

## Двойные пучки Лагерра–Гаусса

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>3</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.А. Савельева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34;

<sup>3</sup> Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН),  
443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

Показано, что двойные пучки Лагерра–Гаусса, комплексная амплитуда которых в начальной плоскости равна произведению амплитуд двух пучков Лагерра–Гаусса, можно представить как конечную суперпозицию обычных пучков Лагерра–Гаусса с определенными коэффициентами. Это позволяет получить явный вид для комплексной амплитуды двойных пучков Лагерра–Гаусса в зоне дифракции Френеля. Если оба пучка Лагерра–Гаусса одинаковые, то как частный случай получается пучок Лагерра–Гаусса «в квадрате», который является Фурье-инвариантным. Другой частный случай двойных пучков Лагерра–Гаусса получается тогда, когда азимутальные числа многочленов Лагерра равны  $n - m$  и  $n + m$ . Для такого пучка найдено явное выражение для комплексной амплитуды в Фурье-плоскости. Двойные пучки Лагерра–Гаусса можно так же, как и обычные пучки Лагерра–Гаусса, использовать для передачи информации, так как функции их комплексных амплитуд ортогональны по азимутальному числу и пучки несут орбитальный угловой момент, равный топологическому заряду.

**Ключевые слова:** пучок Лагерра–Гаусса, произведение комплексных амплитуд, Фурье-инвариантный пучок, топологический заряд.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Двойные пучки Лагерра–Гаусса / В.В. Котляр, Е.Г. Абрамочкин, А.А. Ковалёв, А.А. Савельева // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 6. – С. 872-876. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1177.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Savelyeva AA. Double Laguerre-Gaussian beams. Computer Optics 2022; 46(6): 872-876. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1177.

### Введение

Среди множества известных лазерных пучков самыми популярными и наиболее изученными являются пучки Лагерра–Гаусса (ЛГ) [1–3]. Эти пучки сначала рассматривались как моды внутри резонаторов. В работе [4] пучки ЛГ получены вне резонатора с помощью астигматического конвертора из пучков Эрмита–Гаусса (ЭГ). Особенный интерес к пучкам ЛГ возник после работы Л. Аллена и др. [5], в которой было установлено, что пучки ЛГ обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Известны обобщения пучков ЛГ в виде пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса [6, 7]. Известны элегантные [8] и эллиптические [9] пучки ЛГ. Интерес к пучкам ЛГ не ослабевает и в наши дни из-за их широкого применения в телекоммуникациях, манипулировании частицами, зондировании турбулентной атмосферы, квантовой информатике, охлаждении атомов. Например, в [10] проведено сравнение пучков ЛГ и пучков Бесселя–Гаусса (БГ). В [11–13] рассмотрены различные варианты генерации мод ЛГ на основе специального лазера, использующего усиленную внутрирезонаторную сферическую абберацию [11],  $q$ -пластинки [12] или специальной метаповерхности [13]. В [14] обсуждается взаимное преобразование между модами ЭГ и модами ЛГ. Важное значение имеют исследования элегантных

пучков ЛГ, демонстрирующих исключительные характеристики во многих областях, таких как оптическая связь и оптический захват [15]. Например, в работе [16] авторы предложили метод измерения топологического заряда частично когерентного элегантного пучка ЛГ. На основе пучков ЛГ разрабатываются новые типы оптических пучков, обладающих различными полезными свойствами. В [17] рассмотрено семейство асимметричных лазерных пучков ЛГ. В [18] предложен метод генерации таких пучков высокой мощности. Пучки ЛГ были использованы для генерации векторного пучка с пространственно-зависимой поляризацией в поперечном сечении посредством нелинейного магнитооптического вращения [19]. Новый класс составных вихревых пучков, получаемый путем коаксиального наложения пучков ЛГ с общим положением и параметром перетяжки, был представлен в [20]. В [21] был теоретически и экспериментально исследован новый тип частично когерентного пучка с необычной корреляционной функцией, названной эллиптической коррелированной моделью Лагерра–Гаусса–Шелла. Распределение интенсивности таких пучков в дальнем поле имеет эллиптический кольцеобразный профиль. Пучки ЛГ имеют высокую практическую значимость для оптических коммуникаций [22–25], микроманипулирования [26] и фото-возбуждения атомов [27].

В данной работе рассмотрен новый тип лазерного пучка – произведение двух пучков ЛГ или двойные пучки ЛГ. Комплексную амплитуду таких пучков можно разложить в конечную сумму обычных пучков ЛГ. Получено выражение для преобразования Френеля таких пучков. Рассмотрены некоторые частные случаи произведения двух пучков ЛГ, для которых найден явный вид Фурье-преобразования.

**1. Теоретическое основание**

Рассмотрим обычный ЛГ-пучок, комплексная амплитуда которого в начальной плоскости ( $z=0$ ) имеет вид [1]:

$$LG_{p,\pm m}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{re^{\pm i\varphi}}{w}\right)^m L_p^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты,  $p, \pm m$  – радиальный и азимутальный индексы,  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $L_p^m(x)$  – многочлен Лагерра. Так как пучок (1) является модовым пучком, то есть при распространении в свободном пространстве сохраняет структуру интенсивности, то комплексная амплитуда пучка ЛГ на любой плоскости  $z$  описывается выражением, подобным (1):

$$LG_{p,\pm m}(r, \varphi, z) = \frac{\exp(-i(2p+m+1)\arg\sigma)}{|\sigma|} \times \exp\left(\frac{izr^2}{z_0 w^2 |\sigma|^2}\right) LG_{p,\pm m}\left(\frac{r}{|\sigma|}, \varphi\right), \quad (2)$$

где  $\sigma = 1 + iz/z_0$  – вспомогательный комплексный параметр,  $z_0 = \pi w^2/\lambda$  – длина Рэлея и  $\lambda$  – длина волны. Тем самым,  $w|\sigma| = [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}$  – радиус Гауссова пучка,  $(2p+m+1)\arg\sigma = (2p+m+1)\arctg(z/z_0)$  – фаза Гоу.

Далее мы будем исследовать только ЛГ-пучки с неотрицательными азимутальными индексами.

Рассмотрим произведение двух пучков вида (1), которое будем называть двойным ЛГ (дЛГ)-пучком:

$$\begin{aligned} dLG_{p,q,m,n}(r, \varphi) &= \\ &= (\sqrt{2})^{m+n} LG_{p,m}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \varphi\right) LG_{q,n}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \varphi\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{re^{i\varphi}}{w}\right)^{m+n} L_p^m\left(\frac{r^2}{w^2}\right) L_q^n\left(\frac{r^2}{w^2}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Мы добавили масштабные множители  $\sqrt{2}$ , чтобы в итоге оставить неизменной Гауссову составляющую.

Семейство пучков (3) зависит от четырёх целочисленных индексов и является в некотором смысле обобщением обычных пучков ЛГ (1), так как при  $p=q=0$  совпадает с однокольцевыми пучками ЛГ:

$$dLG_{0,0,m,n}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{re^{i\varphi}}{w}\right)^{m+n} = LG_{0,m+n}(r, \varphi). \quad (4)$$

Из (3) следует, что произведение двух пучков ЛГ имеет топологический заряд (ТЗ), равный сумме ТЗ каждого из пучков ЛГ. Нормированный на мощность орбитальный угловой момент пучка (3) также равен сумме ТЗ каждого пучка ЛГ, то есть равен  $m+n$ .

Найдём теперь преобразование Френеля от функции (3), воспользовавшись разложением произведения двух многочленов Лагерра в конечную сумму многочленов Лагерра с удвоенным аргументом:

$$L_p^m(x)L_q^n(x) = \sum_{k=0}^{p+q} C_k L_k^{m+n}(2x), \quad (5)$$

где  $C_k = 2^{q-k} P_{p+q-k}^{(k+m-q, k+n-p)}(0) P_q^{(k-q, p-k)}(0)$  и  $P_n^{(\mu, \nu)}(\cdot)$  – многочлены Якоби [28]. Используя (5), можно представить амплитуду дЛГ-пучков (3) в виде конечной суммы обычных пучков ЛГ:

$$\begin{aligned} dLG_{p,q,m,n}(r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{re^{i\varphi}}{w}\right)^{m+n} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{p+q} C_k L_k^{m+n}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) = \sum_{k=0}^{p+q} C_k LG_{k,m+n}(r, \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет легко найти амплитуду поля (3) на любом расстоянии  $z$ :

$$dLG_{p,q,m,n}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{p+q} C_k LG_{k,m+n}(r, \varphi, z). \quad (7)$$

Из (7) видно, что дЛГ-пучки (3) при распространении в свободном пространстве не сохраняют свою структуру, поскольку в суперпозиции (7) присутствуют пучки ЛГ с разной фазой Гоу. Но так как распределение интенсивности в сечении пучка (7) имеет вид набора соосных колец, максимальное число которых равно  $p+q+1$ , то изменение картины дифракции при распространении пучка (7) сводится к перераспределению световой энергии между кольцами.

Рассмотрим далее частный случай дЛГ-пучков, когда оба многочлена Лагерра одинаковы. Мы назвали его пучком «ЛГ в квадрате»,  $(LG)^2$ . Такой пучок в начальной плоскости вместо (3) имеет амплитуду

$$\begin{aligned} dLG_{p,p,m,m}(r, \varphi) &= 2^m \left[ LG_{p,m}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \varphi\right) \right]^2 = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{re^{i\varphi}}{w}\right)^{2m} \left[ L_p^m\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в отличие от общего случая разложение (7) пучка  $(LG)^2$  состоит только из чётных членов (нечётные обнуляются), а сами коэффициенты, благодаря формуле (4.4.1.9) из [28], имеют более простой вид:

$$\begin{aligned} dLG_{p,p,m,m}(r, \varphi) &= \sum_{k=0}^p C_{2k} LG_{2k,2m}(r, \varphi), \\ C_{2k} &= C_{2k}(p, p, m, m) = \frac{(p+m)!(2k)!(2p-2k)!}{2^{2p} p! k! (m+k)! (p-k)!^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пучок (8) так же, как и общий пучок (3), не модо-  
вый и не сохраняет структуру интенсивности. Но в  
отличие от (3) пучок (8) сохраняет свою структуру в  
дальней зоне, то есть является Фурье-инвариантным.  
Это следует из разложения (9), так как хорошо из-  
вестно, что любая суперпозиция ЛГ-пучков является  
Фурье-инвариантной, если азимутальные индексы  
всех пучков в суперпозиции одинаковы, а радиальные  
индексы или все чётны, или все нечётны. Чтобы по-  
лучить явные аналитические выражения, определим  
сначала интегральное преобразование, обобщающее  
преобразования Френеля и Фурье:

$$\mathbf{FR}_{z,f}[F(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = \frac{-iz_0}{\pi z} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{iz_0}{z} \cdot \frac{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|^2}{w^2} - \frac{iz_0}{f} \cdot \frac{|\boldsymbol{\rho}|^2}{w^2}\right) F(\boldsymbol{\rho}) \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{w^2}. \quad (10)$$

При  $f = \infty$  и  $z = f$  получаем соответственно преоб-  
разование Френеля и преобразование Фурье с допол-  
нительным дефокусирующим множителем. Здесь  
 $\mathbf{r} = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$  и  $\boldsymbol{\rho} = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$  – двумерные  
векторы. Для краткости будем, как и ранее, записы-  
вать аргументы, просто указывая полярные ко-  
ординаты:  $F(\boldsymbol{\rho}) = F(\rho, \theta)$ .

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{FR}_{z,f}[\text{LG}_{p,\pm m}(\rho, \theta)](r, \varphi) = \frac{e^{-i(2p+m+1)\arg\tilde{\sigma}}}{|\tilde{\sigma}|} \times \exp\left(\frac{ir^2}{w^2|\tilde{\sigma}|^2} \left[\frac{z}{z_0} - \frac{z_0}{f} + \frac{z_0 z}{f^2}\right]\right) \text{LG}_{p,\pm m}\left(\frac{r}{|\tilde{\sigma}|}, \varphi\right), \quad (11)$$

где  $\tilde{\sigma} = \sigma - z/f = 1 - z/f + iz/z_0$ . В частности, если  
 $f = \infty$ , то (11) сводится к (2).

Если  $z = f$ , то  $\tilde{\sigma} = if/z_0$  и  $\arg\tilde{\sigma} = \pi/2$ . Поэтому (11)  
после сокращения на  $\exp(iz_0 r^2/fw^2)$  сводится к хоро-  
шо известной Фурье-инвариантности ЛГ-пучка:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2iz_0}{fw^2} r\rho \cos(\varphi-\theta)\right) \text{LG}_{p,\pm m}(\rho, \theta) \frac{\rho d\rho d\theta}{w^2} = \pi(-i)^{2p+m} \text{LG}_{p,\pm m}\left(\frac{z_0 r}{f}, \varphi\right). \quad (12)$$

Применяя это равенство к дЛГ-пучку (9), получаем

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2iz_0}{fw^2} r\rho \cos(\varphi-\theta)\right) d\text{LG}_{p,p,m,m}(\rho, \theta) \frac{\rho d\rho d\theta}{w^2} = \pi(-1)^m d\text{LG}_{p,p,m,m}\left(\frac{z_0 r}{f}, \varphi\right). \quad (13)$$

Можно показать, что Фурье-образ любого дЛГ-  
пучка (3) также является дЛГ-пучком:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2iz_0}{fw^2} r\rho \cos(\varphi-\theta)\right) d\text{LG}_{p,q,m,n}(\rho, \theta) \frac{\rho d\rho d\theta}{w^2} = \pi(-i)^{2p+m+2q+n} d\text{LG}_{p,q,q+n-p,p+m-q}\left(\frac{z_0 r}{f}, \varphi\right) \quad (14)$$

при условии неотрицательности азимутальных ин-  
дексов,  $q+n-p$  и  $p+m-q$ . Как простое следствие,  
любой дЛГ-пучок является Фурье-инвариантным, ес-  
ли  $p+m=q+n$ .

Из (6) легко получить выражение для «энергии»  
двойного пучка ЛГ, которое можно использовать для  
нормировки таких пучков:

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |d\text{LG}_{p,q,m,n}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi = \sum_{k=0}^{p+q} |C_k|^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\text{LG}_{k,m+n}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi = \frac{\pi W^2}{2^{m+n+1}} \sum_{k=0}^{p+q} |C_k|^2 \frac{(k+m+n)!}{k!}. \quad (15)$$

## 2. Численное моделирование

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и  
фазы стандартных пучков Лагерра–Гаусса (1) двух  
разных порядков и двойного пучка Лагерра–Гаусса (3)  
с этими же порядками в начальной плоскости и на рас-  
стоянии Рэлея. Распределения в начальной плоскости  
получены с помощью формул (1) и (3), а на расстоянии  
Рэлея – с помощью преобразования Френеля.

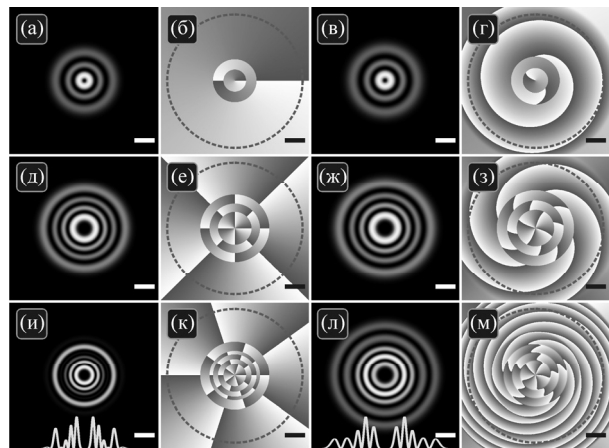


Рис. 1. Распределения интенсивности (столбцы 1 и 3)  
и фазы (столбцы 2 и 4, тёмный цвет – 0, белый цвет –  $2\pi$ )  
стандартных пучков Лагерра–Гаусса (1) порядков  $(m, p) =$   
 $(1, 2)$  (ряд 1) и  $(n, q) = (4, 3)$  (ряд 2), а также двойного пучка  
Лагерра–Гаусса (3) порядка  $(m, p, n, q) = (1, 2, 4, 3)$  (ряд 3)  
в начальной плоскости  $z = 0$  (столбцы 1 и 2)  
и на расстоянии Рэлея  $z = z_0$  (столбцы 3 и 4) при следующих  
параметрах: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  
 $w = 0,5$  мм. Масштабная метка на всех рисунках означает  
1 мм. Пунктирная окружность на распределениях фазы –  
контур, по которому рассчитывался топологический  
заряд. Кривые на распределениях в нижнем ряду (и, л)  
показывают сечения интенсивности

Из рис. 1 видно, что распределения интенсивности  
сохраняются при распространении обоих стандар-  
тных пучков ЛГ, но у двойного пучка ЛГ распределе-  
ние интенсивности меняется. В частности, в начальной  
плоскости самым ярким является первое кольцо  
(наименьшего радиуса), а на расстоянии Рэлея – вто-

рое. Согласно формуле (3), у пучка должно быть  $p+q+1=6$  колец интенсивности. Однако на рис. 1*u* видно только четыре, а на рис. 1*л* – пять. Тем не менее сечение интенсивности на рис. 1*u* и распределение фазы рис. 1*к* подтверждают соответственно наличие шести световых колец и пяти теневых колец между ними (где фаза меняется на  $\pi$ ). На рис. 1*л* два кольца объединяются и их остаётся пять.

Как и предсказывает формула (3), ТЗ пучка (3) равен сумме ТЗ пучков (1) ( $1+4=5$ ). Это видно из распределений фазы: на рис. 1*в,з* ТЗ равен 1 (один скачок фазы на  $2\pi$  вдоль пунктирной окружности), на рис. 1*е,з* ТЗ равен 4 (четыре скачка фазы вдоль окружности), а на рис. 1*к,м* ТЗ равен 5 (пять скачков фазы вдоль окружности).

### Заключение

В данной работе рассмотрено 4-индексное семейство вихревых пучков, пересекающееся с семейством хорошо известных пучков ЛГ. Эти пучки представляют собой произведение двух разных пучков ЛГ с одинаковым радиусом перетяжки (сокращенно дЛГ-пучки). Если у дЛГ-пучка оба многочлена Лагерра имеют одинаковые индексы, то такой пучок можно назвать пучком Лагерра–Гаусса в квадрате, (ЛГ)<sup>2</sup>. Получено разложение дЛГ-пучка в конечную сумму обычных пучков ЛГ. Получен явный вид Фурье-преобразования для пучка (ЛГ)<sup>2</sup>. Двойные ЛГ-пучки могут найти применение в оптических коммуникациях [22, 24].

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-12-00137).

### References

- [1] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. *Appl Opt* 1966; 5(10): 1550-1567. DOI: 10.1364/AO.5.001550.
- [2] Zauderer E. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 1986; 3(4): 465-469. DOI: 10.1364/JOSAA.3.000465.
- [3] Wünsche A. Generalized Gaussian beam solutions of paraxial optics and their connection to a hidden symmetry. *J Opt Soc Am A* 1989; 6(9): 1320-1329. DOI: 10.1364/JOSAA.6.001320.
- [4] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [5] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [6] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A–Pure Appl Opt* 2004; 6(5): S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [7] Abramochkin E, Razuvaeva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [8] Zhou G, Ru G. Orbital angular momentum density of an elegant Laguerre-Gaussian beam. *Prog Electromagn Res* 2013; 141: 751-768. DOI: 10.2528/PIER13051608.
- [9] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(1): 43-56. DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
- [10] Mendoza-Hernández J, Arroyo-Carrasco ML, Iturbe-Castillo MD, Chávez-Cerda S. Laguerre-Gauss beams versus Bessel beams showdown: peer comparison. *Opt Lett* 2015; 40(16): 3739-3742. DOI: 10.1364/OL.40.003739.
- [11] Wang M, Ma Y, Sheng Q, He X, Liu J, Shi W, Yao J, Omatsu T. Laguerre-Gaussian beam generation via enhanced intracavity spherical aberration. *Opt Express* 2021; 29(17): 27783-27790. DOI: 10.1364/OE.436110.
- [12] Rafayelyan M, Brasselet E. Laguerre-Gaussian modal q-plates. *Opt Lett* 2017; 42(10): 1966-1969. DOI: 10.1364/OL.42.001966.
- [13] Mao H, Ren Y-H, Yu Y, Yu Z, Sun X, Zhang S, Wong KKY. Broadband meta-converters for multiple Laguerre-Gaussian modes. *Photon Res* 2021; 9(9): 1689-1698. DOI: 10.1364/PRJ.423344.
- [14] Liang G, Wang Q. Controllable conversion between Hermite Gaussian and Laguerre Gaussian modes due to cross phase. *Opt Express* 2019; 27(8): 10684-10691. DOI: 10.1364/OE.27.010684.
- [15] Longman A, Fedosejevs R. Optimal Laguerre-Gaussian modes for high-intensity optical vortices. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(5): 841-848. DOI: 10.1364/JOSAA.389031.
- [16] Dong M, Lu X-Y, Zhao C, Cai Y, Yang Y. Measuring topological charge of partially coherent elegant Laguerre-Gaussian beam. *Opt Express* 2018; 26(25): 33035-33043. DOI: 10.1364/OE.26.033035.
- [17] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- [18] Hsieh YH, Lai YH, Hsieh MX, Huang KF, Chen YF. Generating high-power asymmetrical Laguerre-Gaussian modes and exploring topological charges distribution. *Opt Express* 2018; 26(24): 31738-31749. DOI: 10.1364/OE.26.031738.
- [19] Abad GGM, Mahmoudi M. Laguerre-Gaussian modes generated vector beam via nonlinear magneto-optical rotation. *Sci Rep* 2021; 11: 5972. DOI: 10.1038/s41598-021-85249-8.
- [20] Huang S, Miao Z, He C, Pang F, Li Y, Wang T. Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams. *Opt Lasers Eng* 2016; 78: 132-139. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2015.10.008.
- [21] Chen Y, Liu L, Wang F, Zhao C, Cai Y. Elliptical Laguerre-Gaussian correlated Schell-model beam. *Opt Express* 2014; 22(11): 13975-13987. DOI: 10.1364/OE.22.013975.
- [22] Pang K, Liu C, Xie G, Ren Y, Zhao Z, Zhang R, Cao Y, Zhao J, Song H, Song H, Li L, Willner AN, Tur M, Boyd RW, Willner AE. Demonstration of a 10 Mbit/s quantum communication link by encoding data on two Laguerre-Gaussian modes with different radial indices. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5639-5642. DOI: 10.1364/OL.43.005639.
- [23] Doster T, Watnik AT. Laguerre-Gauss and Bessel-Gauss beams propagation through turbulence: analysis of channel efficiency. *Appl Opt* 2016; 55(36): 10239-10246. DOI: 10.1364/AO.55.010239.
- [24] Zeng J, Liu X, Zhao C, Wang F, Gbur G, Cai Y. Spiral spectrum of a Laguerre-Gaussian beam propagating in anisotropic non-Kolmogorov turbulent atmosphere along horizontal path. *Opt Express* 2019; 27(18): 25342-25356. DOI: 10.1364/OE.27.025342.
- [25] Cox MA, Maqondo L, Kara R, Milione G, Cheng L, Forbes A. The resilience of Hermite- and Laguerre-

- Gaussian modes in turbulence. J Lightw Technol 2019; 37(16): 3911-3917. DOI: 10.1109/JLT.2019.2905630.
- [26] Otsu T, Ando T, Takiguchi Y, Ohtake Y, Toyoda H, Itoh H. Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam. Sci Rep 2014; 4(1): 4579. DOI: 10.1038/srep04579.
- [27] Peshkov AA, Seipt D, Surzhykov A, Fritzsche S. Photoexcitation of atoms by Laguerre-Gaussian beams. Phys Rev A 2017; 96(2): 023407. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023407.
- [28] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.

---

**Сведения об авторах**

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 871 этого номера.

Сведения об авторе **Абрамочкин Евгений Григорьевич** см. стр. 863 этого номера.

**Савельева Александра Александровна**, 1996 года рождения, в 2020 году окончила Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и информатика». Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы, FDTD-метод, острая фокусировка света. E-mail: [lexis2450@gmail.com](mailto:lexis2450@gmail.com).

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 20 июня 2022 г. Окончательный вариант – 13 августа 2022 г.*

---

---

# Double Laguerre-Gaussian beams

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, E.G. Abramochkin<sup>3</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.A. Savelyeva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34,

<sup>3</sup>Lebedev Physical Institute, 443011, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

We show here that the product of two Laguerre-Gaussian (LG) beams, i.e. double LG beams (dLG), can be represented as finite superposition of conventional LG beams with certain coefficients that are expressed via zero-argument Jacobi polynomials. This allows obtaining an explicit expression for the complex amplitude of the dLG beams in the Fresnel diffraction zone. Generally, such beams do not retain their structure, changing shape upon free-space propagation. However, if both LG beams are of the same order, we obtain a special case of a "squared" LG beam, which is Fourier-invariant. Another special case of the dLG beams is obtained when the azimuthal indices of the Laguerre polynomials are equal to  $n-m$  and  $n+m$ . For such a beam, an explicit expression is obtained for the complex amplitude in the Fourier plane. We show that if the lower indices of the constituent LG beams are the same, such a double LG beam is also Fourier-invariant. Similar to conventional LG beams, the product of LG beams can be used for optical data transmission, since they are characterized by azimuthal orthogonality and carry an orbital angular momentum equal to the topological charge.

**Keywords:** Laguerre-Gaussian beam, product of complex amplitudes, Fourier-invariant beam, topological charge.

**Citation:** Kotlyar VV, Abramochkin EG, Kovalev AA, Savelyeva AA. Double Laguerre-Gaussian beams. *Computer Optics* 2022; 46(6): 872-876. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1177.

**Acknowledgements:** This work was funded by the Russian Science Foundation under Project No. 22-12-00137.

---

## Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

**Alexandra Alexandrovna Savelyeva**, (b. 1996) in 2020 graduated from the Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov – SSAU with a degree in Applied Mathematics and Informatics. Research interests: diffractive optics, numerical methods, FDTD method, sharp focusing of light. E-mail: [lexis2450@gmail.com](mailto:lexis2450@gmail.com).

---

Received June 20, 2022. The final version – August 13, 2022.

---