощью СФП с порядком n : (а) 0, (б) +1, (в) +2, (г) +3, (д) +4, (е) +5, (ж) +6, (з) +7, (и) +8, (к) +9, (л) +10, (м) +20, (н) +50, (о) +100. Размеры картинок – 4200×4200 мкм

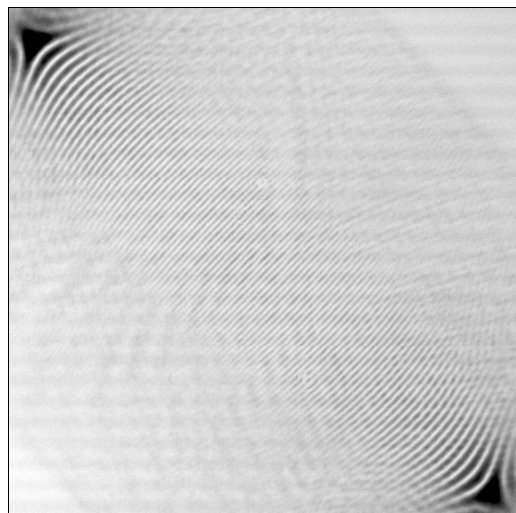


Рис. 10. Увеличенная картина интенсивности (негатив), показанная на рис. 9о ($n = 100$). Размер картинки – 4200×4200 мкм

На рис. 11 показаны распределения интенсивности для $n = 10$ при повороте цилиндрической линзы вокруг оптической оси на разные углы. Из рис. 11 видно, что картина интенсивности также поворачивается, следуя за поворотом цилиндрической линзы.

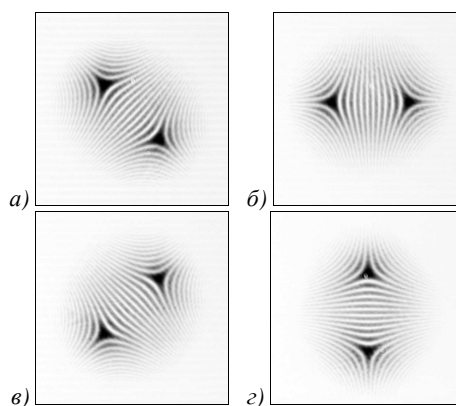


Рис. 11. Распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстоянии $z = 200$ мм с помощью СФП с порядком $n = +10$ при различных углах α (град.) поворота цилиндрической линзы относительно оси распространения пучка: (а) 0, (б) +45, (в) +90, (г) +135. Размеры картинок – 4200×4200 мкм

На рис. 12 показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы для нескольких оптических вихрей с отрицательным ТЗ. Из рис. 12 видно, что нули интенсивности лежат на прямой под углом $+45$ к горизонтальной оси в отличие от нулей на рис. 9, лежащих на прямой под углом -45 к горизонтальной оси (ось цилиндрической линзы лежит на горизонтальной оси).

Заметим, что наклон линий нулей для положительных и отрицательных ТЗ в методе с цилиндрической линзой (рис. 9 и 12) противоположный по отношению к методу с наклоном сферической линзы (рис. 6 и 7). Это связано с тем, что измерения интенсивности на рис. 6 и 7 проводились до фокуса сферической линзы ($z < f = 500$ мм), а измерения интенсивности на рис. 9 и 12 проводились после фокуса цилиндрической линзы ($z = 2f = 200$ мм). Это следует также из уравнения (20).

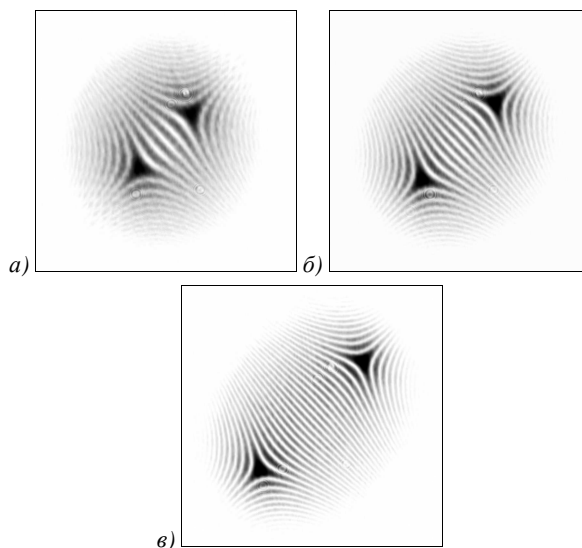


Рис. 12. Распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстоянии $z = 200$ мм с помощью СФП с порядком n : (а) -5, (б) -10, (в) -20. Размеры картинок – 4000×4000 мкм

На рис. 13 показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы для оптических вихрей с дробным топологическим зарядом. Из рис. 13 видно, как постепенно из 2 нулей интенсивности формируются 3 нуля интенсивности. Качественная методика определения дробного топологического заряда по картинкам на рис. 13 такая. Если имеется два нуля интенсивности на линии под углом -45° и по вертикальной линии есть «тёмный отрезок» (область пониженной интенсивности), который не касается линии нулей, то n от 2,1 до 2,5. Если на картине уже три нуля и «тёмный отрезок» касается третьего нуля, то n от 2,5 до 2,9. Если вертикальный «тёмный отрезок» на картине отсутствует, то топологический заряд целый.

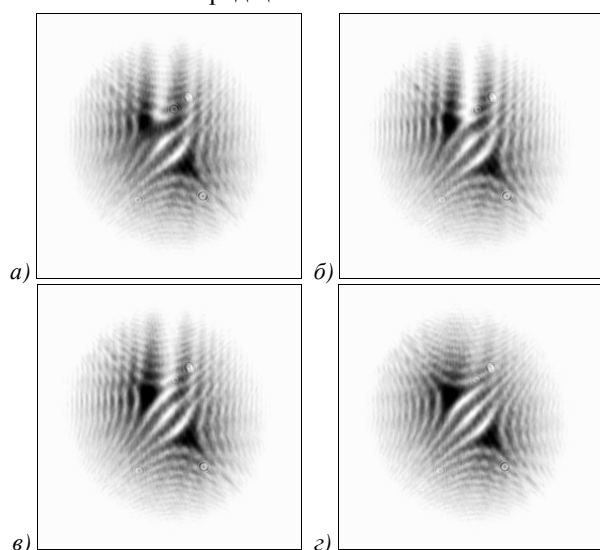


Рис. 13. Распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстоянии $z = 200$ мм с помощью СФП с дробным порядком: (а) $n = 2,3$, (б) $n = 2,5$, (в) $n = 2,7$, (г) $n = 2,9$. Размеры картинок – 4000×4000 мкм

Заключение

Ещё в [7] было показано, что цилиндрическая линза меняет ОУМ лазерного пучка. С помощью цилиндрической линзы в [7] из пучка Эрмита–Гаусса, не обладающего ОУМ, получался пучок Лагерра–Гаусса, обладающий ОУМ. В этой статье, наоборот, внесение цилиндрической линзы в оптический вихрь, аналогичный пучку Лагерра–Гаусса, не меняет ОУМ пучка, а приводит к снятию вырождения с n -кратно вырожденного изолированного нуля интенсивности пучка Лагерра–Гаусса и его расщеплению на n изолированных однократных нулей.

В этой работе теоретически и экспериментально с помощью жидкокристаллического микродисплея исследовались несколько способов определения топологического заряда оптического вихря. В этих методах целый топологический заряд определяется по простому подсчёту нулей интенсивности (число нулей интенсивности равно топологическому заряду). Исходный оптический вихрь с n -кратно вырожденным нулем интенсивности на оптической оси распадается на n изолированных нулей интенсивности (первого порядка) при

внесении астигматизма в пучок или в оптическую схему. Рассмотрены следующие способы внесения астигматизма: с помощью внесения в пучок цилиндрической линзы, с помощью наклона сферической линзы, внесённой в оптический вихрь, с помощью наклона оптического элемента, формирующего оптический вихрь, или при наклонном падении Гауссова пучка на этот оптический элемент, а также с помощью освещения оптического элемента эллиптическим Гауссовым пучком. Для всех перечисленных способов получены явные выражения для распределения комплексной амплитуды света в плоскости наблюдения. Показано, что комплексные амплитуды пропорциональны многочлену Эрмита n -го порядка с комплексным аргументом. Получены условия, при которых аргумент многочлена Эрмита становится действительным и найдены координаты нулей многочлена, которые лежат на прямых линиях в поперечных плоскостях. Эти нули многочлена Эрмита описывают реальные нули интенсивности световых полей, число которых равно топологическому заряду исходного оптического вихря. Экспериментальные результаты согласуются с теорией. Метод определения топологического заряда с цилиндрической линзой оказался самым работоспособным, с помощью него был определен топологический заряд $n=100$. Это почти на порядок больше, чем в известных работах, посвящённых этой теме. Отметим, что вихревой лазерный пучок, сформированный СФП, после внесения в него астигматизма становится похожим на вихревой пучок Эрмита–Гаусса, рассмотренный в [35]. Отличие рассмотренных здесь лазерных пучков от пучков из [35] в более сложной зависимости комплексного аргумента многочлена Эрмита от параметров задачи.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9), а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483.

Литература

1. **Zhu, K.** Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere / K. Zhu, G. Zhou, X. Li, X. Zheng, H. Tang // Optics Express. – 2008. – Vol. 16(26). – P. 21315-21320. – DOI: 10.1364/OE.16.021315.
2. **Krenn, M.** Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // New Journal of Physics. – 2014. – Vol. 16. – 113028. – DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028.
3. **Hadžievski, L.** Stable optical vortices in nonlinear multi-core fibers / L. Hadžievski, A. Maluckov, A.M. Rubenchik, S. Turitsyn // Light: Science & Applications. – 2015. – Vol. 4. – e314 (6 p). – DOI: 10.1038/lsa.2015.87.
4. **Foo, G.** Optical vortex coronagraph / G. Foo, D.M. Palacios, G.A. Swartzlander Jr. // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30(24). – P. 3308-3310. – DOI: 10.1364/OL.30.003308.
5. **Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Nature. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.

6. **Otsu, T.** Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam / T. Otsu, T. Ando, Y. Takiguchi, Y. Ohtake, H. Toyoda, H. Itoh // *Scientific Reports*. – 2014. – Vol. 4. – 4579. – DOI: 10.1038/srep04579.
7. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and transformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – Vol. 83(1-2). – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
8. **Khonina, S.N.** Astigmatic Bessel laser beams / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, P. Paakkonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51(5). – P. 677-686. – DOI: 10.1080/09500340408235545.
9. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2006. – Vol. 23(1). – P. 43-56. – DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
10. **Bekshaev, A.Y.** Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by a astigmatic lens / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Optics Communications*. – 2004. – Vol. 241(4-6). – P. 237-247. – DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
11. **Almazov, A.A.** How the tilt of a phase diffraction optical element affects the properties of shaped laser beams matched with a basis of angular harmonics / A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Journal of Optical Technology*. – 2006. – Vol. 73(9). – P. 633-639. – DOI: 10.1364/JOT.73.000633.
12. **Kotlyar, V.V.** Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45(7). – P. 1495-1506. – DOI: 10.1080/09500349808230644.
13. **Khonina, S.N.** Measuring the light field orbital angular momentum using DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen // *Optical Memory & Neural Networks*. – 2001. – Vol. 9(4). – P. 241-255.
14. **Khonina, S.N.** An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2001. – Vol. 48(10). – P. 1543-1557. – DOI: 10.1080/09500340110047501.
15. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6(2). – P. 259-268. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
16. **Guo, C.G.** Measuring the orbital angular momentum of optical vortices using a multipinhole plate / C.G. Guo, S.J. Yue, G.X. Wei // *Applied Physics Letters*. – 2009. – Vol. 94(23). – 231104. – DOI: 10.1063/1.3151920.
17. **Dai, K.J.** Measuring OAM states of light beams with gradually-changing-period gratings / K.J. Dai, C.Q. Gao, L. Zhong, Q.X. Na, Q. Wang // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40(4). – P. 562-565. – DOI: 10.1364/OL.40.000562.
18. **Leach, J.** Measuring the orbital angular momentum of a single photon / J. Leach, M. Padgett, S. Barnett, S. Franke-Arnold, J. Courtial // *Physical Review Letters*. – 2002. – Vol. 88(25). – 257901. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.257901.
19. **Huang, H.C.** Measuring the fractional orbital angular momentum of a vortex light beam by cascaded Mach-Zehnder interferometers / H.C. Huang, Y.T. Lin, M.F. Shih // *Optics Communications*. – 2012. – Vol. 285(4). – P. 383-388. – DOI: 10.1016/j.optcom.2011.09.063.
20. **Zhou, J.** Experimental detection of high-order or fractional orbital angular momentum of light based on robust mode converter / J. Zhou, W.H. Zhang, L.X. Chen // *Applied Physics Letters*. – 2016. – Vol. 108(1). – 111108. – DOI: 10.1063/1.4944463.
21. **Guo, C.** Characterizing topological charge of optical vortices by using an annular aperture / C. Guo, L. Lu, H. Wang // *Optics Letters*. – 2009. – Vol. 34(23). – P. 3686-3688. – DOI: 10.1364/OL.34.003686.
22. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chavez-Cedra // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105(5). – 053904. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.053904.
23. **De Araujo, L.E.E.** Measuring vortex charge with a triangular aperture / L.E.E. de Araujo, M.E. Anderson // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36(6). – P. 787-789. – DOI: 10.1364/OL.36.000787.
24. **Han, Y.** Measuring the topological charge of optical vortices with an axicon / Y. Han, G. Zhao // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36(11). – P. 2017-2019. – DOI: 10.1364/OL.36.002017.
25. **Prabhakar, S.** Revealing the order of a vortex through its intensity record / S. Prabhakar, A. Kumar, J. Banerji, R.P. Singh // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36(22). – P. 4398-4400. – DOI: 10.1364/OL.36.004398.
26. **Vaity, P.** Topological charge dependent propagation of optical vortices under quadratic phase transformation / P. Vaity, R.P. Singh // *Optics Letters*. – 2012. – Vol. 37(8). – P. 1301-1303. – DOI: 10.1364/OL.37.001301.
27. **Vaity, P.** Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens / P. Vaity, J. Banerji, R.P. Singh // *Physics Letters A*. – 2013. – Vol. 377(15). – P. 1154-1156. – DOI: 10.1016/j.physleta.2013.02.030.
28. **Miyamoto, K.** Direct observation of the topological charge of a terahertz vortex beam generated by a Tsurupica spiral phase plate / K. Miyamoto, K. Suizu, T. Akiba, T. Omatsu // *Applied Physics Letters*. – 2014. – Vol. 104(26). – 261104. – DOI: 10.1063/1.4886407.
29. **Serna, J.** Complete spatial characterization of a pulsed doughnut-type beam by use of spherical optica and a cylindrical lens / J. Serna, F. Encinas-Sanz // *Journal of the Optical Society of America*. – 2001. – Vol. 18(7). – P. 1726-1733. – DOI: 10.1364/JOSAA.18.001726.
30. **Peng, Y.** Measuring topological charges of optical vortices with multi-singularity using a cylindrical lens / Y. Peng, X. Gan, P. Ju, Y. Wang, J. Zhao // *Chinese Physics Letters*. – 2015. – Vol. 32(2). – 024201. – DOI: 10.1088/0256-307X/32/2/024201.
31. **Kotlyar, V.V.** The phase rotor filter / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, G.V. Uspleniev, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1992. – Vol. 39(5). – P. 1147-1154. – DOI: 10.1080/09500349214551151.
32. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
33. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
34. **Хонина, С.Н.** Расширение функциональных возможностей модовых астигматических конвертеров на основе применения дифракционных оптических элементов / С.Н. Хонина, С.В. Карпеев, А.В. Устинов // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2009. – Т. 11, № 5. – С. 13-23.
35. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40(5). – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 770 этого выпуска.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Ассистент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.29.

Поступила в редакцию 7 октября 2016 г. Окончательный вариант – 7 декабря 2016 г.

DETERMINATION OF AN OPTICAL VORTEX TOPOLOGICAL CHARGE USING AN ASTIGMATIC TRANSFORM

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute – branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" of RAS, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

It is shown both theoretically and experimentally that if a cylindrical lens is placed into a laser beam, having an optical vortex with integer topological charge n and on-axis intensity null, then at the double focal distance behind the lens, the n -fold degenerate intensity null is split into n isolated intensity nulls. These intensity nulls lie on a straight line in the transverse plane at an angle of $+45$ or -45 degrees to the axis of the cylindrical lens, depending on the vortex helicity direction (i.e. sign of the topological charge). Experiments show that such a method can be used to determine higher-order topological charges up to $n = 100$.

Keywords: optical vortex, topological charge, cylindrical lens, astigmatic transform.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Determination of an optical vortex topological charge using an astigmatic transform. *Computer Optics* 2016; 40(6): 781-792. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-781-792.

Acknowledgements: The work was partially funded by the Russian Federation Ministry of Education and Science, Presidential grant for support of leading scientific schools (NSh-9498.2016.9) and Russian Foundation of Basic Research Grants (14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483).

References

- [1] Zhu K, Zhou G, Li X, Zheng X, Tang H. Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere. *Opt Express* 2008; 16(26): 21315-21320. DOI: 10.1364/OE.16.021315.
- [2] Krenn M, Fickler R, Fink M, Handsteiner J, Malik M, Scheidl T, Ursin R, Zeilinger A. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna. *New Journal of Physics* 2014; 16: 113028. DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028.
- [3] Hadźievski L, Maluckov A, Rubenchik AM, Turitsyn S. Stable optical vortices in nonlinear multicore fibers. *Light: Science & Applications* 2015; 4: e314. DOI: 10.1038/lsa.2015.87.
- [4] Foo G, Palacios DM, Swartzlander Jr. GA. Optical vortex coronagraph. *Opt Lett* 2005; 30(24): 3308-3310. DOI: 10.1364/OL.30.003308.
- [5] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [6] Otsu T, Ando T, Takiguchi Y, Ohtake Y, Toyoda H, Itoh H. Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam. *Scientific Reports* 2014; 4: 4579. DOI: 10.1038/srep04579.
- [7] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Beam transformations and transformed beams. *Optics Communication* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [8] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Paakkonen P, Turunen J. Astigmatic Bessel laser beams. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 677-686. DOI: 10.1080/09500340408235545.
- [9] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(1): 43-56. DOI: 10.1364/JOSA.23.000043.
- [10] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens. *Optics Communications* 2004; 241(4-6): 237-247. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.07.023.
- [11] Almazov AA, Khonina SN, Kotlyar VV. How the tilt of a phase diffraction optical element affects the properties of shaped laser beams matched with a basis of angular harmonics. *J Opt Techn* 2006; 73(9): 633-639. DOI: 10.1364/JOT.73.000633.
- [12] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(7): 1495-506. DOI: 10.1080/09500349808230644.
- [13] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. *Optical Memory & Neural Networks* 2001; 9(4): 241-255.
- [14] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Simonen J, Turunen J. An analysis of the angular momentum of a

- light field in terms of angular harmonics. *J Mod Opt* 2001; 48(10): 1543-1457. DOI: 10.1080/09500340110047501.
- [15] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [16] Guo CG, Yue SJ, Wei GX. Measuring the orbital angular momentum of optical vortices using a multipinhole plate. *Appl Phys Lett* 2009; 94(23): 231104. DOI: 10.1063/1.3151920.
- [17] Dai KJ, Gao CQ, Zhong L, Na QX, Wang Q. Measuring OAM states of light beams with gradually-changing-period gratings. *Opt Lett* 2015; 40(4): 562-565. DOI: 10.1364/OL.40.000562.
- [18] Leach J, Padgett M, Barnett S, Franke-Arnold S, Courtial J. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. *Phys Rev Lett* 2002; 88(25): 257901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.257901.
- [19] Huang HC, Lin YT, Shih MF. Measuring the fractional orbital angular momentum of a vortex light beam by cascaded Mach-Zehnder interferometers. *Optics Communications* 2012; 285(4): 383-388. DOI: 10.1016/j.optcom.2011.09.063.
- [20] Zhou J, Zhang WH, Chen LX. Experimental detection of high-order or fractional orbital angular momentum of light based on robust mode converter. *Appl Phys Lett* 2016; 108(1): 111108. DOI: 10.1063/1.4944463.
- [21] Guo C, Lu L, Wang H. Characterizing topological charge of optical vortices by using an annular aperture. *Opt Lett* 2009; 34(23): 3686-3688. DOI: 10.1364/OL.34.003686.
- [22] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chavez-Cedra S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2010; 105(5): 053904. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.053904.
- [23] De Araujo LEE, Anderson ME. Measuring vortex charge with a triangular aperture. *Opt Lett* 2011; 36(6): 787-789. DOI: 10.1364/OL.36.000787.
- [24] Han Y, Zhao G. Measuring the topological charge of optical vortices with an axicon. *Opt Lett* 2011; 36(11) 2017-2019. DOI: 10.1364/OL.36.002017.
- [25] Prabhakar S, Kumar A, Banerji J, Singh RP. Revealing the order of a vortex through its intensity record. *Opt Lett* 2011; 36(22): 4398-4400. DOI: 10.1364/OL.36.004398.
- [26] Vaity P, Singh RP. Topological charge dependent propagation of optical vortices under quadratic phase transformation. *Opt Lett* 2012; 37(8): 1301-1303. DOI: 10.1364/OL.37.001301.
- [27] Vaity P, Banerji J, Singh RP. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. *Phys Lett A* 2013; 377(15): 1154-1156. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.02.030.
- [28] Miyamoto K, Suizu K, Akiba T, Omatsu T. Direct observation of the topological charge of a terahertz vortex beam generated by a Tsurupica spiral phase plate. *Appl Phys Lett* 2014; 104(26): 261104. DOI: 10.1063/1.4886407.
- [29] Serna J, Encinas-Sanz F. Complete spatial characterization of a pulsed doughnut-type beam by use of spherical optica and a cylindrical lens. *JOSA* 2001; 18(7): 1726-1733. DOI: 10.1364/JOSAA.18.001726.
- [30] Peng Y, Gan X, Ju P, Wang Y, Zhao J. Measuring topological charges of optical vortices with multi-singularity using a cylindrical lens. *Chin Phys Lett* 2015; 32(2): 024201. DOI: 10.1088/0256-307X/32/2/024201.
- [31] Kotlyar VV, Khonina SN, Uspleniev GV, Shinkarev MV, Soifer VA. The phase rotor filter. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
- [32] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Elementary Functions*. New York: Gordon and Breach Science Publishers; 1986. ISBN: 9782881240898.
- [33] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. New York: Gordon and Breach Science Publishers; 1986.
- [34] Khonina SN. Functional enhancement of mode astigmatic converters on the basis of application of diffractive optical elements. *Proceedings of the Samara Scientific Center of the RAS* 2009; 11(5): 13-23.
- [35] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.

Authors' information

The information about authors **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 771 of this issue.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an assistant professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics and optical manipulation.

Received October 7, 2016. The final version – December 7, 2016.