

ГИБРИДНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА КАУСТИК ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

С.И. Харитонов^{1,2}, С.Г. Волотовский¹, С.Н. Хонина^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

Аннотация

В статье предложен новый подход к расчёту распределений световых полей в рамках геометрической оптики. Описан новый интегральный оператор для вычисления распределения интенсивности в рамках геометрической оптики. В рамках предложенного метода найдены распределения интенсивности от ранее изученных падающих пучков. Найдены особые точки этих распределений, и рассчитаны распределения интенсивности вблизи каустик. Разработанный метод применен для расчета формирования каустик гармоническими дифракционными оптическими элементами в радиально-симметричном случае.

Ключевые слова: геометрическая оптика, каустика, дробный аксикон, гармоническая дифракционная линза.

Цитирование: Харитонов, С.И. Гибридный асимптотический метод анализа каустик оптических элементов в радиально-симметричном случае / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 175-182. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-175-182.

Введение

Дифракционные оптические элементы (ДОЭ) применяются для миниатюризации и облегчения оптических систем. Кроме того, они позволяют сформировать световые пучки с такими свойствами, которые невозможно получить с помощью классических элементов рефракционной оптики [1–5].

Классические линзы и зеркала сложно использовать в некоторых устройствах из-за большого размера. Кроме того, формирование сложных комплексных распределений лазерных полей невозможно выполнить с помощью классических рефракционных элементов. Однако эта задача очень хорошо решается с помощью средств дифракционной оптики. ДОЭ, учитывающие волновую природу света, успешно выполняют преобразование лазерного излучения в практически произвольное амплитудно-фазовое распределение [6, 7].

Основное свойство ДОЭ – использование явления дифракции для изменения направления распространения световых лучей. Дифракционные элементы разбивают световой луч на множество лучей, каждый из которых перенаправляется под разными углами. Некоторые ДОЭ могут сочетать в себе свойства как дифракционных, так и рефракционных линз. Примером могут служить так называемые гармонические дифракционные элементы [8–10], где дифракционные и рефракционные свойства линзы зависят от приведения фазы к различным интервалам.

В данной работе выполнено исследование ДОЭ, формирующих каустические поверхности с использованием гибридного асимптотического подхода, основанного на асимптотическом представлении интеграла Кирхгофа.

1. Асимптотическое представление для интеграла Кирхгофа

$$U(x, y, z) = \int (z/L^2(x, y, u, v)) U_0(u, v) \times \exp(ikS(x, y, u, v)) du dv, \tag{1}$$

$$S(x, y, u, v) = L(x, y, u, v) + \Phi(u, v), \tag{2}$$

$$L(x, y, u, v) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}, \tag{3}$$

x, y, z – декартовы координаты точки наблюдения, u, v – декартовы координаты в плоскости $z=0$, $\Phi(u, v)$ – эйконалная функция в плоскости $z=0$, $U(x, y, z)$ – комплексная амплитуда в точке наблюдения, $U_0(u, v)$ – модуль комплексной амплитуды в плоскости $z=0$.

Приведённый интеграл можно вычислить с помощью метода стационарной фазы.

$$U(x, y, z) = (zU_0(u_0, v_0)/L^2(x, y, u_0, v_0)) \times \frac{\exp(ikS(x, y, u_0, v_0))}{\left[S_{uu}(x, y, u_0, v_0)S_{vv}(x, y, u_0, v_0) - (S_{uv}(x, y, u_0, v_0))^2 \right]^{1/2}}, \tag{4}$$

где u_0, v_0 – стационарная точка, которая определяется соотношениями

$$\frac{\partial S(x, y, u_0, v_0)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial S(x, y, u_0, v_0)}{\partial v} = 0, \tag{5}$$

$$x = u_0 + \frac{\Phi_u(u_0, v_0)}{Q(u_0, v_0)} z, \quad y = v_0 + \frac{\Phi_v(u_0, v_0)}{Q(u_0, v_0)} z, \tag{6}$$

$$\text{где } Q(u, v) = \sqrt{1 - \Phi_u^2(u, v) - \Phi_v^2(u, v)}. \tag{7}$$

В интеграле (4) вычислим выражение:

$$S_{uu}(x, y, u_0, v_0)S_{vv}(x, y, u_0, v_0) - (S_{uv}(x, y, u_0, v_0))^2 = (z^2/L^4)J(u_0, v_0).$$

Якобиан преобразования имеет вид

$$J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u. \tag{8}$$

Функции, описывающие лучевые преобразования, входящие в якобиан, имеют вид

$$x = x_0(u, v) = u + \frac{\Phi_u(u, v)}{Q(u, v)} z, \tag{9}$$

$$y = y_0(u, v) = v + (\Phi_v(u, v)/Q(u, v))z. \quad (10)$$

При наличии нескольких стационарных точек вместо (4) получим:

$$U(x, y, z) = \sum_{u_0, v_0} \frac{U_0(u_0, v_0)}{\sqrt{J(u_0, v_0)}} \exp(ikS(x, y, u_0, v_0)). \quad (11)$$

Выражение для интенсивности будет:

$$U(x, y, z)U^*(x, y, z) = \sum_{u_1, v_1} \sum_{u_0, v_0} \frac{U_0(u_0, v_0)}{\sqrt{J(u_0, v_0)}} \frac{U_0^*(u_1, v_1)}{\sqrt{J(u_1, v_1)}} \times \exp(ik(S(x, y, u_0, v_0) - S(x, y, u_1, v_1))). \quad (12)$$

После усреднения осциллирующих слагаемых выражение принимает вид

$$I(x, y, z) = \sum_{u_0, v_0} I_0(u_0, v_0)/J(u_0, v_0). \quad (13)$$

Это выражение плохо тем, что по точке прихода (x, y, z) нужно вычислить точку выхода (u₀, v₀), что проблематично при наличии нескольких стационарных точек.

Чтобы решить эту проблему, представим выражение (13) в несколько другом виде.

Учитывая свойства дельта-функции, выражение для интенсивности принимает вид:

$$I(x, y, z) = \int I_0(x, y) \delta(x - x_0(u, v), y - y_0(u, v)) du dv. \quad (14)$$

Однако использование квадратурных формул для вычисления интегралов с сингулярными функциями тоже затруднительно.

Поэтому заменим сингулярную функцию, входящую в интегральное выражение, её регулярной аппроксимацией

$$\delta(x, y) = (1/2\pi\sigma^2) \exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma^2). \quad (15)$$

После постановки (15) в (14) получим следующий интеграл:

$$I(x, y, z) = (1/2\pi\sigma^2) \times \int I_0(u, v) \exp(-S(x, y, u, v)/\sigma^2) du dv, \quad (16)$$

где

$$S(x, y, u, v) = 0,5 \left\{ (x - x_0(u, v))^2 + (y - y_0(u, v))^2 \right\}. \quad (17)$$

Вычислим интеграл (16) с помощью метода Лапласа.

Согласно методу Лапласа для вычисления двойных интегралов от быстро убывающих функций

$$I(x, y, z) = \sum_{u_0, v_0} \frac{I_0(u_0, v_0)}{\sqrt{\frac{\partial^2 S(x, y, u, v)}{\partial u^2} \frac{\partial^2 S(x, y, u, v)}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 S(x, y, u, v)}{\partial u \partial v} \right)^2}}. \quad (18)$$

Используя выражение для функции S(u, v), получаем

$$J^2(u, v, z) = \frac{\partial^2 S(x, y, u_0, v_0)}{\partial u^2} \frac{\partial^2 S(x, y, u_0, v_0)}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 S(x, y, u_0, v_0)}{\partial u \partial v} \right)^2 = \left(\frac{\partial x_0(u, v)}{\partial u} \frac{\partial y_0(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial y_0(u, v)}{\partial u} \frac{\partial x_0(u, v)}{\partial v} \right)^2. \quad (19)$$

Окончательное выражение для интенсивности принимает вид

$$I(x, y, z) = \sum_{u_0, v_0} I_0(u_0, v_0)/J(u_0, v_0). \quad (20)$$

В результате получили выражение, которое совпадает с выражением (13), полученным с использованием метода стационарной фазы. Таким образом, подход к расчёту интенсивности, основанный на вычислении интеграла Кирхгофа с помощью метода стационарной фазы, и подход на основе вычисления интеграла (16) методом Лапласа асимптотически эквивалентны.

2. Геометрическая оптика в радиально-симметричном случае

2.1. Уравнения лучей и каустик в радиально-симметричном случае

Найдём теперь лучевые уравнения в случае, если эйкональная функция имеет радиально-симметричный вид

$$\begin{cases} x_0(u, v) = u + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} u}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z, \\ y_0(u, v) = v + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z. \end{cases} \quad (21)$$

Введём в области начального распределения эйконала полярные координаты

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi. \quad (22)$$

А также введём полярные координаты в области прихода лучей

$$x_0(u, v) = R \cos \theta, \quad y_0(u, v) = R \sin \theta. \quad (23)$$

Подставляем (22), (23) в (21) и получаем

$$\begin{cases} R \cos \theta = \rho \cos \varphi \left(1 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z \right), \\ R \sin \theta = \rho \sin \varphi \left(1 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z \right). \end{cases} \quad (24)$$

Решения полученной системы имеют вид:

$$R(\rho, z) = \rho \left(1 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z \right), \quad \theta = \varphi, \quad (25)$$

$$R(\rho, z) = -\rho \left(1 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z \right), \quad \theta = \pi + \varphi. \quad (26)$$

Якобиан преобразования в полярной системе координат имеет вид

$$J = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x_0(u, v)}{\partial \rho} \frac{\partial y_0(u, v)}{\partial \varphi} - \frac{\partial x_0(u, v)}{\partial \varphi} \frac{\partial y_0(u, v)}{\partial \rho} \right). \quad (27)$$

Используя выражения (23), в результате получаем:

$$J(\rho, z) = \frac{R(\rho, z)}{\rho} \frac{\partial R(\rho, z)}{\partial \rho}, \quad (28)$$

где $R(\rho, z)$ имеет вид

$$R(\rho, z) = \pm \rho \left(1 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{1}{\rho}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z \right). \quad (29)$$

Рассмотрим теперь случай, когда якобиан лучевого преобразования обращается в ноль. В этих точках пространства интенсивность в приближении геометрической оптики соответствует каустикам (равна бесконечности). Параметрическое уравнение поверхности, в которой якобиан обращается в ноль, имеет вид

$$\begin{cases} r_c(\rho) = \rho - \left(1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right)^{-1}, \\ z_c(\rho) = - \left(1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right)^{-1}. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть эйкональная функция в плоскости $z=0$ имеет вид $\Phi(\rho) = a\rho^\gamma$ [11, 12]. В этом случае параметрические уравнения каустик имеет вид:

$$\begin{cases} r_c(\rho) = \rho - \frac{\rho}{(\gamma-1)} \left(1 - (a\gamma\rho^{\gamma-1})^2 \right), \\ z_c(\rho) = - \frac{\left(1 - (a\gamma\rho^{\gamma-1})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{a\gamma(\gamma-1)\rho^{\gamma-2}}. \end{cases} \quad (31)$$

2.2. Определение координат двух лучей, проходящих вблизи каустики

Получим параметры лучей, проходящих вблизи каустики. Параметрические уравнения для каустики (30) можно переписать в виде

$$\begin{cases} r_c = R_0(\rho_0) = \rho_0 + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_0}\right)^2}} Z(\rho_0), \\ z_c = Z_0(\rho_0), \\ Z_0(\rho_0) = - \left(1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_0}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho_0^2} \right)^{-1}. \end{cases} \quad (32)$$

Теперь рассмотрим уравнение луча

$$r = R(\rho, z) = \rho + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2}} z, \quad (33)$$

где ρ – координата выхода луча.

Рассмотрим точку с координатами:

$$(r, z) = (R(\rho_0, Z_0(\rho_0)) + \Delta r, Z_0(\rho_0)). \quad (34)$$

Подставляя (34) в уравнение луча (33), получаем другое уравнение

$$R(\rho_0, Z_0(\rho_0)) + \Delta r = R(\rho, Z_0(\rho_0)). \quad (35)$$

Из этого уравнения найдём точку выхода луча

$$\begin{aligned} \Delta r &= R(\rho, Z_0(\rho_0)) - R(\rho_0, Z_0(\rho_0)) = \\ &= \frac{\partial R(\rho_0, Z_0(\rho_0))}{\partial \rho} (\rho - \rho_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R(\rho_0, Z_0(\rho_0))}{\partial \rho^2} (\rho - \rho_0)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Так как на каустике

$$\frac{\partial R(\rho_0, Z_0(\rho_0))}{\partial \rho} = 0, \quad (37)$$

$$\text{то } \Delta r = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R(\rho_0, Z_0(\rho_0))}{\partial \rho^2} (\rho - \rho_0)^2. \quad (38)$$

После преобразований получаем:

$$\rho = \rho_0 \pm \left(\frac{1}{2\Delta r} \frac{\partial^2 R(\rho_0, Z_0(\rho_0))}{\partial \rho^2} \right)^{-1/2}. \quad (39)$$

В результате получаем координаты двух точек, лучи из которых приходят в заданную точку вблизи каустики.

2.3. Расчёт интенсивности в радиально-симметричном случае в рамках геометрической оптики

Выражение для интенсивности имеет вид

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \\ &= \int I_0(x, y) \delta(x - x_0(u, v), y - y_0(u, v)) du dv. \end{aligned} \quad (40)$$

Переходя в области интегрирования и области наблюдения в полярные координаты, получаем выражение для интенсивности в цилиндрической системе координат.

С учётом различия двух случаев распределение интенсивности имеет следующий вид:

$$I(r, z) = \begin{cases} \int_0^R \frac{I_0(\rho)}{\sqrt{2\pi\sigma}} \delta[r - r_0(\rho, z)] \Lambda_1(\rho) \rho d\rho, & r_0(\rho, z) > 0, \\ \int_0^R \frac{I_0(\rho)}{\sqrt{2\pi\sigma}} \delta[r + r_0(\rho, z)] \Lambda_2(\rho) \rho d\rho, & r_0(\rho, z) < 0, \end{cases} \quad (41)$$

где $I_0(\rho)$ – входная интенсивность,

$$r_0(\rho, z) = \rho + (\Phi_\rho(\rho) / \sqrt{1 - \Phi_\rho^2(\rho)}) z, \quad (42)$$

$$\Lambda_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{2r}{\sigma^2} r_0(\rho, z) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} d\varphi, \quad (43)$$

$$\Lambda_2(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{2r}{\sigma^2} r_0(\rho, z) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} d\varphi.$$

Вычисление интегралов по угловой переменной

Для вычисления интегралов по угловой переменной необходимо рассмотреть вычисление интеграла вида

$$\Psi(x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) d\varphi \quad (44)$$

или

$$\Phi(x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma^2} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) d\varphi. \quad (45)$$

При малых σ этот интеграл можно вычислить методом Лапласа или методом перевала. Это предположение основано на том, что в окрестности нуля можно использовать разложение в ряд Тейлора

$$\sin^2(\varphi/2) = \varphi^2/4. \quad (46)$$

С другой стороны, в окрестности $\varphi = \pi$

$$\cos^2(\varphi/2) = (\varphi - \pi)^2/4. \quad (47)$$

В результате всё можно свести к интегралу Пуассона.

Вычисление поля вблизи каустики в радиально-симметричном случае

Рассмотрим вычисление поля вблизи каустической поверхности в виде:

$$I(r) = \int_0^R \frac{I_0(\rho)}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} S(\rho)\right) \Lambda(\rho) \rho d\rho, \quad (48)$$

где $S(\rho) = 0,5[r - R(\rho)]^2$.

Рассмотрим вычисление интеграла с помощью асимптотического метода Лапласа. Согласно методу Лапласа:

$$I(r) = (I_0(\rho_0) / \sqrt{S''(\rho_0)}) \Lambda(\rho_0) \rho_0, \quad r = R(\rho_0). \quad (49)$$

Вычислив

$$\begin{aligned} S'(\rho) &= -(r - R(\rho))(dR(\rho)/d\rho), \\ S''(\rho) &= (dR(\rho)/d\rho)^2 + (r - R(\rho))(d^2R(\rho)/d\rho^2). \end{aligned} \quad (50)$$

Получаем на каустике:

$$S''(\rho_0) = (dR(\rho_0)/d\rho)^2. \quad (51)$$

Окончательно получаем

$$I(r) = (dR(\rho_0)/d\rho)^{-1} I_0(\rho_0) \Lambda(\rho_0) \rho_0, \quad r = R(\rho_0). \quad (52)$$

Следует отметить, что уравнение

$$dR(\rho_0)/d\rho = 0 \quad (53)$$

определяет каустику.

3. Численное моделирование для обобщённой линзы

В параграфе рассмотрено моделирование для эйкональной функции, соответствующей обобщённой линзе [11, 12] вида $\Phi(\rho) = a\rho^\gamma$.

На рис. 1 показаны графики каустик $r_c(z_c)$, вычисленных по параметрическому представлению (31) для различных значений параметров a и γ . На рис. 2–4 показаны результаты расчёта интенсивности по формуле (41) для рассматриваемой обобщённой линзы с теми же параметрами при равномерной входной интенсивности.

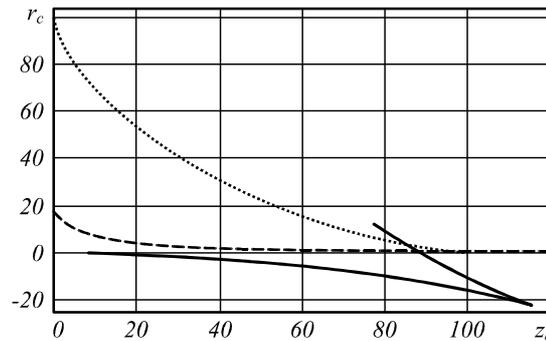


Рис. 1. Графики каустик для $\gamma = 2, a = -0,005$ (точечная линия), $\gamma = 3, a = -0,001$ (пунктирная линия), $\gamma = 1,5, a = -0,05$ (сплошная линия)

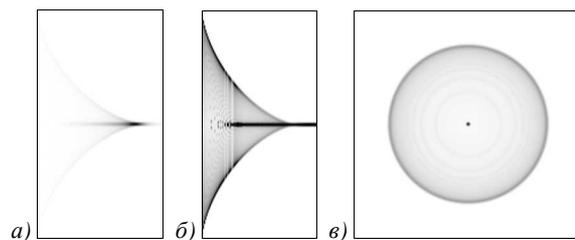


Рис. 2. Распределение интенсивности (негатив) для $\gamma = 2, a = -0,005$: продольное ($x \in [-100, 100], z \in [-0,1, 120]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечное ($x, y \in [-100, 100], z = 10$) распределение интенсивности (в)

Как видно из рис. 1 и рис. 2, при значении параметра $\gamma = 2$ (точечная линия) каустика выглядит как классический «ласточкин хвост». При увеличении параметра $\gamma = 3$ функция каустики становится более резко выгнутой (рис. 1: пунктирная линия, рис. 3).

Таким образом, для параметра $\gamma \geq 2$ каустика имеет вид вогнутой функции. Если же $1 < \gamma < 2$, например, $\gamma = 1,5$ (рис. 1, сплошная линия), то функция имеет две каустические линии – выпуклую и линейную.

Причём, как видно из рис. 4, линейная каустика значительно ярче выпуклой.

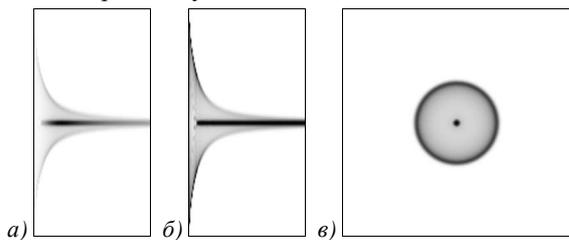


Рис. 3. Распределение интенсивности (негатив) для $\gamma=3$, $a = -0,001$: продольное ($x \in [-100, 100]$, $z \in [-0,1, 120]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечное ($x, y \in [-20, 20]$, $z = 10$) распределение интенсивности (в)

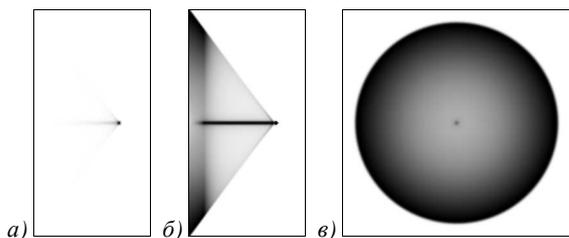


Рис. 4. Распределение интенсивности (негатив) для $\gamma=1,5$, $a = -0,05$: продольное ($x \in [-100, 100]$, $z \in [-0,1, 120]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечное ($x, y \in [-100, 100]$, $z=10$) распределение интенсивности (в)

Однако в задачах фокусировки излучения в глубине некоторого объёма, где актуально формирование резкого фокуса на некотором расстоянии от поверхности [13, 14], желательно иметь выпуклую каустику. Чтобы сделать её ярче, возьмём смещённую из центра эйкональную функцию $\Phi(\rho) = a(\rho-s)^\gamma$ [15] (рис. 5), а чтобы убрать центральный пик, осветим эту линзу не плоским, а кольцевым пучком (рис. 6).

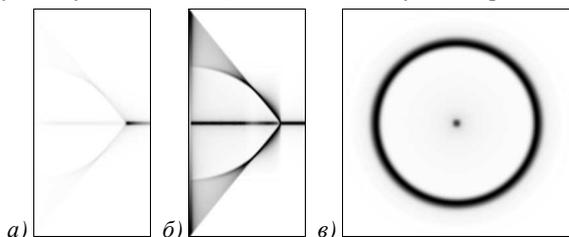


Рис. 5. Распределение интенсивности (негатив) для $\gamma=1,5$, $a = -0,05$, $s = 50$: продольное ($x \in [-100, 100]$, $z \in [-0,1, 200]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечное ($x, y \in [-50, 50]$, $z=100$) распределение интенсивности (в)

4. Формирование каустик гармоническими оптическими элементами в радиально-симметричном случае

Пусть на эту линзу падает плоский пучок немонахроматического света с длинами волн в интервале $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Оценим размеры функции рассеяния точки в зависимости от длины волны.

Будем считать, что дифракционный элемент изготовлен в виде гармонической линзы [8–10] с высотой рельефа $\lambda_0 N$ для базовой длины волны λ_0 . Такой оп-

тический элемент можно локально представить в виде дифракционной решётки с периодом [16]:

$$d = (\lambda_0 N) / (d\Phi(\rho) / d\rho), \tag{54}$$

где N – порядок гармоничности.

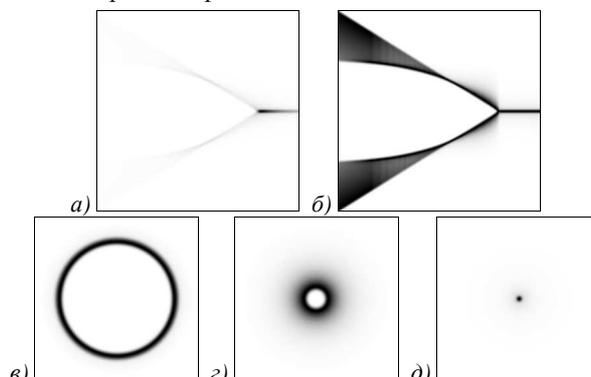


Рис. 6. Распределение интенсивности (негатив) для $\gamma=1,5$, $a = -0,05$, $s = 50$ при освещении кольцевым пучком: продольное ($x \in [-100, 100]$, $z \in [-0,1, 200]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечные распределения интенсивности ($x, y \in [-50, 50]$) при $z=100$ (в), $z=150$ (г), $z=200$ (д)

Луч, падающий параллельно оптической оси, при попадании на эту дифракционную решётку отклоняется. Наклон луча α к оптической оси равен

$$\alpha(\lambda) = m(\lambda/d), \tag{55}$$

где m – порядок дифракции.

Подставляя выражение (54) в (55), получаем

$$\alpha(\lambda) = (\lambda/\lambda_0)(m/N)(d\Phi(\rho)/d\rho). \tag{56}$$

Приведённая формула означает, что гармонический ДОО на заданной длине волны порождает несколько волновых фронтов. Каждый волновой фронт эквивалентен волновому фронту, который создаёт ДОО с эйкональной функцией

$$\Psi_{m,N}(\rho, \lambda) = (\lambda/\lambda_0)(m/N)\Phi(\rho). \tag{57}$$

В результате выражение для интенсивности имеет вид:

$$I_N(r, z, \lambda) = \sum_{m=-N}^N T_{m,N}(\lambda) I_{m,N}(r, z, \lambda), \tag{58}$$

где

$$I_{m,N}(r, z, \lambda) = \begin{cases} \int_0^R I_0(\rho) \delta[r - r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda)] \Lambda_{1,m,N}(\rho, \lambda) \rho d\rho, & r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda) > 0; \\ \int_0^R I_0(\rho) \delta[r + r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda)] \Lambda_{2,m,N}(\rho, \lambda) \rho d\rho, & r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda) < 0; \end{cases} \tag{59}$$

$$r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda) = \rho + \Psi_{m,N}(\rho, \lambda) / \sqrt{1 - [\Psi_{m,N}(\rho, \lambda)]^2}, \tag{60}$$

$$\Lambda_{1,m,N}(\rho, \lambda) = 1/\sqrt{2\pi\sigma} \times \int_0^{2\pi} \exp\{-(2r/\sigma^2)r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda)\sin^2(\varphi/2)\}d\varphi, \quad (61)$$

$$\Lambda_{2,m,N}(\rho, \lambda) = 1/\sqrt{2\pi\sigma} \times \int_0^{2\pi} \exp\{(2r/\sigma^2)r_{0,m,N}(\rho, z, \lambda)\cos^2(\varphi/2)\}d\varphi, \quad (62)$$

$$T_{m,N}(\lambda) = \text{Sinc}^2[\pi(\lambda_0 N/\lambda - m)], \quad (63)$$

$T_{m,n}(\lambda)$ – коэффициент пропускания гармонического ДОО. Анализ выражения показывает, что гармонический ДОО генерирует множество каустик.

На рис. 7 и 8 показаны результаты моделирования для параболической гармонической линзы $\gamma=2$, $a=-0,005$ (с фокусным расстоянием $f=100$) при учёте трёх дифракционных порядков. Базовая длина волны была выбрана $\lambda_0=633$ нм. Рассмотрены три случая: 1) длина волны освещающего излучения совпадает с базовой длиной волны $\lambda=633$ нм; 2) меньше базовой $\lambda=532$ нм; 3) больше базовой $\lambda=750$ нм.

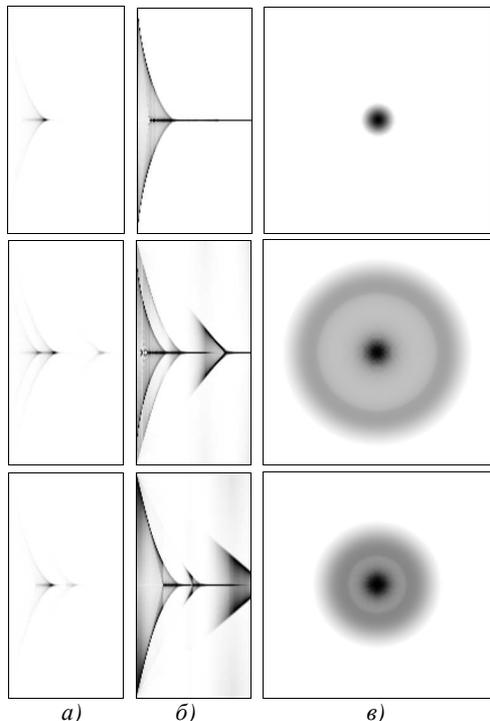


Рис. 7. Распределение интенсивности (негатив) для гармонической линзы $\gamma=2$, $a=-0,005$, $\lambda_0=633$ нм: продольное ($x \in [-100, 100]$, $z \in [-0,1, 300]$) распределение интенсивности (а) и топологии (б) и поперечное ($x, y \in [-10, 10]$, $z=100$) распределение интенсивности (в): для $\lambda=633$ нм (верхняя строка), для $\lambda=532$ нм (средняя строка), для $\lambda=750$ нм (нижняя строка)

Заключение

В статье описан новый подход к расчёту распределений световых полей в рамках геометрической оптики. Предложен новый интегральный оператор для вычисления распределения интенсивности в рамках геометрической оптики.

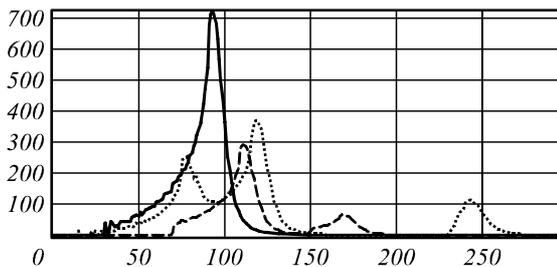


Рис. 8. Графики интенсивности на оси для гармонической линзы $\gamma=2$, $a=-0,005$, $\lambda_0=633$ нм: при $\lambda=633$ нм (сплошная линия), $\lambda=532$ нм (точечная линия), $\lambda=750$ нм (пунктирная линия)

В рамках предложенного метода найдены распределения интенсивности от ранее изученных волновых фронтов, в частности, параболического, кубического и также волнового фронта, который описывается дробной степенью от радиуса. Найдены особые точки этих распределений, и рассчитаны распределения интенсивности вблизи каустик.

В дальнейшем планируется провести аналогичные исследования с использованием интеграла Кирхгофа, в том числе с учетом векторного характера полей.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-29-11744 офи_м).

Литература

1. **Бобров, С.Т.** Оптика дифракционных элементов и систем / С.Т. Бобров, Г.И. Грейсух, Ю.Г. Туркевич. – Л.: Машиностроение, 1986. – 223 с.
2. **Грейсух, Г.И.** Сравнительный анализ хроматизма дифракционных и рефракционных линз / Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов, С.А. Степанов // Компьютерная оптика. – 2005. – Вып. 28. – С. 60-65.
3. **Казанский, Н.Л.** Моделирование работы гиперспектрометра, основанного на схеме Оффнера, в рамках геометрической оптики / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 271-280.
4. **Казанский, Н.Л.** Формирование изображений дифракционной многоуровневой линзой / Н.Л. Казанский, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 425-434.
5. **Карпеев, С.В.** Исследование дифракционной решётки на выпуклой поверхности как диспергирующего элемента / С.В. Карпеев, С.Н. Хонина, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 2. – С. 211-217. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-2-211-217.
6. Дифракционная компьютерная оптика / Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соيفер, С.Н. Хонина; под ред. В.А. Соифера. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с. – ISBN: 5-9221-0845-4.
7. Дифракционная нанофотоника / А.В. Гаврилов, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, П.Н. Дьяченко, А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, Д.В. Нестеренко, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Соифер, С.Н. Хонина, Я.О. Шушупова; под ред. В.А. Соифера. – М.: Физматлит, 2011. – 680 с. – ISBN: 978-5-9221-1237-6.

8. **Sweeney, D.W.** Harmonic diffractive lenses / D.W. Sweeney, G.E. Sommargren // *Applied Optics*. – 1995. – Vol. 34, Issue 14. – P. 2469-2475. – DOI: 10.1364/AO.34.002469.
9. **Rossi, M.** Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements / M. Rossi, R.E. Kunz, H.P. Herzig // *Applied Optics*. – 1995. – Vol. 34, Issue 26. – P. 5996-6007. – DOI: 10.1364/AO.34.005996.
10. **Харитонов, С.И.** Геометрооптический расчёт фокального пятна гармонической дифракционной линзы / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 331-337. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.
11. **Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика*. – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 401-411.
12. **Khonina, S.N.** Fractional axicon as a new type of diffractive optical element with conical focal region / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.G. Volotovskiy // *Precision Instrument and Mechanology*. – 2013. – Vol. 2, Issue 4. – P. 132-143.
13. **Panagiotopoulos, P.** Sharply autofocused ring-Airy beams transforming into non-linear intense light bullets / P. Panagiotopoulos, D.G. Papazoglou, A. Couairon, S. Tzortzakos // *Nature Communications*. – 2013. – Vol. 4. – 2622 (6 p.). – DOI: 10.1038/ncomms3622.
14. **Jiang, Y.** Propagation characteristics of the modified circular Airy beam / Y. Jiang, X. Zhu, W. Yu, H. Shao, W. Zheng, X. Lu // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23, Issue 23. – P. 29834-29841. – DOI: 10.1364/OE.23.029834.
15. **Chremmos, I.** Pre-engineered abruptly autofocusing beams / I. Chremmos, N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36, Issue 10. – P. 1890-1892. – DOI: 10.1364/OL.36.001890.
16. **Харитонов, С.И.** Моделирование отражения электромагнитных волн от дифракционных решёток, нанесённых на произвольную поверхность / С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский, Л.Л. Досколович, Ю.С. Стрелков // *Компьютерная оптика*. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 194-202. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Харитонов Сергей Иванович** см. стр. 166 этого выпуска.

Волотовский Сергей Геннадьевич, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: sv@smr.ru.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: khonina@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 6 марта 2017 г. Окончательный вариант – 22 марта 2017 г.

HYBRID ASYMPTOTIC METHOD FOR ANALYZING CAUSTICS OF OPTICAL ELEMENTS IN THE AXIALLY SYMMETRIC CASE

S.I. Kharitonov^{1,2}, S.G. Volotovskiy¹, S.N. Khonina^{1,2}

¹ IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

In this work we propose a new approach to calculating the distribution of light fields in the framework of geometrical optics. A new integral operator for computing the intensity distribution in the geometrical optics approximation is suggested. Using the proposed method, we derive the intensity distributions of previously studied wavefronts. Singular points of these distributions are found and the intensity distributions near the caustics are calculated. The developed method is used to calculate the formation of caustics by harmonic diffractive optical elements in the axially symmetric case.

Keywords: geometrical optics, caustic, fractional axicon, harmonic diffractive lens.

Citation: Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Hybrid asymptotic method for analyzing caustics of optical elements in the axially symmetric case. *Computer Optics* 2017; 41(2): 175-182. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-175-182.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 16-29-11744).

References

- [1] Bobrov ST, Greysukh GI, Turkevich YuG. Optics of diffractive elements and systems [In Russian]. Leningrad: “Mashinostroenie” Publisher; 1986.
- [2] Greysukh GI, Ezhov EG, Stepanov SA. Comparative analysis of the chromatism of diffractive and refractive lenses [in Russian]. *Computer Optics* 2005; 28: 60-65.
- [3] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Karsakov AV, Khonina SN. Modeling action of a hyperspectrometer based on the

- Offner scheme within geometric optics. *Computer Optics* 2014; 38(2): 271-280.
- [4] Kazanskii NL, Khonina SN, Skidanov RV, Morozov AA, Kharitonov SI, Volotovskiy SG. Formation of images using multi-level diffractive lens. *Computer Optics* 2014; 38(3): 425-434.
- [5] Karpeev SV, Khonina SN, Kharitonov SI. Study of the diffraction grating on the convex surface as a dispersive element. *Computer Optics* 2015; 39(2): 211-217. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-2-211-217.
- [6] Soifer VA, ed. *Computer Design of Diffractive Optics*. Woodhead Publishing and Cambridge International Science Publishing; 2012. ISBN: 978-1845696351.
- [7] Soifer VA, ed. *Diffractive Nanophotonics*. Boca Raton, USA: CRC Press; 2014. ISBN: 978-1466590694.
- [8] Sweeney DW, Sommargen GE. Harmonic diffractive lenses. *Applied Optics* 1995; 34(14): 2469-2475. DOI: 10.1364/AO.34.002469.
- [9] Rossi M, Kunz RE, Herzig HP. Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements. *Applied Optics* 1995; 34(26): 5996-6007. DOI: 10.1364/AO.34.005996.
- [10] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Geometric-optical calculation of the focal spot of a harmonic diffractive lens. *Computer Optics* 2016; 40(3): 331-337. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.
- [11] Khonina SN, Volotovskiy SG. Fracxicon – diffractive optical element with conical focal domain [In Russian]. *Computer Optics* 2009; 33(4): 401-411.
- [12] Khonina SN, Ustinov AV, Volotovskiy SG. Fractional axicon as a new type of diffractive optical element with conical focal region. *Precision Instrument and Mechanology* 2013; 2(4): 132-143.
- [13] Panagiotopoulos P, Papazoglou DG, Couairon A, Tzortzakis S. Sharply autofocused ring-Airy beams transforming into non-linear intense light bullets. *Nat Commun* 2013; 4: 2622. DOI: 10.1038/ncomms3622.
- [14] Jiang Y, Zhu X, Yu W, Shao H, Zheng W, Lu X. Propagation characteristics of the modified circular Airy beam. *Optics Express* 2015; 23(23): 29834-29841. DOI: 10.1364/OE.23.029834.
- [15] Chremmos I, Efremidis NK, Christodoulides DN. Pre-engineered abruptly autofocusing beams. *Optics Letters* 2011; 36(10): 1890-1892. DOI: 10.1364/OL.36.001890.
- [16] Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Doskolovich LL, Strelkov YS. Modeling the reflection of the electromagnetic waves at a diffraction grating generated on a curved surface. *Computer Optics* 2016; 40(2): 194-202. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

Authors' information

The information about author **Sergey Ivanovich Kharitonov** you can find on page 168 of this issue.

Sergey Gennadjevich Volotovskiy (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty "Applied Mathematics", works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: sv@smr.ru.

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@smr.ru.

Received March 6, 2017. The final version – March 22, 2017.