

Фокусировка векторного поля с С-линиями поляризационной сингулярности

В.В. Котляр^{1,2}, С.С. Стафеев^{1,2}, А.Г. Налимов^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрена острая фокусировка начального гибридного векторного светового поля n -го порядка, имеющего n С-линий (линий, на которых поляризация круговая). С помощью комплексного поля Стокса показано, что индекс поляризационной сингулярности такого поля равен $n/2$. Показано, что индекс сингулярности начального поля не сохраняется в плоскости фокуса. Получены аналитические выражения для интенсивности и компонент вектора Стокса в плоскости фокуса. Теоретически и численно показано, что при четном порядке поля $n=2p$ в фокусе картина интенсивности обладает симметрией и вместо С-линий формируются С-точки, вокруг которых вращаются оси эллипсов поляризации. При $n=4$ в фокусе имеются С-точки с индексами сингулярности $1/2$ и с топологией типа «лимон». Вокруг таких точек поверхность, которую образуют эллипсы поляризации в трехмерном пространстве, имеет топологию листа Мебиуса. При нечетном порядке начального поля $n=2p+1$ в фокусе картина интенсивности не имеет симметрии и поле становится только векторным (нет эллиптической поляризации) с V-точками, вокруг которых вращаются векторы линейной поляризации.

Ключевые слова: световой пучок с неоднородной эллиптической поляризацией, топологический заряд, поляризационная сингулярность, С-точки, С-линии.

Цитирование: Котляр, В.В. Фокусировка векторного поля с С-линиями поляризационной сингулярности / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 6. – С. 800-808. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-903.

Citation: Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Focusing of a vector beam with C-lines of polarization singularity. Computer Optics 2021; 45(6): 800-808. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-903.

Введение

Векторные сингулярности, как обобщение скалярных сингулярностей, были рассмотрены J.F. Nye в 1983 году [1]. В [1] линии, в которых поперечные проекции электрического поля равны нулю, названы disclinations (в отличие от скалярных краевых и винтовых дислокаций [2]). Однако в этих работах, как и в работе [3], поляризационные сингулярности исследуются локально, то есть вблизи особых (критических, сингулярных) точек. Актуальным является исследование световых полей с неоднородной поляризацией, у которых в разных точках в сечении пучка имеется разный тип поляризации (линейный, эллиптический или круговой) в глобальном смысле. То есть нахождение топологических зарядов или индексов сингулярности для всего поля целиком. Это актуально потому, что в последнее время растет число работ по генерации и исследованию векторных световых полей с неоднородной поляризацией [4]. Пучки с неоднородной поляризацией можно формировать интерферометрически [5], внутри резонатора [6], с помощью q-пластинок [7], метаповерхностей [8, 9], поляризационных призм [10] и модуляторов света [11]. Точки с нулевой интенсивностью, когда не определено направление линейной поляризации, называются

V-точками [3]. Аналогично точки светового поля с неоднородной эллиптической поляризацией, в которых не определено направление главной оси эллипса поляризации, называются С-точками. В этих точках поляризация круговая. Если С-точки лежат на линии, то такая линия называется С-линией [3]. Поляризационные сингулярности характеризуются с помощью индексов сингулярности, которые рассчитываются аналогично топологическому заряду для скалярных световых полей [12]. Индекс поляризационной сингулярности для V-точек называется индексом Пуанкаре–Хопфа [3] и рассчитывается с помощью параметров Стокса [13–15]. А С-точки описываются индексом, который равен числу поворотов на π главной оси эллипса поляризации при обходе С-точки. Индекс С-точки может быть дробным (полуцелым), если за полный оборот эллипс поляризации поворачивается на π нечетное число раз. При переходе через С-линии ось эллипса поляризации скачком поворачивается на $\pi/2$. В [16] рассмотрена суперпозиция двух пучков Лагерра–Гаусса с обобщенной векторной поляризацией (то есть у каждого пучка неоднородная линейная поляризация) разного порядка m_1 и m_2 . В перетяжке у суперпозиции таких пучков имеются $|m_1 - m_2|$ V-точек 1-го порядка, которые при распространении порождают пары С-точек $+1$ и -1 порядков.

Но в [16] рассматриваются только параксиальные пучки и нет острой фокусировки. В работе [17] рассматриваются С-точки и С-линии (и их преобразование) в одноосном кристалле при осевом и наклонном параксиальном распространении света с круговой поляризацией, которые формируются при разной фазовой задержке между обыкновенным и необыкновенным пучками.

В данной работе мы рассмотрим гибридное векторное световое поле n -го порядка, в котором в зависимости от полярного угла поляризация меняется от линейной до эллиптической и круговой. В этом начальном поле будут только С-линии, число которых равно номеру n . Мы найдем компоненты вектора Стокса для этого поля и покажем, что индекс поляризации этого поля будет полуцелым $n/2$. С помощью формализма Ричардса–Вольфа [18] мы получим аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля в остром фокусе для начального гибридного поля n -го порядка, а также выражения для интенсивности в фокусе. Окажется, что при четном номере n интенсивность обладает определенной симметрией и имеет С-точки в фокусе. То есть мы численно покажем, что С-линии в начальном поле «распадаются» на С-точки в фокусе, которые лежат на тех же линиях. Также мы получим аналитические выражения для проекций вектора Стокса в фокусе, из которых будет следовать, что при нечетном номере n поле в фокусе чисто векторное, состоит из векторов линейной поляризации, имеет несколько V-точек и не имеет С-точек.

1. Начальное гибридное векторное поле с точками поляризационной сингулярности

Рассмотрим гибридное векторное поле n -го порядка, заданное в начальной плоскости двумя поперечными проекциями вектора напряженности электрического поля с вектором Джонса в виде:

$$E_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ i\alpha + \sin n\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где n – целое число, $0 \leq |\alpha| \leq 1$. Из (1) следует, что при $n=0$ световое поле (1) имеет эллиптическую поляризацию, а при $|\alpha|=1$ – круговую поляризацию. При $\alpha=0$ поле (1) будет обладать неоднородной линейной поляризацией n -го порядка.

В поле (1) имеются точки с линейной, эллиптической и круговой поляризацией. Точки с круговой поляризацией называются С-точками поляризационной сингулярности, так как в этих точках не определено направление большей оси эллипса поляризации [3]. Топология эллипсов поляризации вокруг С-точки характеризуется индексом I_c , равным целому числу раз изменения на угол π направления большей оси эллипса поляризации при обходе С-точки по замкнутому кон-

туру. Для нахождения индекса I_c поля (1) найдем все проекции вектора Стокса [13] $\mathbf{S}=(S_1, S_2, S_3)$, где

$$S_1 = \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_2 = \frac{2\text{Re}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \tag{2}$$

$$S_3 = \frac{2\text{Im}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2},$$

где Re и Im – знаки реальной и мнимой части числа. Вектор Стокса, как видно из (2), имеет единичную длину $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Для поля (1) параметры Стокса из (2) будут иметь вид:

$$S_1 = 2 \frac{\cos 2n\varphi - \alpha^2}{1 + \alpha^2}, S_2 = \frac{2 \sin 2n\varphi}{1 + \alpha^2}, \tag{3}$$

$$S_3 = \frac{2\alpha \cos n\varphi}{1 + \alpha^2}.$$

Из (3) следует, что на лучах, исходящих из центра под углами, значение которых легко найти из уравнения $S_3 = \cos n\varphi = 0$, поляризация будет линейной. Под другими углами поляризация будет эллиптической. Круговая поляризация будет при углах φ , удовлетворяющих уравнению $S_3 = 1$ или $\cos n\varphi = \pm 1$ и $\alpha = +1, -1$. То есть у поля (1) нет изолированных С-точек, но есть С-линии, при переходе через которые направление большей оси эллипса поляризации меняется скачком на $\pi/2$. Одна С-точка эквивалентна винтовой дислокации, а С-линия эквивалентна краевой дислокации. Всего число С-линий в начальном поле (1) будет равно порядку поля n , и они будут совпадать с $2n$ лучами, исходящими из центра под углами $\pi m/n$, $m=0, 1, 2, \dots, 2n$.

В работе [3] рассчитывают локальный индекс векторных полей для поляризационных сингулярностей (С-точек), и само векторное поле задается локально вблизи сингулярности. Далее в этой работе мы будем рассчитывать топологический индекс всего векторного поля (1) (глобально), аналогично тому как рассчитывается топологический заряд всего скалярного комплексного вихревого поля по формуле Берри [12]. С этой целью сформируем комплексное поле Стокса по правилу:

$$S_c = S_1 + iS_2. \tag{4}$$

Для начального векторного поля (1) комплексное поле Стокса (4) будет иметь вид:

$$S_c = 2 \frac{\exp(2in\varphi) - \alpha^2}{1 + \alpha^2}. \tag{5}$$

Рассчитаем индекс Стокса σ для поля (5) по формуле Берри [12]:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(\varphi) / \partial \varphi}{S_c(\varphi)}. \tag{6}$$

Подставим в (6) поле Стокса (5), получим:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2in \exp(2in\varphi)}{\exp(2in\varphi) - \alpha^2} = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1 - \alpha^2 \cos 2n\varphi)}{(1 + \alpha^4) - 2\alpha^2 \cos 2n\varphi}. \quad (7)$$

Если в (7) положить $\alpha^2 = 1$, то $\sigma = n$, а индекс С-точек и всего поля (1) будет равен $Ic = \sigma/2 = n/2$. Индекс Ic может быть полуцелым из-за того, что наклон большей оси эллипса поляризации меняется от 0 до π , а не до 2π . Если в (7) $\alpha = 0$, то поле (1) становится неоднородным линейно-поляризованным ($S_3 = 0$) и будет содержать только V-точки (точки неопределенности направления вектора линейной поляризации), индекс Стокса которых (7) будет равен $\sigma = 2n$, а индекс Пуанкаре–Хопфа [3] поля (1) будет в 2 раза меньше $\eta = n$. Если $0 < |\alpha| < 1$, то для расчета индекса Стокса (7) воспользуемся справочным интегралом [19]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{a + b \cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b} \right)^m. \quad (8)$$

С учетом (8) индекс Стокса поля (1) при $0 < |\alpha| < 1$ равен $\sigma = 2n$, а индекс Пуанкаре–Хопфа равен $\eta = \sigma/2 = n$. При этом точек с круговой поляризацией не возникает.

2. Векторное поле с точками поляризационной сингулярности в плоскости острого фокуса

В этом параграфе с помощью формализма Ричардса–Вольфа [18] найдем проекции вектора напряженности электрического поля в плоскости фокуса для начального поля (1). Получим:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2}} (I_{0,n} \cos n\varphi + I_{2,n-2} \cos(n-2)\varphi) + \\ &+ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} I_{2,2} \sin 2\varphi, \\ E_y &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2}} (I_{0,n} \sin n\varphi - I_{2,n-2} \sin(n-2)\varphi) + \\ &+ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (I_{0,0} - I_{2,2} \cos 2\varphi), \\ E_z &= \sqrt{2} i^n I_{1,n-1} \cos(n-1)\varphi - i\alpha \sqrt{2} I_{1,1} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

где интегралы в (9) имеют вид:

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{\mu}(x) d\theta, \quad (10)$$

где λ – длина волны света, f – фокусное расстояние апланатической системы, $x = krs \sin \theta$, $J_{\mu}(x)$ – функция Бесселя первого рода и $NA = \sin \theta_0$ – числовая апертура. Начальная функция амплитуды $A(\theta)$ (предположим, что

это действительная функция) может быть константой (плоская волна) или в виде Гауссова пучка

$$A(\theta) = \exp \left(\frac{-\gamma^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \right),$$

где γ – постоянная. При $\alpha = 0$ поле (9) в фокусе с точностью до константы ($1/\sqrt{2}$) совпадает с полем в фокусе света с радиальной поляризацией n -го порядка [20]:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2}} (I_{0,n} \cos n\varphi + I_{2,n-2} \cos(n-2)\varphi), \\ E_y &= -\frac{i^{n+1}}{\sqrt{2}} (I_{0,n} \sin n\varphi - I_{2,n-2} \sin(n-2)\varphi), \\ E_z &= \sqrt{2} i^n I_{1,n-1} \cos(n-1)\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

В поле (11) есть только V-точки поляризационной сингулярности и нет С-точек и С-линий. При $n = 0$ и $\alpha = 1$ поле (9) совпадает точно с полем в фокусе света с правой круговой поляризацией [21]:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (I_{0,0} + e^{i2\varphi} I_{2,2}), \\ E_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{0,0} - e^{i2\varphi} I_{2,2}), \\ E_z &= -\sqrt{2} e^{i\varphi} I_{1,1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поэтому начальное поле (1) и поле в фокусе (9) можно назвать гибридным, так как в нем есть точки с линейной поляризацией, эллиптической и круговой.

Интенсивность в фокусе для поля (9) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \{ I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{0,n} I_{2,n-2} \cos 2(n-1)\varphi + \\ &+ \alpha^2 I_{0,0}^2 + \alpha^2 I_{2,2}^2 - 2\alpha I_{0,0} I_{2,2} \cos 2\varphi + \\ &+ 4I_{1,n-1}^2 \cos^2(n-1)\varphi + 4\alpha^2 I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi - \\ &- 2\alpha \cos \left(\frac{n+1}{2} \right) \pi [\sin n\varphi (I_{0,0} I_{0,n} + I_{2,2} I_{2,n-2}) - \\ &- \sin(n-2)\varphi (I_{0,0} I_{2,n-2} + I_{2,2} I_{0,n}) - \\ &- \sin \varphi \sin(n-1)\varphi I_{1,1} I_{1,n-1}] \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для интенсивности (13) достаточно громоздко, но при четном номере $n = 2p$ получим, что $\cos(n+1)\pi/2 = 0$ и выражение для интенсивности упрощается:

$$\begin{aligned} I_{n=2p} &= \frac{1}{2} \{ I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + \\ &+ 2I_{0,n} I_{2,n-2} \cos 2(n-1)\varphi + \\ &+ \alpha^2 I_{0,0}^2 + \alpha^2 I_{2,2}^2 - 2\alpha I_{0,0} I_{2,2} \cos 2\varphi + \\ &+ 4I_{1,n-1}^2 \cos^2(n-1)\varphi + 4\alpha^2 I_{1,1}^2 \sin^2 \varphi \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) видно, что интенсивность в центре плоскости фокуса отлична от нуля, так как отлична от нуля

слагаемое $\alpha^2 I_{0,0}^2$. Картина интенсивности будет обладать центральной симметрией $2(n-1)$ -порядка, так как в (14) входят косинусы от удвоенного угла 2φ и квадраты косинуса и синуса (поэтому при замене φ на $\varphi + \pi$ картина интенсивности не изменится). Также картина интенсивности (14) будет иметь $2(n-1)$ локальных максимумов интенсивности, так как $\cos 2(n-1)\varphi$ меняет знак $2(n-1)$ число раз за полный оборот. Для нечетных номеров $n=2p+1$ получим, что $\cos(n+1)\pi/2 = \pm 1$, и интенсивность (13) не будет обладать центральной симметрией (так как при φ и $\varphi + \pi$ интенсивность будет разной), хотя по-прежнему в центре плоскости фокуса будет максимум интенсивности.

Найдем выражения для проекций вектора Стокса в фокусе. Выражения для проекций вектора Стокса громоздки, поэтому приведем только проекции для симметричных полей в фокусе, если номер поля четный $n=2p$. Воспользуемся другим определением вектора Стокса, у которого 4 проекции, в отличие от вектора Стокса (2):

$$s_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2, s_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2, \quad (15)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y), s_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y).$$

Согласно определению (15) для поля (9) ($n=2p$) получим выражения:

$$s_0 = \frac{1}{2} (I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{0,n}I_{2,n-2} \cos 2(n-1)\varphi + \alpha^2 I_{0,0}^2 + \alpha^2 I_{2,2}^2 - 2\alpha^2 I_{0,0}I_{2,2} \cos 2\varphi),$$

$$s_1 = \frac{1}{2} (I_{0,n}^2 \cos 2n\varphi + I_{2,n-2}^2 \cos 2(n-2)\varphi + 2I_{0,n}I_{2,n-2} \cos 2\varphi - \alpha^2 I_{0,0}^2 - \alpha^2 I_{2,2}^2 \cos 4\varphi + 2\alpha^2 I_{0,0}I_{2,2} \cos 2\varphi), \quad (16)$$

$$s_2 = \frac{1}{2} (I_{0,n}^2 \sin 2n\varphi + I_{2,n-2}^2 \sin 2(n-2)\varphi + 2I_{0,n}I_{2,n-2} \sin 2\varphi - \alpha^2 I_{2,2}^2 \cos 4\varphi + 2\alpha^2 I_{0,0}I_{2,2} \cos 2\varphi),$$

$$s_3 = \alpha \sin\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi \left[\cos n\varphi (I_{0,0}I_{0,n} - I_{2,2}I_{2,n-2}) + \cos(n-2)\varphi (I_{0,0}I_{2,n-2} - I_{2,2}I_{0,n}) \right].$$

В (16) s_0, s_1, s_2 приведены для четных $n=2p$, а s_3 записана для любого n . Это сделано для того, чтобы было видно, что при нечетном номере $n=2p+1$ проекция $s_3=S_3=0$, и значит, поле в фокусе не будет иметь С-точек, а будет только векторным, то есть состоящим из векторов линейной поляризации.

Составим из двух проекций поля (16) комплексное поле Стокса:

$$S_c = s_1 + is_2 = \frac{1}{2} [I_{0,n}^2 e^{2in\varphi} + I_{2,n-2}^2 e^{2i(n-2)\varphi} - \alpha^2 I_{2,2}^2 e^{4i\varphi} + 2e^{2i\varphi} (\alpha^2 I_{0,0}I_{2,2} + I_{0,n}I_{2,n-2}) - \alpha^2 I_{0,0}^2]. \quad (17)$$

Из (17) следует, что топологический заряд вихревого поля Стокса не определен и изменяется по всей плоскости фокуса, так как при больших радиусах r амплитуды при экспонентах будут меняться по величине (то одни больше, то другие, и нельзя определить, какое слагаемое в (17) больше по модулю при больших r). То есть на некоторых радиусах индекс Стокса поля (17) может быть $\sigma=2n$, на других радиусах индекс может быть $\sigma=2(n-2)$, на других $-4, 2$ или 0 . Определенно только можно сказать, что вблизи оптической оси отличным от нуля остается только последнее слагаемое в (17), у которого нет вихревой фазы. То есть в центре фокуса при любом n индекс Стокса будет нулевым ($\sigma=0$). Моделирование подтверждает сделанные здесь выводы.

3. Моделирование

На рис. 1 показано распределение эллипсов поляризации в начальном поле (1) при разных номерах n : 3(а), 2(б), 1(в) и -3 (г). Индексы для С-линий полей на рис. 1, рассчитанные по формуле (7) с помощью комплексного поля Стокса, равны $I_c = \sigma/2 = n/2$: $3/2$ (а), 1 (б), $1/2$ (в) и $-3/2$ (г). На рис. 1а видно, что поле (1) с номером $n=3$ имеет 3 С-линии, расположенные под углами $\varphi = \pi m/3, m=0, 1, 2$. А угол наклона большей оси эллипса поляризации изменяется на $\pi/2$ в каждом из 6 секторов между соседними С-линиями. То есть за полный круг угол наклона большей оси эллипса изменится на $6\pi/2 = 3\pi$, то есть индекс поля на рис. 1а равен $I_c = 3\pi/(2\pi) = 3/2$. Аналогично на рис. 1б поле (1) с номером $n=2$ имеет 2 С-линии, лежащие на декартовых осях. При изменении угла φ в одном секторе между двумя С-линиями от 0 до $\pi/2$ угол наклона большей оси эллипса поляризации поворачивается на угол $\pi/2$, тогда за полный оборот вокруг центра угол наклона большей оси эллипса изменится на $4\pi/2$. То есть индекс для поля на рис. 1б равен $I_c = 2\pi/(2\pi) = 1$. На рис. 1в С-линия совпадает с горизонтальной декартовой осью координат. И при изменении угла φ в одном секторе между двумя С-линиями от 0 до π (в верхней полуплоскости) угол наклона большей оси эллипса поляризации поворачивается на угол $\pi/2$, и в нижней полуплоскости угол поворота оси эллипса поляризации также равен $\pi/2$. То есть за полный круг эллипс поляризации повернется на угол π , а индекс сингулярности будет равен $I_c = \pi/(2\pi) = 1/2$. Аналогично можно проследить изменения угла поворота главной оси эллипсов поляризации и на последнем рис. 1г.

На рис. 2а показана полная интенсивность (негатив) в фокусе поля (1) при $\alpha=1$ и $n=2$. Расчет производился с помощью формализма Ричардса-Вольфа [18] для длины волны $\lambda=532$ нм и числовой апертуры $NA=0,95$. На рис. 2б, в показаны амплитуда и фаза комплексного поля Стокса $S_c = s_1 + is_2$, рассчитанного с помощью компонент вектора Стокса (16). Из рис. 2а видно, что, как и предсказывает теория (13) и (14), в

фокусе картина интенсивности не меняется при замене φ на $\varphi + \pi$, и в центре будет максимум интенсивности. Из рис. 2в видно, что в центре фазы поля Стокса (17) нет сингулярной точки, так как нет изолированного нуля. Два изолированных нуля (точки сингулярности) на рис. 2в с топологическим зарядом 1 каждый видны на вертикальной оси. На рис. 2г стрелками показано распределение эллипсов поляризации в фокусе. На рис. 2д показаны С-точки в фокусе. Все они находятся на декартовых осях, на которых в начальной плоскости были С-линии (рис. 1б). То

есть моделирование показывает, что при острой фокусировке С-линии «распадаются» на несколько С-точек, лежащих на тех же линиях. Этот эффект аналогичен эффекту астигматического преобразования краевой дислокации волнового фронта в винтовую дислокацию в скалярной параксиальной оптике [22]. Индексы двух симметричных и ближайших к центру С-точек на горизонтальной декартовой оси равны $I_c = \pm 1/2$, а индексы двух соседних с ними С-точек, расположенных дальше от центра на горизонтальной оси, равны $I_c = -1/2$.

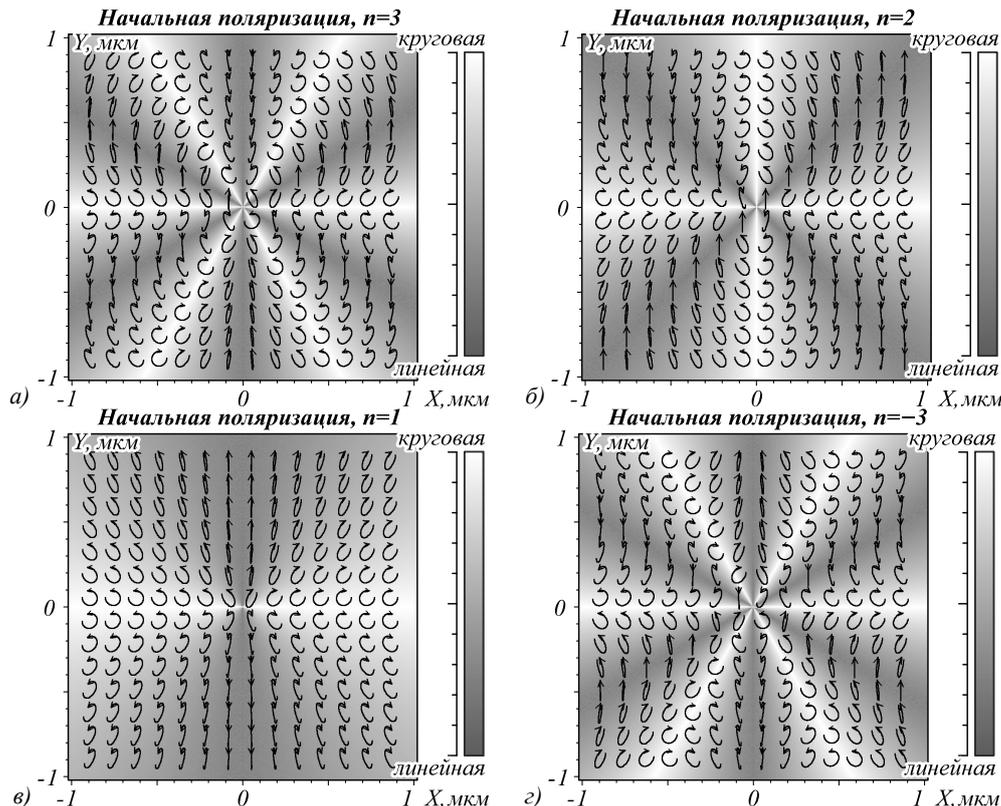


Рис. 1. Распределение поляризации (в полутонах и стрелками) в начальном пучке (1) $\alpha = 1$ для разных порядков n : $n=3$ (а), 2 (б), 1 (в), -3 (г). Стрелки отражают направление вращения вектора электрического поля, расположение начальной точки эллипса находится в соответствии с фазой поля в данной точке. Наиболее светлые линии – это С-линии

Аналогично на рис. 3 показан результат расчета в фокусе для $n = 3$ (остальные параметры те же, что и на рис. 2). Из рис. 3а видно, что, как и предсказывает теория (13), картина интенсивности (негатив) в фокусе при нечетном порядке ($n = 3$) будет асимметричной. Поле в фокусе будет векторным (рис. 3г), то есть будет состоять только из линейной поляризации. Это следует из (16), так как при $n = 2p + 1$ получается, что $s_3 = S_3 = 0$. На фазе комплексного поля Стокса (рис. 3в) можно увидеть 3 точки фазовой сингулярности с топологическим зарядом +2. А на рис. 3г можно видеть 3 V-точки, вокруг которых вращаются векторы линейной поляризации. То есть при нечетном порядке n поля (1) С-линии (рис. 1а) в начальной плоскости в фокусе преобразуются в несколько V-точек (рис. 3г) и все поле в фокусе становится векторным (нет точек с цилиндрической поляризацией).

На рис. 4 показано распределение интенсивности (негатив) в фокусе, обладающее симметрией 4-го порядка относительно декартовых координат (а). Показаны также амплитуда (рис. 4б) и фаза (рис. 4в) комплексного поля Стокса. На картине фазы поля Стокса видны точки фазовой сингулярности, которые связаны с С-точками (рис. 4в). На рис. 4е показан график индекса Стокса σ от радиуса R окружности с центром в начале координат, вдоль которой рассчитывался набег фазы поля Стокса (17) на картине фазы (рис. 4в). Из графика видно, что на разных радиусах R индекс Стокса равен 8, 6, 2, 0, что и предсказывает теория (16).

Из рис. 4г и 4д видно, что С-точки расположены на декартовых осях и на двух диагоналях, там где в начальной плоскости были С-линии. У двух С-точек, расположенных симметрично относительно центра на горизонтальной оси (рис. 4г, д), индекс сингулярно-

сти равен 1/2 и топология образует «лимон». При этом поверхность эллипсов поляризации в 3D-

пространстве при обходе такой С-точки образует ленту Мебиуса [23–25].

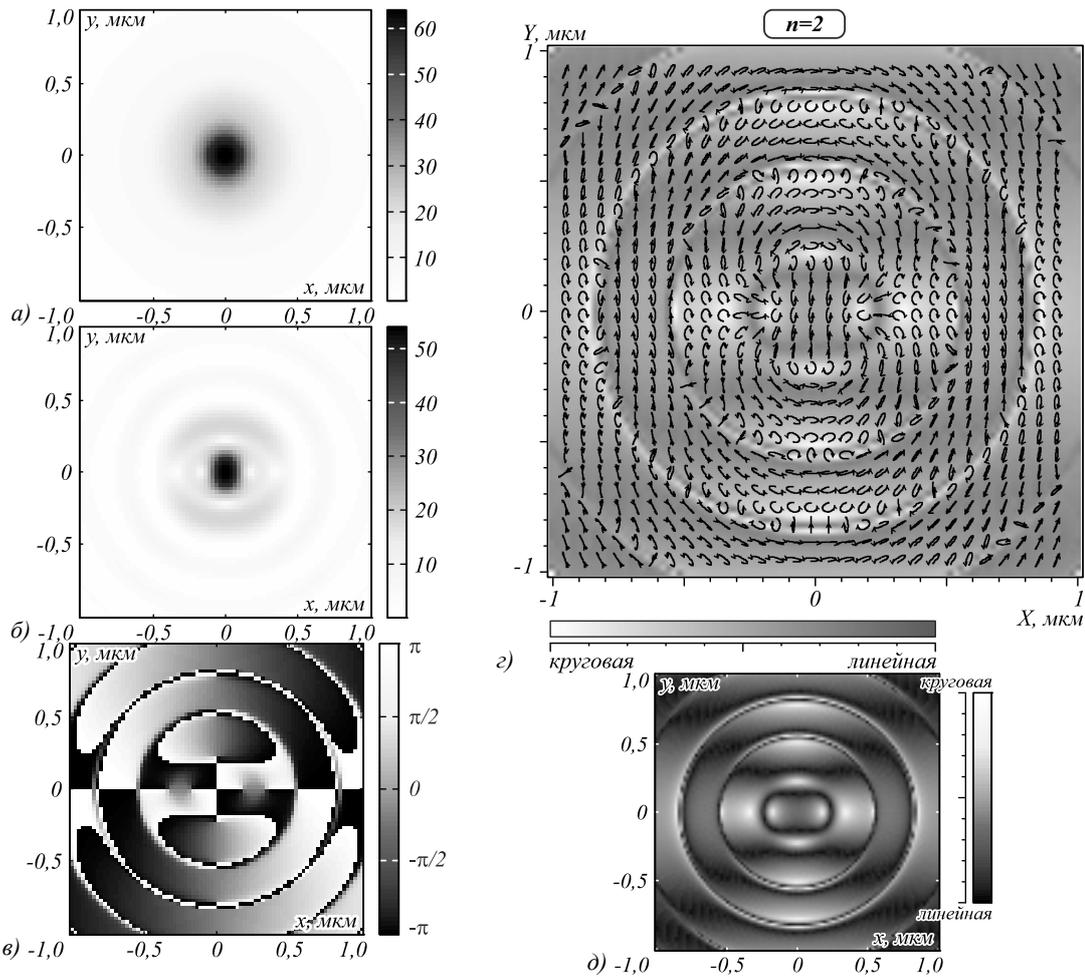


Рис. 2. Интенсивность $I = I_x + I_y + I_z$ (негатив) (а), амплитуда (б) и фаза (в) комплексного поля Стокса (17) при фокусировке светового поля (1) с $n=2$. Распределение эллиптической поляризации в фокусе (г) (размер кадра – 1×1 мкм) и распределение в фокусе точек с круговой, эллиптической поляризации и линейной поляризацией (д)

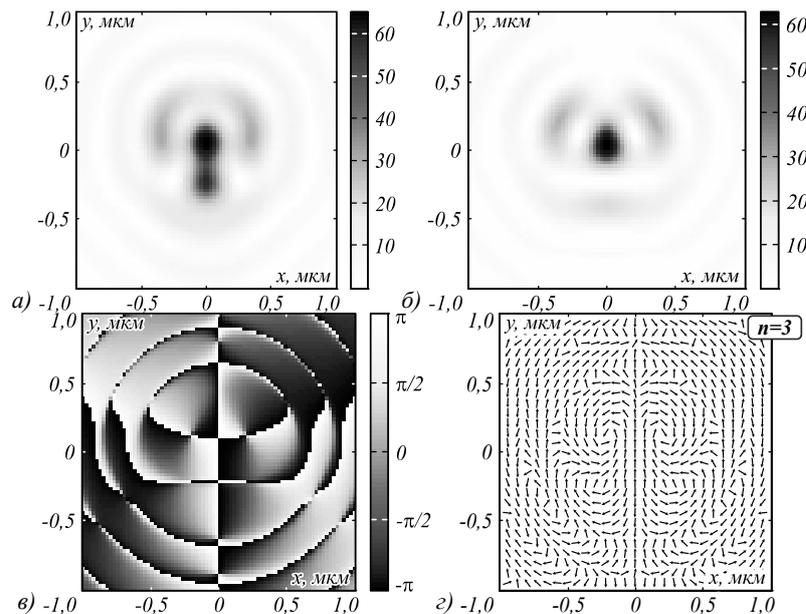


Рис. 3. Интенсивность $I = I_x + I_y + I_z$ (негатив) (а), амплитуда (б) и фаза (в) комплексного поля Стокса (17) при фокусировке светового поля (1) с $n=3$. Распределение направлений векторов линейной поляризации в фокусе (г)

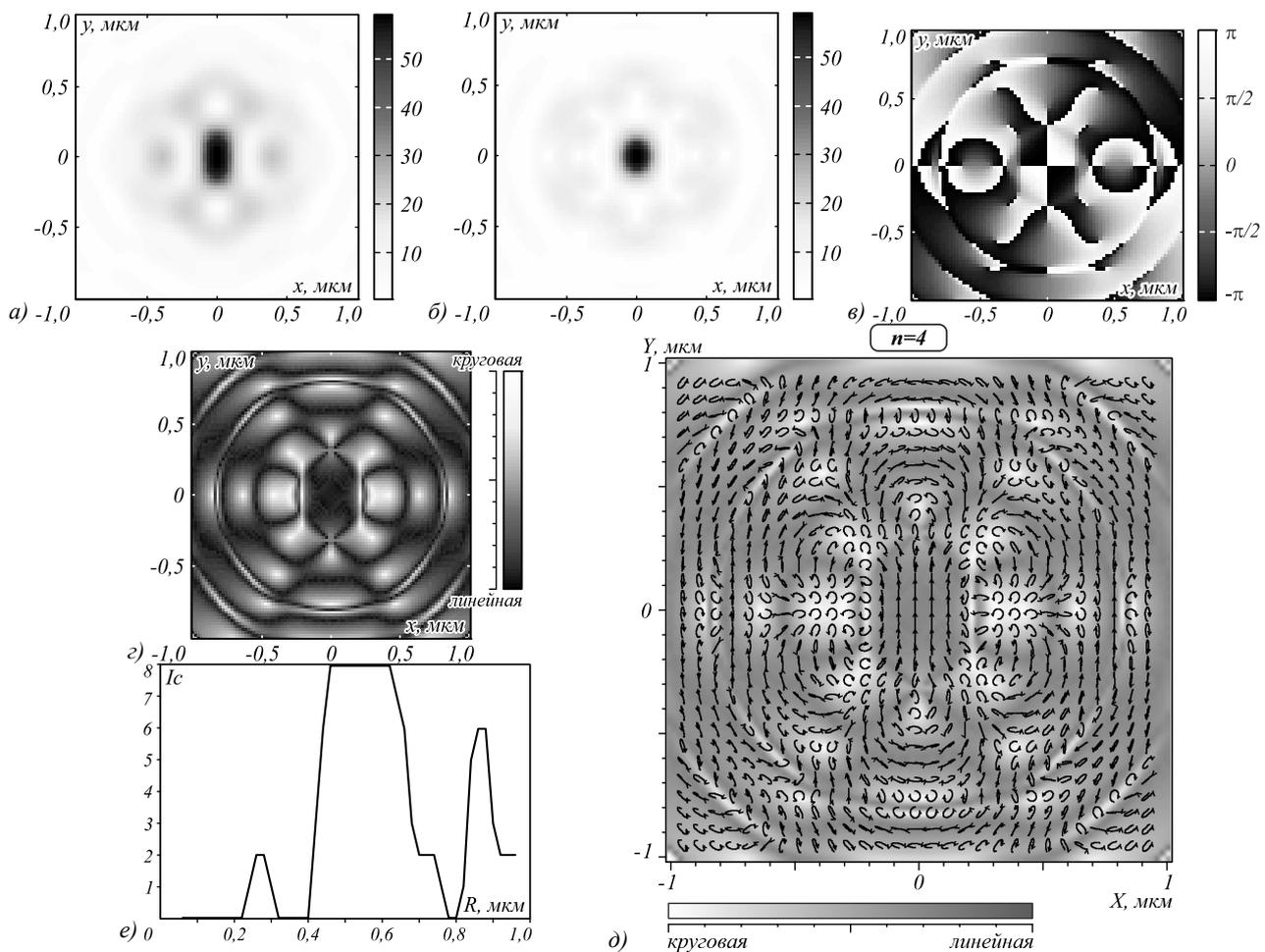


Рис. 4. Интенсивность $I = I_x + I_y + I_z$ (негатив) (а), амплитуда (б) и фаза (в) комплексного поля Стокса (17) при фокусировке светового поля (1) с $n = 4$. Индекс Стокса σ в зависимости от радиуса R окружности с центром в начале координат, вдоль которой рассчитывался набег фазы поля Стокса (г), распределение в фокусе точек с круговой, эллиптической и линейной поляризацией (д) и распределение эллиптической поляризации в фокусе, показанной графически (д) (размер кадра 1×1 мкм)

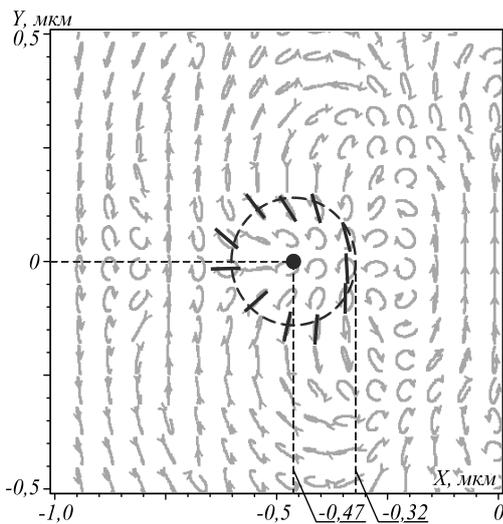


Рис. 5. Эллипсы поляризации части поля в фокусе, показанной на рис. 4е, в координатах $(-1 \text{ мкм} < x < 0; -0,5 \text{ мкм} < y < 0,5 \text{ мкм})$ и С-точка с индексом $I_c = 1/2$ и координатами $(-0,47 \text{ мкм}; 0)$ (чёрная точка), вокруг которой чёрными отрезками показаны большие оси эллипсов поляризации с центрами на окружности радиусом $0,15 \text{ мкм}$

На рис. 5 более детально показана окрестность одной из С-точек (чёрная жирная точка на рис. 5) и показан характерный наклон (топология типа «лимон») большой оси эллипсов поляризации, лежащих на окружности, проведенной вокруг С-точки. Видно, что оси эллипсов поляризации за оборот повернулись на угол π , то есть индекс С-точки равен $1/2$.

Заключение

В работе теоретически и численно исследовано гибридное векторное световое поле n -го порядка и его острая фокусировка апланатической системой. Начальное гибридное векторное световое поле в зависимости от полярного угла меняет поляризацию от линейной до эллиптической и круговой. В этом поле имеются С-линии, число которых равно номеру n . Они идут от центра по $2n$ лучам. Получены выражения для компонент вектора Стокса для этого поля, и показано, что индекс поляризационной сингулярности этого гибридного светового поля равен $n/2$. С помощью формализма Ричардса–Вольфа получены аналитические выражения для проекций вектора

напряженности электрического поля в остром фокусе, а также выражения для интенсивности. Показано, что при четном номере n интенсивность обладает симметрией n -го порядка и имеет С-точки, которые лежат на тех же линиях, которые были С-линиями в начальном поле. Получены аналитические выражения для проекций вектора Стокса в фокусе, из которых следует, что при нечетном номере n поле в фокусе чисто векторное и имеет несколько V-точек и не имеет С-точек.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Начальное векторное поле с точками поляризационной сингулярности», Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Векторное поле с точками поляризационной сингулярности в плоскости острого фокуса», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Моделирование».

Литература

1. **Nye, J.F.** Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations / J.F. Nye // *Proceedings of the Royal Society of London: Series A, Mathematical and Physical Sciences.* – 1983. – Vol. 387, Issue 1792. – P. 105-132.
2. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A.* – 1974. – Vol. 336, Issue 1605. – P. 165-190.
3. **Freund, I.** Polarization singularity indices in Gaussian laser beams / I. Freund // *Optics Communications.* – 2002. – Vol. 201. – P. 251-270.
4. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // *Advances in Optics and Photonics.* – 2009. – Vol. 1. – P. 1-57.
5. **Wang, X.** Generation of arbitrary vector beams with a spatial light modulator and a common path interferometric arrangement / X. Wang, J. Ding, W. Ni, C. Guo, H. Wang // *Optics Letters.* – 2007. – Vol. 32, Issue 24. – P. 3549-3551.
6. **Naidoo, D.** Controlled generation of higher-order Poincaré sphere beams from a laser / D. Naidoo, F.S. Roux, A. Dudley, I. Litvin, B. Piccirillo, L. Marrucci // *Nature Photonics.* – 2016. – Vol. 10. – P. 327-333.
7. **Marrucci, L.** Orbital spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo, D. Paparo // *Physical Review Letters.* – 2006. – Vol. 96. – P. 163905.
8. **Bomzon, Z.** Radially and azimuthally polarized beams generated by space-variant dielectric subwavelength gratings / Z. Bomzon, G. Biener, V. Kleiner, E. Hasman // *Optics Letters.* – 2002. – Vol. 27, Issue 5. – P. 285-287.
9. **Kotlyar, V.V.** Subwavelength grating-based metalens for focusing of laser light / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, L. O'Faolain // *Applied Physics Letters.* – 2019. – Vol. 114, Issue 14. – P. 141107. – DOI: 10.1063/1.5092760.
10. **Ren, Z.** Polarization interferometric prism: A versatile tool for generation of vector fields, measurement of topological charges, and implementation of a spin-orbit Controlled-Not gate / Z. Ren, Z. Chen, X. Wang, J. Ding, H. Wang // *Applied Physics Letters.* – 2021. – Vol. 118. – P. 011105.
11. **Kumar, V.** Topological structures in the Poynting vector field: an experimental realization / V. Kumar, N.K. Viswanathan // *Optics Letters.* – 2013. – Vol. 38, Issue 19. – P. 3886-3889.
12. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
13. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
14. **Arora, G.** Detection of degenerate Stokes index states / G. Arora, S. Deepa, S.N. Khan, P. Senthilkumaran // *Scientific Reports.* – 2020. – Vol. 10. – P. 20759.
15. **Arora, G.** Hybrid order Poincaré spheres for Stokes singularities / G. Arora, Ruchi, P. Senthilkumaran // *Optics Letters.* – 2020. – Vol. 45. – P. 5136-5139.
16. **Vyas, S.** Polarization singularities in superposition of vector beams / S. Vyas, Y. Kozawa, S. Sato // *Optics Express.* – 2013. – Vol. 21, Issue 7. – P. 8972-8986.
17. **Fadeyeva, T.A.** Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals / T.A. Fadeyeva, V.G. Shvedov, Y.V. Izdebskaya, A.V. Volyar, E. Brasselet, D.N. Neshev, A.S. Desyatnikov, W. Krolikowski, Y.S. Kivshar // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18, Issue 10. – P. 10848-10863.
18. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // *Proceedings of the Royal Society A.* – 1959. – Vol. 253, Issue 1274. – P. 358-379.
19. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series. Volume 2: Special functions / A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. – New York: Gordon and Breach, 1986.
20. **Котляр, В.В.** Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалев // *Компьютерная оптика.* – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 337-346. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.
21. **Kotlyar, V.V.** Inversion of the axial projection of the spin angular momentum in the region of the backward energy flow in sharp focus / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev // *Optics Express.* – 2020. – Vol. 28, Issue 23. – P. 33830-33839. – DOI: 10.1364/OE.401182.
22. **Kotlyar, V.V.** Converting an array of edge dislocations into a multivortex beam / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2021. – Vol. 38, Issue 5. – P. 719-726. – DOI: 10.1364/JOSAA.420963.
23. **Bauer, T.** Optical polarization Möbius strips and points of purely transverse spin density / T. Bauer, M. Neugebauer, G. Leuchs, P. Banzer // *Physics Review Letters.* – 2016. – Vol. 117. – P. 013601.
24. **Bauer, T.** Observation of optical polarization Möbius strips / T. Bauer, P. Banzer, E. Karimi, S. Orlov, A. Rubano, L. Marrucci, E. Santamato, R.W. Boyd, G. Leuchs // *Science.* – 2015. – Vol. 347, Issue 6225. – P. 964-966.
25. **Kotlyar, V.V.** Spin-orbit and orbit-spin conversion in the sharp focus of laser light: Theory and experiment / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, S.S. Stafeev // *Physical Review A.* – 2020. – Vol. 102, Issue 3. – P. 033502. – DOI: 10.1103/PhysRevA.102.033502.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.
E-mail: kotlyar@ipsiras.ru.

Стафеев Сергей Сергеевич, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук с 2012 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com. ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов.
E-mail: anton@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 6 апреля 2021 г. Окончательный вариант – 29 апреля 2021 г.

Focusing of a vector beam with C-lines of polarization singularity

V.V. Kotlyar^{1,2}, S.S. Stafeev^{1,2}, A.G. Nalimov^{1,2}

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

² Samara National Research University,
443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

We discuss the sharp focusing of an initial hybrid vector light field of the n -th order that has n C-lines (lines along which the polarization is circular). Using a complex Stokes field, it is shown that the polarization singularity index of such a field is equal to $n/2$. The initial field is shown to retain its singularity index in the focal plane. Analytical expressions are obtained for the intensity and Stokes vector components in the focal plane. It is shown theoretically and numerically that for an even-order field with $n=2p$, the intensity pattern at the focus has symmetry and instead of C-lines, C-points are formed, with the axes of polarization ellipses rotating around them. For $n=4$, there are C-points with singularity indices $1/2$ and with a “lemon” topology. Around such points, a surface that is formed by the polarization ellipses in a three-dimensional space has a Möbius strip topology. For an odd-order initial field with $n=2p+1$, the intensity pattern at the focus is shown to have no symmetry, with the field becoming pure vectorial (no elliptical polarization) and the linear polarization vectors rotating around V-points.

Keywords: vector light beam, topological charge, polarization singularity, optical vortex.

Citation: Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Focusing of a vector beam with C-lines of polarization singularity. *Computer Optics* 2021; 45(6): 800-808. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-903.

Acknowledgements: The work was partly funded the Russian Foundation for Basic Research under grant #18-29-20003 (Section “Initial vector field with polarization singularity points”), the Russian Science Foundation under grant #18-19-00595 (Section “Vector field with polarization singularity points in the plane of sharp focus”), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the “Crystallography and Photonics” Research Center of the RAS (Section “Simulation”)

References

- [1] Nye JF. Polarization effects in the diffraction of electromagnetic waves: the role of disclinations. *Proc R Soc Lond* 1983; 387(1792): 105-132.
 - [2] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proc Math Phys Eng Sci* 1974; 336(1605): 165-190.
 - [3] Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams. *Opt Commun* 2002; 201: 251-270.
 - [4] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1: 1-57.
 - [5] Wang X, Ding J, Ni W, Guo C, Wang H. Generation of arbitrary vector beams with a spatial light modulator and a common path interferometric arrangement. *Opt Lett* 2007; 32(24): 3549-3551.
 - [6] Naidoo D, Roux FS, Dudley A, Litvin I, Piccirillo B, Marrucci L. Controlled generation of higher-order Poincaré sphere beams from a laser. *Nat Photonics* 2016; 10: 327-333.
 - [7] Marrucci L, Manzo C, Paparo D. Orbital spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Phys Rev Lett* 2006; 96: 163905.
 - [8] Bomzon Z, Biener G, Kleiner V, Hasman E. Radially and azimuthally polarized beams generated by space-variant dielectric subwavelength gratings. *Opt Lett* 2002; 27(5): 285-287.
 - [9] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG, O’Faolain L. Sub-wavelength grating-based metalens for focusing of laser light. *Appl Phys Lett* 2019; 114(14): 141107. DOI: 10.1063/1.5092760.
 - [10] Ren Z, Chen Z, Wang X, Ding J, Wang H. Polarization interferometric prism: A versatile tool for generation of vector fields, measurement of topological charges, and implementation of a spin-orbit Controlled-Not gate. *Appl Phys Lett* 2021; 118: 011105.
 - [11] Kumar V, Viswanathan NK. Topological structures in the Poynting vector field: an experimental realization. *Opt Lett* 2013; 38(19): 3886-3889.
 - [12] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A–Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268.
 - [13] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
 - [14] Arora G, Deepa S, Khan SN, Senthilkumaran P. Detection of degenerate Stokes index states. *Sci Rep* 2020; 10: 20759.
 - [15] Arora G, Ruchi, Senthilkumaran P. Hybrid order Poincaré spheres for Stokes singularities. *Opt Lett* 2020; 45: 5136-5139.
 - [16] Vyas S, Kozawa Y, Sato S. Polarization singularities in superposition of vector beams. *Opt Express* 2013; 21(7): 8972-8986.
 - [17] Fadeyeva TA, Shvedov VG, Izdebskaya YV, Volyar AV, Brasselet E, Neshev DN, Desyatnikov AS, Krolikowski W, Kivshar YS. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals. *Opt Express* 2010; 18(10): 10848-10863.
-

-
- [18] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc Math Phys Eng Sci 1959; 253(1274): 358-379.
- [19] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI, Integrals and series. Volume 2: Special functions. New York: Gordon and Breach; 1986.
- [20] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Sharp focusing of a light field with polarization and phase singularities of an arbitrary order. Computer Optics 2019; 43(3): 337-346. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.
- [21] Kotlyar VV, Nalimov AG, Stafeev SS. Inversion of the axial projection of the spin angular momentum in the region of the backward energy flow in sharp focus. Opt Express 2020; 28(23): 33830-33839. DOI: 10.1364/OE.401182.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA. Converting an array of edge dislocations into a multivortex beam. J Opt Soc Am A 2021; 38(5): 719-726. DOI: 10.1364/JOSAA.420963.
- [23] Bauer T, Neugebauer M, Leuchs G, Banzer P. Optical polarization möbius strips and points of purely transverse spin density. Phys Rev Lett 2016; 117: 013601.
- [24] Bauer T, Banzer P, Karimi E, Orlov S, Rubano A, Marrucci L, Santamato E, Boyd RW, Leuchs G. Observation of optical polarization Möbius strips. Science 2015; 347(6225): 964-966.
- [25] Kotlyar VV, Nalimov AG, Kovalev AA, Porfirev AP, Stafeev SS. Spin-orbit and orbit-spin conversion in the sharp focus of laser light: Theory and experiment. Phys Rev A 2020; 102(3): 033502. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.033502.
-

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@smr.ru.

Sergey S. Stafeev (b. 1985) received Master’s degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com. ORCID: 0000-0002-7008-8007

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical modeling and program complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: anton@smr.ru.

Received April 6, 2021. The final version – April 29, 2021.
