

# ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ЧАСТЬ 1. МУЛЬТИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.Г. Лабунец<sup>1</sup>, Е.В. Кох<sup>1</sup>, Е. Остхаймер<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия,

<sup>2</sup> Capricat LLC, Pompano Beach, Florida, USA

### Аннотация

Разрабатываются новые модели многоканальных (мульти- и гиперспектральных) изображений с использованием коммутативных гиперкомплексных алгебр (триплетных – для цветных и мультиплетных – для многоканальных). Гиперкомплексные алгебры обобщают алгебру комплексных чисел. Они содержат гиперкомплексные числа, представляющие собой линейную комбинацию нескольких мнимых единиц. Главная цель работы – показать, что коммутативные гиперкомплексные числа могут быть использованы при обработке многоканальных изображений в естественной и эффективной манере. В этой части работы мы предполагаем, что мозг животных оперирует гиперкомплексными числами, когда обрабатывает многоканальные изображения, которые возникают на сетине. В нашем подходе каждый многоканальный пиксел рассматривается не как  $K$ -мерный ( $K$ -Dimension) вектор, а как  $K$ -D гиперкомплексное число, где  $K$  есть число различных оптических каналов. Это создает эффективную математическую основу для различных функционально-числовых преобразований многоканальных изображений.

**Ключевые слова:** многоканальные изображения, гиперкомплексные алгебры, обработка изображений.

**Цитирование:** Лабунец, В.Г. Алгебраические модели и методы компьютерной обработки изображений. Часть 1. Мультиплетные модели многоканальных изображений // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 1. – С. 84-95. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-84-95.

### Введение

Многоканальные изображения нашли широкое применение в системах дистанционного зондирования Земли при решении различных научных и прикладных задач [1–4]. В этой работе мы предлагаем новые модели многоканальных (мульти- и гиперспектральных) изображений с использованием коммутативных гиперкомплексных алгебр (триплетных – для цветных и мультиплетных – для многоканальных). Термин «многоканальные» изображения используется для обозначения изображений более чем с одной компонентой. Они формируются из ряда изображений  $f_{\lambda_0}(\mathbf{x}), f_{\lambda_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{\lambda_{K-1}}(\mathbf{x})$ , полученных в различных оптических диапазонах с длинами волн  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{K-1}$ , называемых спектральными каналами, где  $K$  – число различных оптических каналов. Простым примером является цветное изображение  $\mathbf{f}_{Col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y))$  с красной  $f_R(x, y)$ , зеленой  $f_G(x, y)$  и голубой  $f_B(x, y)$  компонентами.

Если изображение собрано из нескольких единиц каналов (меньше, чем 10), то оно называется мультиспектральным, в то время как изображение, состоящее из нескольких десятков или сотен каналов, называется гиперспектральным (конечно, это деление носит условный характер). В данной работе используется термин многоканальные (или  $K$ -канальные) изображения для обозначения подобных изображений. Многоканальные изображения могут рассматриваться как  $n$ -D  $K$ -компонентные (или векторнозначные) сигналы [1–4]:

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K$$

со значениями, лежащими в  $K$ -D перцептуально векторном пространстве  $\mathbf{V}^K$  (бихроматическом  $\mathbf{V}^2$ , цветном  $\mathbf{V}_{rgb}^3$  или многоканальном  $\mathbf{V}^K$ ), где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Следующие случаи наиболее интересны.

1. 2D и 3D бихроматические изображения

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2,$$

$$\mathbf{f}_b(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}^2.$$

2. 2D и 3D трихроматические (цветные) изображения

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3,$$

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3.$$

3. 2D и 3D  $K$ -канальные изображения

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3,$$

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3.$$

4. 2D и 3D бихроматические бинокулярные (двухкамерные) изображения [5, 6]

$$\mathbf{f}_b^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}_b^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_b^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2,$$

$$\mathbf{f}_b^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}_b^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_b^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2.$$

5. 2D и 3D трихроматические (цветные) бинокулярные изображения

$$\mathbf{f}_c^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}_b^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_b^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3,$$

$$\mathbf{f}_c^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}_c^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_c^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3.$$

6. 2D и 3D K-канальные бинокулярные изображения

$$\mathbf{f}_m^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}_m^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_m^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^K \oplus {}^R\mathbf{V}^K,$$

$$\mathbf{f}_m^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}_m^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}_m^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^K \oplus {}^R\mathbf{V}^K,$$

где  $\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})$  – изображения, возникающие на ретине левого и правого глаз соответственно.

Для обработки и распознавания изображений мы превращаем перцептуальное пространство  $\mathbf{V}^K$  в соответствующие гиперкомплексные алгебры (и называем их *перцептуальными алгебрами*). Мы разрабатываем алгебраические модели для двух уровней мозга (первый уровень – ретина, второй – VisualCortex), используя различные гиперкомплексные алгебры: коммутативные – для первого уровня, где идёт обработка и преобразование изображения, и некоммутативные – для второго уровня, где происходит их распознавание. Привлечение некоммутативных алгебр связано с тем, что многие геометрические преобразования изображений (совместные растяжения, вращения, аффинные, проективные) принадлежат некоммутативным группам. Оказывается, что каждое такое преобразование можно описать подходящим многомерным гиперкомплексным числом (например, кватернионами – для вращений 3D-изображений).

Одна из наших гипотез состоит в том, что мозг животных должен иметь врождённые знания о подобных числах и уметь ими оперировать в режиме распознавания образов. В третьем параграфе работы мы покажем, что алгебраические модели многоканальных изображений позволяют разработать простые, наглядные и эффективные (с вычислительной точки зрения) инвариантные алгоритмы распознавания таких изображений с использованием быстрых преобразований Фурье–Клиффорда–Галуа.

В предлагаемом алгебро-геометрическом подходе каждый многоканальный пиксель рассматривается не как K-D вектор, а как K-D гиперкомплексное число (заметим, что числовая природа не отменяет векторной природы гиперкомплексного числа: просто векторное пространство оснащается операцией векторного умножения векторов, которые интерпретируются как числа).

В первой части этой работы мы интерпретируем многоканальное изображение, возникающее на ретине глаза, как мультиплетно-значный сигнал

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) = \sum_{s=0}^{K-1} f_s(\mathbf{x})\epsilon^s =$$

$$= f_0(\mathbf{x})\epsilon^0 + f_1(\mathbf{x})\epsilon^1 + \dots + f_{K-1}(\mathbf{x})\epsilon^{K-1},$$

который принимает значения в одной из следующих трёх коммутативных алгебр

$$Alg_K^{Ret}(\mathbf{R} | \epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^{K-1}) = Alg_K^{Ret},$$

где  $\epsilon^K = -1$ ,  $\epsilon^K = 0$  или  $\epsilon^K = +1$ . Здесь  $\epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^{K-1}$  – гипермнимые единицы (гиперспектральные единицы) с коммутативным законом умножения

$$\epsilon^r \cdot \epsilon^s = \begin{cases} \epsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \epsilon^K = +1, \\ \text{Hev}(l-m)\epsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \epsilon^K = 0, \\ \text{Sign}(l-m)\epsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \epsilon^K = -1, \end{cases}$$

где  $l \oplus m$  – сложение по модулю K,

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{Hev}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

– Signum и Heaviside функции.

Во втором параграфе работы многоканальные изображения, возникающие в отделе Visual Cortex (VC) головного мозга, будут интерпретироваться как сигналы, принимающие значения в некоторой алгебре Клиффорда

$$Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, \dots, J_{K-1}) =$$

$$= Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)} = Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)}:$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})) =$$

$$= f_1(\mathbf{x})J_1 + f_2(\mathbf{x})J_2 + \dots + f_K(\mathbf{x})J_K,$$

где  $J_1, J_2, \dots, J_K$  – гипермнимые единицы со следующим некоммутативным законом умножения:

$$J_r \cdot J_s = -J_s \cdot J_r, \quad \forall s, r = \overline{1, K},$$

$$J_s^2 = \begin{cases} -1, & s = 1, 2, \dots, u, \\ 0, & s = u + 1, u + 2, \dots, u + v, \\ +1, & s = u + v + 1, u + v + 2, \dots, u + v + w, \end{cases}$$

где  $u + v + w = K$  и  $u, v, w$  – набор целых чисел, характеризующих количество гиперболических, эллиптических и параболических мнимых единиц.

В данной работе мы опираемся на следующие гипотезы [7]:

1. Мозг интерпретирует каждый пиксель изображения не как многомерный вектор, а как многомерное гиперкомплексное число. Если мы допускаем существование векторной природы пикселей, то можно пойти и дальше: допустить возможность умножения этих векторов. Тем самым мы не опровергаем векторную природу пикселя, а обогащаем её дополнительными математическими возможностями. Речь идёт о расширении возможностей математического языка описания реальной действительности за счёт введения операции умножения пикселей с векторной природой. Как оказывается, такое расширение позволяет разрабатывать новые алгоритмы обработки и распознавания многоканальных изображений.

2. Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные гиперкомплексные алгебры для обработки цветных и многоканальных изображений. По-видимому, отдел Visual Cortex обладает способностью оперировать пикселями изображения как с гиперкомплексными числами.
3. Головной мозг использует различные алгебры на двух уровнях: коммутативные алгебры на уровне ретины при их обработке и некоммутативные алгебры на уровне VC при распознавании изображений.

**1. Алгебраические модели бихроматических изображений**

2D бихроматические изображения

$$f(x_1, x_2) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2$$

обладают двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^2, \mathbf{V}^2$  – физическим и визуальным 2D-пространствами. В соответствии с [7, 8] мы оснащаем эти пространства структурами 2D-алгебр обобщённых комплексных чисел  $Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$  и  $Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J)$ , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 \rightarrow Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) &:= \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \\ &= \{z = x_1 + Ix_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^2 \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J) &:= \mathbf{R} + \mathbf{R}J = \\ &= \{Z = r + Jg \mid r, g \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

где  $I$  и  $J$  – пространственная и бихроматическая мнимые единицы. Эти алгебры называются *пространственной* и *бихроматической алгебрами* [9, 10] физического  $\mathbf{R}^2$  и перцептуального  $\mathbf{V}^2$  пространств. Имеется три пространственные алгебры.

Если  $I^2 \equiv I_-^2 = -1$ , то алгебра

$$Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) = \{z = x + I_-y \mid x, y \in \mathbf{R}; I_-^2 = -1\}$$

является полем комплексных пространственных чисел, где  $I_- = i$  – обычная классическая (эллиптическая) мнимая единица.

Если  $I^2 \equiv I_+^2 = +1$ , то алгебра

$$Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) = \{z = x + I_+y \mid x, y \in \mathbf{R}; I_+^2 = +1\}$$

является кольцом двоичных пространственных комплексных чисел, где  $I_+ = e$  – классическая двойная (гиперболическая) мнимая единица.

Если  $I^2 \equiv I_0^2 = 0$ , то алгебра

$$Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) = \{z = x + I_0y \mid x, y \in \mathbf{R}; I_0^2 = -1\}$$

является кольцом дуальных пространственных комплексных, где  $I_0 \equiv \varepsilon$  – классическая дуальная (параболическая) мнимая единица.

Как будет показано ниже, эти алгебры описывают различные геометрии физического пространства (Евклидову, Минковского и геометрию Галилея). Это означает, что на алгебраическом языке можно достаточно просто описывать различные геометрические

преобразования изображений различной геометрической природы.

Аналогично существуют три перцептуальных алгебры с различными геометрическими (метрическими) свойствами:

если  $J^2 \equiv J_-^2 = -1$ , то перцептуальная алгебра

$$Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_-) = \{z = x + J_-y \mid x, y \in \mathbf{R}; J_-^2 = -1\}$$

– поле комплексных бихроматических чисел, где  $J_-$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной классической мнимой единице;

если  $J^2 \equiv J_+^2 = +1$ , то перцептуальная алгебра

$$Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_+) = \{z = x + J_+y \mid x, y \in \mathbf{R}; J_+^2 = -1\}$$

– кольцо двойных бихроматических чисел, где  $J_+$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной двойной единице  $J_+ \sim e$ ;

если  $J^2 \equiv J_0^2 = 0$ , то перцептуальная алгебра

$$Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_0) = \{z = x + J_0y \mid x, y \in \mathbf{R}; J_0^2 = -1\}$$

представляет собой кольцо дуальных бихроматических чисел, где  $J_0$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной дуальной единице  $J_0 \sim e$ .

Существует девять алгебраических моделей бихроматических изображений

$$f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J) :$$

$$^{-,-} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_-),$$

$$^{-,0} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_0),$$

$$^{-,+} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_+),$$

$$^{0,-} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_-),$$

$$^{0,0} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_0),$$

$$^{0,+} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_+),$$

$$^{+,-} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_-),$$

$$^{+,0} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_0),$$

$$^{+,+} f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_+).$$

Для обозначения шести алгебр будем пользоваться символом  $Alg_2^{Ret}$  или символом  $Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|1, B)$ , где

$$Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|1, B) = \begin{cases} Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, B), & B = I, \\ Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, B), & B = J. \end{cases}$$

В алгебрах  $Alg_2^{Ret}$  введём операцию сопряжения, которая отображает каждый элемент  $Z = a + Bb$  в элемент  $\bar{Z} = a + B\bar{b} = a - Bb$ .

**Определение 1.** Пусть  $Z = a + Bb$ , тогда квадратичная форма  $N(Z) := \|Z\| = Z\bar{Z} = a^2 - B^2b^2$  называется псевдонормой числа  $Z = a + Bb$ , а  $|Z| = \sqrt{N(Z)} = \sqrt{Z\bar{Z}}$  – его модулем.

Очевидно,  $N(Z_1Z_2) = N(Z_1)N(Z_2)$ . Поэтому 2D-алгебры  $Alg_2^{Sp} \equiv Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$  и  $Alg_2^{Vis} \equiv Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J)$  легко превратить в псевдометрические пространства:

$$\begin{aligned}
 Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, J) &\rightarrow \mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)} = \langle \mathbf{R}^2, \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle, \\
 Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J) &\rightarrow \mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)} = \langle \mathbf{V}^2, \rho(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2) \rangle,
 \end{aligned}$$

если в них определить следующие псевдометрики

$$\begin{aligned}
 \rho(Z_1, Z_2) &:= \sqrt{(Z_2 - Z_1)(\overline{Z_2 - Z_1})} = \\
 &= \sqrt{(a_2 - a_1)^2 - J^2(b_2 - b_1)^2} = \\
 &= \sqrt{s_1(a_2 - a_1)^2 + s_2(b_2 - b_1)^2} = \\
 &= \begin{cases} \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}, & Z \in Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_-), \\ \sqrt{(a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2}, & Z \in Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_+), \\ |a_2 - a_1|, & Z \in Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_0), \end{cases}
 \end{aligned}$$

где  $Z_1 = a_1 + Bb_1$ ,  $Z_2 = a_2 + Bb_2$ , а два символа  $(s_1, s_2)$  в выражениях  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)}$ ,  $\mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)}$  обозначают сигнатуру псевдометрики ( $s_1 = +1, s_2 = -1, 0, +1$ ). После введения псевдометрики алгебры  $Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|1, B)$  трансформируются в следующие псевдометрические пространства  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(s_1, s_2)}$ :

- двумерная геометрия Евклида  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(+, +)} = \langle Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_-); \rho \rangle$  (пространственная  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, +)}$  и перцептуальная  $\mathbf{Geo}_2^{Vis(+, +)}$  геометрии);
- двумерная геометрия Минковского  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(+, -)} = \langle Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_-); \rho \rangle$  (пространственная  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, -)}$  и перцептуальная  $\mathbf{Geo}_2^{Vis(+, -)}$  геометрии);
- двумерная геометрия Галилея  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(+, 0)} = \langle Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|B_0); \rho \rangle$  (пространственная  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, 0)}$  и перцептуальная геометрии  $\mathbf{Geo}_2^{Vis(+, 0)}$ ).

**Определение 2.** Множество всех точек обобщённой комплексной плоскости  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(s_1, s_2)}$ , удовлетворяющее уравнению  $|Z|^2 = a^2 - B^2b^2 = R^2$  называется  $\mathbf{Geo}_2^{Ret(s_1, s_2)}$ -окружностью радиуса  $R$  с центром в начале координат.

**Пример 1.** Пусть  $Alg_2^{Ret}(\mathbf{R}|1, B) \equiv Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ , тогда имеется три типа окружностей:  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, +)}$ -окружность – классическая Евклидова окружность,  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, -)}$ -окружность (гиперболическая окружность) – окружность Минковского и  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(+, 0)}$ -окружность (окружность Галилея) – две параллельные линии.

Пусть  $Z = a + Bb$  – произвольное обобщённое комплексное число (пространственное или бихроматическое), тогда число  $Z_0 = Z/|Z|$  будет иметь единичный модуль, если  $|Z| = R \neq 0$ . Легко проверить, что

$$Z = |Z| \cdot \left( \frac{a}{|Z|} + B \frac{b}{|Z|} \right) = R \cdot (\cos \alpha + B \cdot \sin \alpha) = R \cdot e^{B\theta},$$

где  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$  – тригонометрические функции Евклида (классические  $\cos \alpha = \cos \alpha$ ,  $\sin \alpha = \sin \alpha$ ), Минковского (гиперболические  $\cos \alpha = \text{ch } \alpha$ ,  $\sin \alpha = \text{sh } \alpha$ ) и Галилея ( $\cos \alpha = \text{cg } \alpha$ ,  $\sin \alpha = \text{sg } \alpha$ ).

**Определение 3.** Бихроматическим изображением  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|1, J)$  называется  $Alg_2^{Vis}(\mathbf{R}|J)$ -значный сигнал, зависящий от обобщённой комплексной переменной  $\mathbf{z} \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ , т.е.  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = f_0(x_1 + Ix_2) + J \cdot f_1(x_1 + Ix_2)$ .

**Определение 4.** Преобразования

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}' &= \mathbf{z} + \mathbf{w}, & \mathbf{z}' &= \lambda \mathbf{z}, & \mathbf{z}' &= e^{J\theta_{sp}} \mathbf{z}, \\
 \mathcal{Z}' &= \mathcal{Z} + \mathcal{W}, & \mathcal{Z}' &= \mu \mathcal{Z}, & \mathcal{Z}' &= e^{J\theta_{ch}} \mathcal{Z},
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in Alg_2^{Sp}$  и  $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}', \mathcal{W} \in Alg_2^{Vis}$  называются трансляцией, масштабированием и вращением физического  $\mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)}$  и бихроматического  $\mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)}$  пространств соответственно.

Эти преобразования формируют группы:

- 1) две группы пространственных  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)})$  и бихроматических  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)})$  трансляций,
- 2) две группы пространственных  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)})$  и бихроматических  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)})$  масштабных преобразований,
- 3) две группы физических  $\mathbf{Rot}(\mathbf{Geo}_2^{Sp(s_1, s_2)})$  и бихроматических  $\mathbf{Rot}(\mathbf{Geo}_2^{Vis(s_1, s_2)})$  вращений.

Преобразования изображений (геометрические и цветовые искажения) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр. Эти искажения могут быть вызваны:

- 1) пространственными преобразованиями (трансляциями  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , вращениями  $\mathbf{z}' = e^{J\theta_{sp}} \mathbf{z}$ , изменениями масштаба  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ ) и
  - 2) бихроматическими преобразованиями (бихроматической трансляцией  $\mathbf{f} + \mathcal{W}$ , преобразованием цвета  $e^{J\theta_{ch}} \mathbf{f}$  и преобразованием насыщенности  $\mu \mathbf{f}$ ).
- Если  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$  – некоторое исходное бихроматическое изображение, то изображение

$$\mu \cdot e^{J\theta_{ch}} \cdot \mathcal{W} \mathbf{f}_{\lambda, \Phi_{sp}, \mathbf{w}}(\mathbf{z}) = \mu e^{J\theta_{ch}} \cdot \mathbf{f} \left( \lambda e^{J\theta_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w} \right) + \mathcal{W}$$

является его искажённой версией. Пространственные искажения здесь вызваны аффинными преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z} \rightarrow \lambda e^{J\theta_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , а цветовые – аффинными преобразованиями перцептуального пространства  $\mathbf{f} \rightarrow \mu e^{J\theta_{ch}} \cdot \mathbf{f} + \mathcal{W}$ .

## 2. Алгебраические модели цветных изображений

Цветное изображение является векторнозначной функцией вида:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3$ , где  $\mathbf{V}_{rgb}^3$  – трихроматическое (цветовое) RGB-пространство. Мы будем интерпретировать цветные изображения как триплетно-значные сигналы  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_r(\mathbf{x})\mathbf{1} + f_g(\mathbf{x})\mathbf{e}_{col}^1 + f_b(\mathbf{x})\mathbf{e}_{col}^2$ , которые принимают значения в триплетной (цвет-

ной) алгебре  $Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \epsilon, \epsilon^2) := \mathbf{R}1_{col} + \mathbf{R}\epsilon_{col}^1 + \mathbf{R}\epsilon_{col}^2$ , где  $1_{col}, \epsilon_{col}^1, \epsilon_{col}^2$  – три гипермнимые (цветные) единицы с одним из трёх свойств:  $\epsilon_{col}^3 = +1$ ,  $\epsilon_{col}^3 = 0$  либо  $\epsilon_{col}^3 = -1$  [11–16]. Для краткости будем обозначать их как  $1, \epsilon^1, \epsilon^2$ . Очевидно, существует три перцептуальных цветных алгебры:

1) Если  $\epsilon^3 = \epsilon_-^3 = -1$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \epsilon_-, \epsilon_-^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\epsilon_-^1 + \mathbf{R}\epsilon_-^2 = \{C = r1 + g\epsilon_-^1 + b\epsilon_-^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра *цветных ациклических чисел*.

2) Если  $\epsilon^3 = \epsilon_+^3 = +1$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \epsilon_+, \epsilon_+^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\epsilon_+^1 + \mathbf{R}\epsilon_+^2 = \{C = r1 + g\epsilon_+^1 + b\epsilon_+^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра *цветных циклических чисел*.

3) Если  $\epsilon^3 = \epsilon_0^3 = 0$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \epsilon_0, \epsilon_0^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\epsilon_0^1 + \mathbf{R}\epsilon_0^2 = \{C = r1 + g\epsilon_0^1 + b\epsilon_0^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра *цветных нильпотентных чисел*.

Цветные циклические числа формы  $C = x1 + y\epsilon + z\epsilon^2$  ( $\epsilon^3 = 1$ ) были впервые открыты Ч. Гревсом в работе [11]. Он назвал эти числа *триплетами*. Учитывая контекст данной работы, будем называть их *цветными числами*.

Сложение и умножение двух цветных чисел  $C_1 = (r_1 + g_1\epsilon + b_1\epsilon^2)$  и  $C_2 = (r_2 + g_2\epsilon + b_2\epsilon^2)$  определяются так:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= (r_1 + g_1\epsilon + b_1\epsilon^2) + (r_2 + g_2\epsilon + b_2\epsilon^2) = \\ &= (r_1 + r_2) + (g_1 + g_2)\epsilon + (b_1 + b_2)\epsilon^2, \\ C_1 \cdot C_2 &= (r_1 + g_1\epsilon + b_1\epsilon^2) \cdot (r_2 + g_2\epsilon + b_2\epsilon^2) = \\ &= (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2) + (r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2)\epsilon + \\ &+ (r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1)\epsilon^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что триплетное произведение изоморфно 3-точечной циклической свёртке

$$\begin{aligned} C_1 C_2 &= (r_1 + g_1\epsilon + b_1\epsilon^2) \cdot (r_2 + g_2\epsilon + b_2\epsilon^2) \equiv \\ &\equiv (r_1, g_1, b_1) * (r_2, g_2, b_2) = \\ &= (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2, r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2, r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1). \end{aligned}$$

Триплетное сопряжение числа  $C = (r + g\epsilon + b\epsilon^2)$  определяется равенством:  $\bar{C} = \overline{r + g\epsilon + b\epsilon^2} = r + g\epsilon^2 + b\epsilon^1$ .

Норма  $\|C\|_2$  и модуль  $|C|_2$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \|C\|_2 &= C\bar{C} = (r + g\epsilon + b\epsilon^2)(r + g\epsilon^2 + b\epsilon) = \\ &= (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb), \\ |C|_2 &= \sqrt{\|C\|_2} = \sqrt{C\bar{C}} = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)}. \end{aligned}$$

Ch. Greaves [11] показал, что каждое триплетное число имеет три нормы

$$\begin{aligned} \|C\|_1 &= |r + g + b|, \\ \|C\|_2 &= (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb), \\ \|C\|_3 &= \|C\|_1 \|C\|_2 = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb. \end{aligned}$$

Если расстояние  $\rho(C, D)$  между двумя триплетными числами  $C$  и  $D$  определить как модуль их разности  $C - D = U = r + g\epsilon + b\epsilon^2$ , то в цветовом перцептуальном пространстве можно ввести три метрики:

$$\begin{aligned} \rho_1(C, D) &= |C - D|_1 = |U|_1 = |r + g + b|, \\ \rho_2(C, D) &= |C - D|_2 = |U|_2 = \\ &= \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)}, \\ \rho_3(C, D) &= |C - D|_3 = |U|_3 = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}. \end{aligned}$$

В результате чего алгебра  $Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \epsilon, \epsilon^2)$  цветных чисел превратится в три 3D метрических пространства (с тремя цветными геометриями):

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_3^{vis1} &= \left\langle \left\langle \mathcal{A}_3(\mathbf{R}|1, \epsilon, \epsilon^2) \mid |r + g + b| \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{vis2} &= \\ &= \left\langle \left\langle \mathcal{A}_3(\mathbf{R}|1, \epsilon, \epsilon^2) \mid \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{vis3} &= \left\langle \left\langle \mathcal{A}_3(\mathbf{R}|1, \epsilon, \epsilon^2) \mid \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Гревс дал алгебраическую и геометрическую интерпретации триплетным числам. С геометрической точки зрения цветное число  $C = x + y\epsilon + z\epsilon^2$  является точкой  $C = C(x, y, z) \in \mathbf{V}_{RGB}^3$  в 3D-цветовом пространстве  $\mathbf{V}_{RGB}^3$  с координатами  $(x, y, z)$ . С алгебраической точки зрения цветная алгебра является прямой суммой поля реальных чисел  $\mathbf{R}$  и поля комплексных чисел  $Alg_3^{vis} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{e}_{lu} = (1 + \epsilon + \epsilon^2) / 3$ ,  $\mathbf{E}_{ch} = (1 + \omega_3\epsilon^2 + \omega_3^2\epsilon) / 3$  – так называемые ортогональные идемпотенты (проекторы)  $\mathbf{e}_{lu}^2 = \mathbf{e}_{lu}$ ,  $\mathbf{E}_{ch}^2 = \mathbf{E}_{ch}$ ,  $(\mathbf{e}_{lu}\mathbf{E}_{ch} = \mathbf{E}_{ch}\mathbf{e}_{lu} = 0)$  и  $\omega_3 := \exp(2\pi/3)$ . Действительно, в соответствии с полиномиальной китайской теоремой об остатках имеем

$$\begin{aligned} Alg_3^{vis} &\sim \mathbf{R}[x] / (x^3 - 1) = \mathbf{R}[x] / (x - 1)(x^2 + x + 1) \sim \\ &\sim \mathbf{R}[x] / (x - 1) \oplus \mathbf{R}[x] / (x^2 + x + 1) \sim \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Следовательно, каждое цветное число  $C = x + y\epsilon + z\epsilon^2$  является линейной комбинацией  $C = a_{lu}\mathbf{e}_{lu} + Z_{ch}\mathbf{E}_{ch} = (a_{lu}, Z_{ch})$  реальной  $a_{lu}\mathbf{e}_{lu}$  и комплексной  $Z_{ch}\mathbf{E}_{ch}$  составляющих в идемпотентном базисе  $\{\mathbf{e}_{lu}, \mathbf{E}_{ch}\}$ , где

$$\begin{aligned} Z_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} &= C \cdot \mathbf{E}_{ch} = \mathbf{e}_{lu} = \\ &= (r + g\epsilon + b\epsilon^2) \left[ (1 + \omega_3\epsilon^2 + \omega_3^2\epsilon) / 3 \right] = \\ &= (r + g\omega_3 + b\omega_3^2) \left[ (1 + \omega_3\epsilon^2 + \omega_3^2\epsilon) / 3 \right], \end{aligned}$$

и поэтому  $a_{lu} = (r + g + b)$ ,

$$Z_{ch} = (r + g\omega_3^1 + b\omega_3^2) = \left(r - \frac{g+b}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(g-b).$$

Мы будем называть  $a_{lu} \in \mathbf{R}$  яркостными, а  $Z_{ch} \in \mathbf{C}$  хроматическими числами. По этой причине цветные изображения можно рассматривать в двух форматах:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = f_R(\mathbf{z})\mathbf{1} + f_G(\mathbf{z})\boldsymbol{\varepsilon} + f_B(\mathbf{z})\boldsymbol{\varepsilon}^2,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = f_{lu}(\mathbf{z})\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})\mathbf{E}_{ch} = (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})).$$

Первое представление называется (R, G, B)-форматом, а второе – яркостно-хроматическим (“luminance-chrominance” – LC). Последний формат  $(\mathbf{f}_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$  определяет изображение в терминах яркостной  $f_{lu}(\mathbf{z})$  и хроматической  $\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})$  составляющих, где  $|\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})|$  – насыщенность и  $\arg\{\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})\}$  – цветовой тон  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ .

Изменения цветового тона, насыщенности и яркости достаточно просто описываются на языке цветной алгебры.

Пусть для примера  $\mathcal{A} = (a_{lu}, Z_{ch}) = (a_{lu}, |Z_{ch}|e^{i\varphi})$ , где  $a_{lu} > 0$ , тогда следующие преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) &= (a_{lu}, Z_{ch}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = \\ &= (a_{lu}, |Z_{ch}|e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = \\ &= (a_{lu}f_{lu}(\mathbf{z}), |Z_{ch}|e^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) \end{aligned}$$

меняют яркость, цветовой тон и насыщенность цветного изображения. Множество таких преобразований формирует яркостно-хроматическую группу



Рис. 1. Изменение цветового тона у исходного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), e^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$ : исходное изображение “Yorick” ( $\varphi = 0$ ) (а),  $\varphi = \pi/12$  (б),  $\varphi = \pi/6$  (в),  $\varphi = \pi/4$  (г),  $\varphi = -\pi/12$  (д),  $\varphi = -\pi/6$  (е)



$$\text{LCG} \left( \text{Alg}_3^{\text{vis}} \left( \mathbf{R} | \varepsilon \right) \right) = \left\{ (a_{lu}, Z_{ch}) \mid (a_{lu} \in \mathbf{R}^+) \& (Z_{ch} \in \mathbf{C}) \right\}.$$

В частности, если  $\mathcal{A} = (a_{lu}, Z_{ch}) = (1, e^{i\varphi})$ , то следующие преобразования

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), e^{i\varphi} \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$$

меняют только цветовой тон изображения (рис. 1). Множество подобных преобразований формирует ортогональную группу преобразований цветового тона

$$\text{HOG} \left( \text{Alg}_3^{\text{vis}} \left( \mathbf{R} | \varepsilon \right) \right) = \left\{ (1, e^{i\varphi}) \mid e^{i\varphi} \in \mathbf{C} \right\} \text{ (hue orthogonal group)}.$$

Пусть  $\mathcal{A} = (1, s)$ ,  $s > 0$ , тогда преобразования

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, s) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), s \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$$

изменяют только насыщенность исходного изображения (рис. 2).

Множество таких преобразований формирует группу преобразований насыщенности

$$\text{SaG} \left( \text{Alg}_3^{\text{vis}} \left( \mathbf{R} | \varepsilon_{col} \right) \right) = \left\{ (1, s) \mid s \in \mathbf{R}^+ \right\}$$

(saturation group).

Если же  $\mathcal{A} = (1, Z_{ch}) = (1, se^{i\varphi})$ , то преобразования



Рис. 2. Изменение насыщенности исходного цветного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, s) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), s \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$ : исходное изображение "Yorick" ( $s = 1$ ) (a);  $s = 1,3$  (б);  $s = 1,6$  (в);  $s = 2$  (г);  $s = 0,6$  (д);  $s = 0,3$  (е)

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, se^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), se^{i\varphi} \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$$

изменяют и цветовой тон, и насыщенность исходного изображения (рис. 3). Множество таких преобразований формирует хроматическую группу

$$\text{ChG} \left( \text{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | \varepsilon_{col}) \right) = \left\{ (1, se^{i\varphi}) \mid (e^{i\varphi} \in \mathbb{C}) \ \& \ (s \in \mathbf{R}^+) \right\}.$$

### 3. Мультиплетные модели многоканальных изображений

Традиционно многоканальные изображения интерпретируются как  $K$ -D векторнозначные сигналы

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K.$$

Мы будем интерпретировать их как мультиплетно-значные сигналы

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\varepsilon^1 + f_2(\mathbf{x})\varepsilon^2 + \dots + f_K(\mathbf{x})\varepsilon^{K-1},$$

которые принимают значения в мультиплетной алгебре  $\text{Alg}_K^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1}) = \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon^1 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon^{K-1}$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  и  $1, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{K-1}$  ( $\varepsilon^K = +1, 0, -1$ ) – мультицветные гипермнимые единицы, которые могут иметь одно из трёх свойств  $\varepsilon^K = +1, 0, -1$  [12–16].

Любое мультиплетное число представляется линейной комбинацией гипермнимых единиц

$$\mathcal{M} = a_0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{K-1}\varepsilon^{K-1}, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

Эти числа (в зависимости от  $\varepsilon^K = +1, 0, -1$ ) формируют три мультиплетных алгебры

$$\text{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R}) = \text{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{K-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_+^1 + \mathbf{R}\varepsilon_+^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_+^{K-1},$$

$$\text{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R}) = \text{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{K-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_-^1 + \mathbf{R}\varepsilon_-^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_-^{K-1},$$

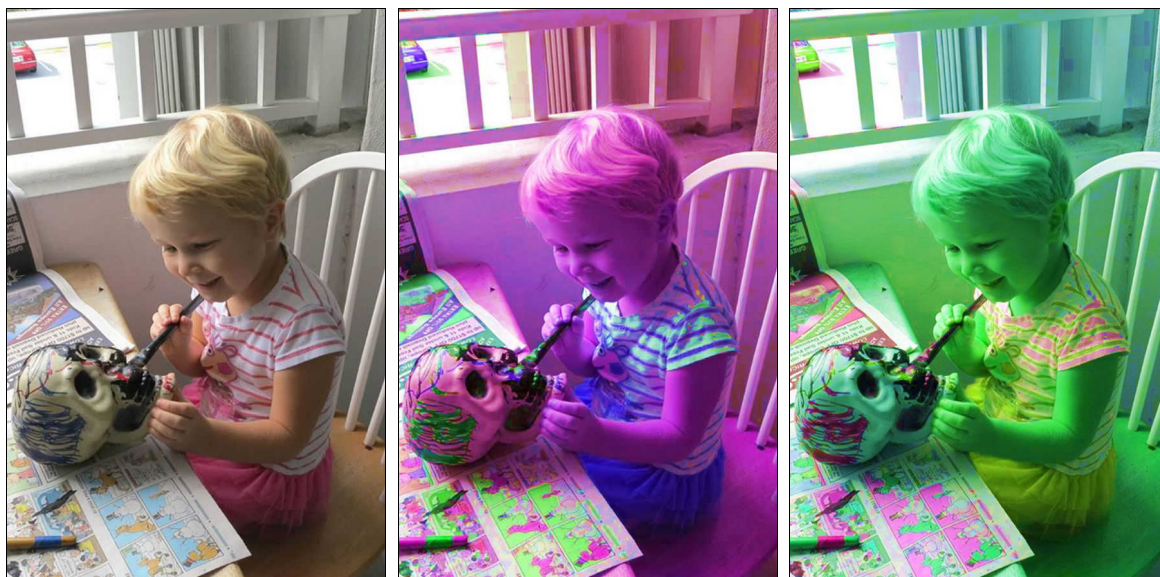
$$\text{Alg}_k^{0,Vis}(\mathbf{R}) = \text{Alg}_k^{0,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{K-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_0^1 + \mathbf{R}\varepsilon_0^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_0^{K-1}.$$

Сложение пары мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  в трёх алгебрах имеет одну и ту же форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \\ &= (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{K-1}\varepsilon^{K-1}) + \\ &+ (b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots + b_{K-1}\varepsilon^{K-1}) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\varepsilon^1 + \dots + (a_{K-1} + b_{K-1})\varepsilon^{K-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, по отношению к сложению все три алгебры формируют одно и то же векторное пространство. Правила умножения любой пары мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  в трёх мультиплетных алгебрах различны

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \\ &= (a_0 + a_1\varepsilon_- + a_2\varepsilon_-^2 + \dots + a_{K-1}\varepsilon_-^{K-1}) \times \\ &\times (b_0 + b_1\varepsilon_- + b_2\varepsilon_-^2 + \dots + b_{K-1}\varepsilon_-^{K-1}) = \\ &= \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \varepsilon_-^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \varepsilon_-^m \right) = \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} a_n b_m \varepsilon_-^{n+m} = \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_-^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \varepsilon_-^l \end{aligned}$$



а)  $s = 1, \varphi = 0$

б)  $s = 1,3, \varphi = -\pi/12$

в)  $s = 1,6, \varphi = +\pi/12$

Рис. 3. Изменение хроматической составляющей (цветового тона и насыщенности) цветного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, se^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), se^{i\varphi} \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$ :

исходное изображение "Yorick" ( $s = 1, \varphi = 0$ ) (а),  $s = 1,3, \varphi = -\pi/12$  (б),  $s = 1,6, \varphi = +\pi/12$  (в)



для  $Alg_k^{+,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{+,Vis}(\mathbf{R} | 1, \epsilon_+^1, \epsilon_+^2, \dots, \epsilon_+^{K-1})$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \\ &= (a_0 + a_1 \epsilon_+ + a_2 \epsilon_+^2 + \dots + a_{K-1} \epsilon_+^{K-1}) \times \\ &\times (b_0 + b_1 \epsilon_+ + b_2 \epsilon_+^2 + \dots + b_{K-1} \epsilon_+^{K-1}) = \\ &= \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \epsilon_+^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \epsilon_+^m \right) = \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} a_n b_m \epsilon_+^{n+m} = \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} \text{Sign}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \epsilon_+^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \epsilon_+^l \end{aligned}$$

для  $Alg_k^{-,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{-,Vis}(\mathbf{R} | 1, \epsilon_-^1, \epsilon_-^2, \dots, \epsilon_-^{K-1})$  и

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \\ &= (a_0 + a_1 \epsilon_0 + a_2 \epsilon_0^2 + \dots + a_{K-1} \epsilon_0^{K-1}) \times \\ &\times (b_0 + b_1 \epsilon_0 + b_2 \epsilon_0^2 + \dots + b_{K-1} \epsilon_0^{K-1}) = \\ &= \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \epsilon_0^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \epsilon_0^m \right) = \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} a_n b_m \epsilon_0^{n+m} = \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} \text{Hev}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \epsilon_0^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \epsilon_0^l. \end{aligned}$$

для  $Alg_k^{0,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{0,Vis}(\mathbf{R} | 1, \epsilon_0^1, \epsilon_0^2, \dots, \epsilon_0^{K-1})$ .

Легко видеть, что мультиплетные произведения изоморфны дискретным  $K$  – точечным свёрткам – циклической, ациклической и нильпотентной соответственно:

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{m=0}^{K-1} a_{l \ominus m} b_m, \\ c_l &= \sum_{m=0}^{K-1} \text{Sign}(l-m) a_{l \ominus m} b_m, \\ c_l &= \sum_{m=0}^{K-1} \text{Hev}(l-m) a_{l \ominus m} b_m. \end{aligned}$$

**Примечание.** При циклическом и ациклическом сдвигах вправо последний элемент последовательности встает на место первого элемента без изменения или с изменением знака соответственно (по причине  $\epsilon^K = +1, -1$ ). При нильпотентном сдвиге последний элемент последовательности исчезает, а на месте первого элемента появляется 0 (из-за  $\epsilon^K = 0$ ). Свойство элемента алгебры превращаться в 0 при его возведении в некоторую степень называется нильпотентностью. Отсюда следует и название свертки.

Используя полиномиальную китайскую теорему об остатках, можно легко доказать, что  $Alg_k^{+,Vis}(\mathbf{R})$  и  $Alg_k^{-,Vis}(\mathbf{R})$  являются прямыми суммами полей реальных и комплексных чисел:

$$\begin{aligned} Alg_K^{+,Vis}(\mathbf{R}) &= \mathbf{R}^{K_{lu}} \oplus \mathbf{C}^{K_{ch}} = \\ &= \begin{cases} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^2 + \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{if } K \text{ even,} \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{if } K \text{ odd,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Alg_K^{-,Vis}(\mathbf{R}) &= \mathbf{R}^{K_{lu}} \oplus \mathbf{C}^{K_{ch}} = \\ &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{if } K \text{ even,} \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{if } K \text{ odd,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_{lu}^i$  и  $\mathbf{E}_{ch}^j$  – «реальные» и «комплексные» ортогональные идемпотенты, такие, что  $(\mathbf{e}_{lu}^i)^2 = \mathbf{e}_{lu}^i$ ,  $(\mathbf{E}_{ch}^j)^2 = \mathbf{E}_{ch}^j$ ,  $\mathbf{e}_{lu}^i \mathbf{E}_{ch}^j = \mathbf{E}_{ch}^j \mathbf{e}_{lu}^i$  для всех  $i$  и  $j$ .

Пусть  $K_{lu} = 0, 1, 2$  и  $K_{ch} = K/2, (K/2) - 1, (K-1)/2$ . Каждый мультиплет  $\mathcal{M} \in Alg_K^{\pm,Vis}(\mathbf{R})$  может быть представлен в виде линейной комбинации  $K_{lu}$  «скалярных» и  $K_{ch}$  «комплексных» составляющих:

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{K_{lu}} (a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i) + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j).$$

Реальные числа  $a_i \in \mathbf{R}$  называются *мультияркостями*, а комплексные  $\mathbf{z}_j \in \mathbf{C}$  – *мультихроматами*. В таком представлении две главные арифметические операции имеют простую форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) + \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} (a_i + b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (\mathbf{z}_j + \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right), \\ \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} (a_i \cdot b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right). \end{aligned}$$

Мультиплетные алгебры не являются полями. Они формируют числовые кольца с делителями нуля.

**Определение 5.** 2D многоканальные сигналы типа

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}) &= f_0(\mathbf{z}) + f_1(\mathbf{z})\epsilon^1 + \dots + f_{K-1}(\mathbf{z})\epsilon^{K-1}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^{K_{lu}} [f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{K_{ch}} [\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] = \\ &= (f_{lu}^1(\mathbf{z}), f_{lu}^2(\mathbf{z}), \dots, f_{lu}^{K_{lu}}(\mathbf{z}); \mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, \mathbf{f}_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z})) \end{aligned}$$

называются мультиплетнозначными изображениями в мультиплетном и мультияркостнохроматическом форматах, соответственно [7].

Первый формат определяет изображение  $K$  яркостями каждого канала. Второй формат определяет его яркостными частями  $(f_{lu}^1(\mathbf{z}), f_{lu}^2(\mathbf{z}), \dots, f_{lu}^{K_{lu}}(\mathbf{z}))$  и  $K_{ch}$  хроматическими компонентами

$(\mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, \mathbf{f}_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z}))$ , где  $|\mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{z})|, |\mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{z})|, \dots, |\mathbf{f}_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z})|$  – мультинасыщенности и

$\arg \{f_{ch}^1(\mathbf{z}), \arg \{f_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, \arg \{f_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z})\}$  – мультицветовые тона многоканального изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ .

Изменения мульти-яркости и мульти-хроматичности у многоканального изображения легко описываются на языке мультиплетной алгебры  $Alg_K^{Vis}(\mathbf{R})$  как преобразование  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z})$  для подходящего мультиплетного числа  $M$ . Например, если

$$\mathcal{M} = \left( a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{K_{lu}}; Z_{ch}^1, Z_{ch}^2, \dots, Z_{ch}^{K_{ch}} \right) = \left( a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{K_{lu}}; \left| Z_{ch}^1 \right| e^{i\varphi_{ch}^1}, \left| Z_{ch}^2 \right| e^{i\varphi_{ch}^2}, \dots, \left| Z_{ch}^{K_{ch}} \right| e^{i\varphi_{ch}^{K_{ch}}} \right),$$

то преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}) &\rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \left[ a_{lu}^i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i \right] + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \left[ \left| Z_{ch}^j \right| e^{i\varphi_{ch}^j} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right] \right) \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \left[ f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i \right] + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \left[ \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right] \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \left[ a_{lu}^i f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i \right] + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \left[ \left| Z_{ch}^j \right| e^{i\varphi_{ch}^j} \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right] \right) \end{aligned}$$

изменяет мультияркости, мультицветовые тона и мультинасыщенности. Множество таких преобразований формирует группу

$$\begin{aligned} \text{MLCG} \left( \mathcal{A}_k(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{K-1}) \right) = \\ = \left\{ \left( a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{K_{lu}}; Z_{ch}^1, Z_{ch}^2, \dots, Z_{ch}^{K_{ch}} \right) \right\} \times \\ \times \left( a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{K_{lu}} \in \mathbf{R}^+ \right) \& \\ \& \left( Z_{ch}^1, Z_{ch}^2, \dots, Z_{ch}^{K_{ch}} \in \mathbf{C} \right). \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что головной мозг может использовать гиперкомплексные алгебры для ментального изменения мультияркости и мультихроматичности многоканальных изображений, которые возникают в памяти мозга на так называемом «экране сознания», например, во время сна.

### Заключение

Разработан новый алгебраический подход к математическим моделям многоканальных изображений, основанный на коммутативных гиперкомплексных алгебрах. Наша цель состояла в том, чтобы показать, что гиперкомплексные алгебры являются адекватным математическим аппаратом для описания многоканальных изображений. Более того, можно привести достаточное количество аргументов в пользу того, что мозг животных в процессе эволюции приобрёл способность оперировать гиперкомплексными числами в процессе обработки и распознавания изображений. Поэтому мозг животных может рассматриваться как компьютер, работающий в некоторой гиперкомплексной алгебре.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-07-00886.

### Литература

1. **Cronin, T.W.** A retina with at least ten spectral types of photoreceptors in a mantis shrimp / T.W. Cronin, N.J. Marschal // Nature. – 1989. – Vol. 339. – P. 137-140. – DOI: 10.1038/339137a0.
2. **Chang, Ch.-I.** Hyperspectral data processing: Algorithm design and analysis / Ch.-I. Chang. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2013. – 1164 p. – ISBN: ISBN 978-0-471-69056-6.
3. **Schowengerdt, R.A.** Remote sensing: Models and methods for image processing / R.A. Schowengerdt. – 2nd ed. – New York: Academic Press, 1997. – 522 p. – ISBN: 978-0-12-628981-7.
4. Computer image processing. Part II: Methods and algorithms / ed. by V.A. Soifer. – Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller, 2010. – 584 p. – ISBN: 978-3-6391-7545-5.
5. **Lunenburg, R.K.** The metric of binocular visual space / R.K. Lunenburg // Journal of the Optical Society of America. – 1950. – Vol. 40, Issue 1. – P. 627-642. – DOI: 10.1364/JOSA.40.000627.
6. **Lunenburg, R.K.** The metric methods in binocular visual space / R.K. Lunenburg. – In book: Courant, R. Studies and essays: presented to R. Courant on his 60th birthday / R. Courant. – New York: Interscience Publishers, 1948. – P. 215-239.
7. **Labunets, V.** Clifford algebra as unified language for image processing and pattern recognition / V. Labunets. – In book: Computational noncommutative algebra and applications / ed. by J. Byrnes, G. Ostheimer. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. – P. 197-225. – ISBN: 978-1-4020-1982-1.
8. **Doran, C.J.L.** Geometric algebra and its application to mathematical physics / C.J.L. Doran. – Cambridge: University of Cambridge, 1994. – 244 p.
9. **Labunets, V.G.** Is the Brain a 'Clifford algebra quantum computer'? / V.G. Labunets, E.V. Rundblad, J. Astola. – In book: Dorst L, Doran C Lasenby J, eds. Applied geometrical algebras in computer science and engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 2002. – Chapter 25. – P. 486-495. – ISBN: 978-1-4612-6606-8. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0089-5\_25.
10. **Labunets-Rundblad, E.V.** Algebra and geometry of color images / E.V. Labunets-Rundblad, V.G. Labunets, J. Astola. – In book: Proceedings of first international workshop on spectral techniques and logic design for future digital systems / ed. by R. Creutzburg, K. Egiazarian. – Tampere: Tampere International Center for Signal Processing, 2000. – P. 231-261.
11. **Greaves, Ch.** On algebraic triplets / Ch. Greaves // Proceedings of the Royal Irish Academy. – 1845. – Vol. 3. – P. 51-54.
12. **Labunets-Rundblad, E.** Spatial-color Clifford algebras for invariant image recognition / E. Labunets-Rundblad, V. Labunets. – In book: Geometric computing with Clifford algebras / ed. by G. Sommer. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. – P. 155-184. – ISBN: 978-3-642-07442-4.
13. **Labunets-Rundblad, E.** Unified approach to Fourier-Clifford-Prometheus sequences, transforms and filter banks / E. Labunets-Rundblad, V. Labunets, I. Nikitin. – In book: Computational noncommutative algebra and applications / ed. by J. Byrnes, G. Ostheimer. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers; 2004. – P. 389-400. – ISBN: 978-1-4020-1982-1.
14. **Labunets-Rundblad, E.** Fast color Wavelet-Haar-Hartley-Prometheus transforms for image processing / E. Labunets-Rundblad, A. Maidan, P. Novak, V. Labunets. – In book: Computational noncommutative algebra and applications /

- ed. by J. Byrnes, G. Ostheimer. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers; 2004. – P. 401-411. – ISBN: 978-1-4020-1982-1.
15. **Labunets, V.** Is the Visual Cortex a 'Fast Clifford algebra quantum computer'? / V. Labunets, E. Labunets-Rundblad, J. Astola. – In book: Clifford analysis and its applications / ed. by F. Brackx, J.S.R. Chisholm, V. Souček. – Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2001. – P. 173-182. – ISBN: 978-0-7923-7045-1.
16. **Labunets, V.G.** Colour triplet-valued wavelets and splines / V.G. Labunets, A. Maida, E. Labunets-Rundblad, J. Astola // Proceedings of the 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001). – 2001. – P. 535-541. – DOI: 10.1109/ISPA.2001.938687.

### Сведения об авторах

**Лабунец Валерий Григорьевич** родился в 1946 году. В 1970 окончил Уральский политехнический институт. В 1988 году защитил диссертацию на соискание степени доктора технических наук. Основное место работы – Уральский государственный лесотехнический университет, профессор. Круг научных интересов: цифровая обработка сигналов, анализ изображений, распознавание образов, квантовые вычисления, геоинформатика. E-mail: [vlabunets05@yahoo.com](mailto:vlabunets05@yahoo.com).

**Кох Елена Викторовна** родилась в 1974 году. В 1996 году окончила Уральский государственный лесотехнический университет (УГЛТУ). В 2013 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата наук. В настоящее время работает доцентом кафедры информационных технологий УГЛТУ. Круг научных интересов включает геоинформационные системы, обработку данных дистанционного зондирования, распознавание образов. E-mail: [elenakox@mail.ru](mailto:elenakox@mail.ru).

**Екатерина Остхаймер** родилась в 1970 году. В 1993 окончила Уральский политехнический институт. В 1995 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата технических наук, а 2000 защитила докторскую диссертацию в университете Тампера. В настоящее время является руководителем фирмы Capricat LLC (Флорида, США). Круг научных интересов: цифровая обработка сигналов, анализ изображений, распознавание образов, квантовые вычисления, геоинформатика. E-mail: [katya@capricat.com](mailto:katya@capricat.com).

ГРНТИ: 28.23.15, 28.17.19, 28.17.24, 89.57.35, 89.57.45.

Поступила в редакцию 17 января 2018 г. Окончательный вариант – 8 февраля 2018 г.

## ALGEBRAIC MODELS AND METHODS OF COMPUTER IMAGE PROCESSING. PART 1. MULTIPLET MODELS OF MULTICHANNEL IMAGES

V.G. Labunets<sup>1</sup>, E.V. Kokh<sup>1</sup>, E. Ostheimer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, Russia,

<sup>2</sup>Capricat LLC, Pompano Beach, Florida, USA

### Abstract

We present a new theoretical framework for multichannel image processing using commutative hypercomplex algebras. Hypercomplex algebras generalize the algebras of complex numbers. The main goal of the work is to show that hypercomplex algebras can be used to solve problems of multichannel (color, multicolor, and hyperspectral) image processing in a natural and effective manner. In this work, we suppose that the animal brain operates with hypercomplex numbers when processing multichannel retinal images. In our approach, each multichannel pixel is considered not as an  $K$ -D vector, but as an  $K$ -D hypercomplex number, where  $K$  is the number of different optical channels. The aim of this part is to present algebraic models of subjective perceptual color, multicolor and multichannel spaces.

**Keywords:** multichannel images, hypercomplex algebra, image processing.

**Citation:** Labunets VG, Kokh EV, Ostheimer E. Algebraic models and methods of computer image processing. Part 1. Multiplet models of multichannel images. Computer Optics 2018; 42(1): 84-95. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-84-95.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, RFBR grant # 17-07-00886.

### References

- [1] Cronin TW, Marschal NJ. A retina with at least ten spectral types of photoreceptors in a mantis shrimp. Nature 1989; 339: 137-140. DOI: 10.1038/339137a0.
- [2] Chang Ch-I. Hyperspectral data processing: Algorithm design and analysis. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2013. ISBN: 978-0-471-69056-6.
- [3] Schowengerdt RA. Remote sensing: Models and methods for image processing. 2nd ed. New York: Academic Press; 1997. ISBN: 978-0-12-628981-7.
- [4] Soifer VA, ed. Computer image processing. Part II: Methods and algorithms. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller; 2010. ISBN: 978-3-6391-7545-5.
- [5] Luneburg RK. The metric of binocular visual space. JOSA 1950; 40(1): 627-642. DOI: 10.1364/JOSA.40.000627.

- [6] Luneburg RK. The metric methods in binocular visual space. In book: Courant, R. Studies and essays: presented to R. Courant on his 60th birthday 1948: 215-239.
- [7] Labunets V. Clifford algebra as unified language for image processing and pattern recognition. In Book: Byrnes J, Ostheimer G, eds. Computational noncommutative algebra and applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers; 2004: 197-225. ISBN: 978-1-4020-1982-1.
- [8] Doran CJL. Geometric algebra and its application to mathematical physics. Cambridge: University of Cambridge; 1994.
- [9] Labunets VG. Is the Brain a 'Clifford algebra quantum computer'? In Book: Dorst L, Doran C, Lasenby J, eds. Applied geometrical algebras in computer science and engineering. Boston, MA: Birkhäuser; 2002; 25: 486-495. ISBN: 978-1-4612-6606-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-0089-5\_25.
- [10] Labunets-Rundblad EV, Labunets VG, Astola J. Algebra and geometry of color images. In Book: Creutzburg R, Egiazarian K, eds. Proceedings of first international workshop on spectral techniques and logic design for future digital systems. Tampere: TICSP; 2000: 231-261.
- [11] Greaves Ch. On algebraic triplets. Proceedings of the Royal Irish Academy 1845; 3: 51-54.
- [12] Labunets-Rundblad E, Labunets V. Spatial-color Clifford algebras for invariant image recognition. In Book: Sommer G, ed. Geometric computing with Clifford algebras. Berlin, Heidelberg: Springer; 2001: 155-184. ISBN: 978-3-642-07442-4.
- [13] Rundblad-Ostheimer E, Labunets V, Nikitin I. Unified approach to Fourier-Clifford-Prometheus sequences, transforms and filter banks. In Book: Byrnes J, Ostheimer G, eds. Computational noncommutative algebra and applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers; 2004: 389-400. ISBN: 978-1-4020-1982-1.
- [14] Labunets-Rundblad E, Maida A, Novak P, Labunets V. Fast color Wavelet-Haar-Hartley-Prometheus transforms for image processing. In Book: Byrnes J, Ostheimer G, eds. Computational noncommutative algebra and applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers; 2004: 401-411. ISBN: 978-1-4020-1982-1.
- [15] Labunets V, Labunets-Rundblad E, Astola J. Is the Visual Cortex a 'Fast Clifford algebra quantum computer'? In Book: Brackx F, Chisholm JSR, Souček V, eds. Clifford analysis and its applications. Dordrecht: Springer Science+Business Media; 2001: 173-182. ISBN: 978-0-7923-7045-1.
- [16] Labunets VG, Maida A, Labunets-Rundblad E, Astola J. Colour triplet-valued wavelets and splines. Proc ISPA 2001: 535-541. DOI: 10.1109/ISPA.2001.938687.

#### Author's information

**Valeri Grigorievich Labunets** (1946 b.), graduated (1970) from Urals Polytechnical Institute. He received his Candidate's degree in Technical Sciences in 1978 and DrSc degree in 1988. At present, he is Professor of Information Technologies department at Ural State Forest Engineering University. The areas of research interests include digital signal and image processing, geoinformatics and pattern recognition, quantum computing. E-mail: [vlabunets05@yahoo.com](mailto:vlabunets05@yahoo.com).

**Elena Viktorovna Kokh** (1974 b.) graduated (1996) from Ural State Forest Engineering University (USFEU). She received his Candidate's degree Sciences in 2013. Currently assistant Professor of Information Technologies department at USFEU. The areas of research interests include geoinformation systems, processing of remotely sensed data, pattern recognition. E-mail: [elenakox@mail.ru](mailto:elenakox@mail.ru).

**Ekaterina Ostheimer (Rundblad)** (1970 b.), graduated (1993) from Urals Polytechnical Institute. He received his Candidate's degree in Technical Sciences in 1995 and DrSc degree in 2000 from Tampere University. At present, she is Head of Capricat LLC (Florida, USA). The areas of research interests include digital signal and image processing, geoinformatics and pattern recognition, quantum computing. E-mail: [katya@capricat.com](mailto:katya@capricat.com).

*Received January 17, 2017. The final version – February 8, 2018.*