

Е. В. Курмистров, Е. Н. Воронов, А. В. Кудрявцев,  
А. В. Мусатов

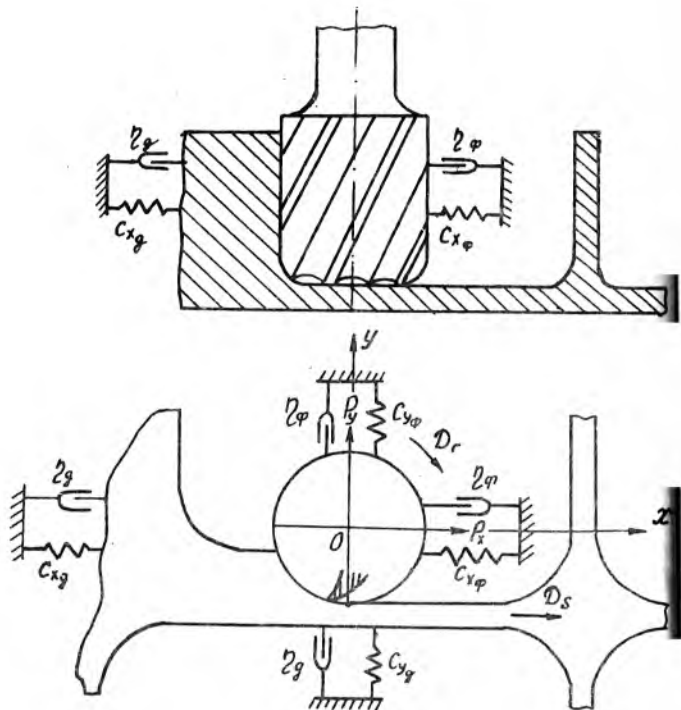
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИЙ  
ПРИ КОНЦЕВОМ ФРЕЗЕРОВАНИИ НЕЖЕСТКИХ ДЕТАЛЕЙ  
ВИНТОВЫМИ ФРЕЗАМИ

Представлена механико-математическая модель автоколебательного процесса при концевом фрезеровании глубоких пазов в деталях из алюминиевых сплавов фрезами с винтовым зубом.

В производстве летательных аппаратов одной из трудоемких операций механической обработки является концевое фрезерование глубоких пазов, карманов, каких-либо сложных профилей. Вследствие малой жесткости обрабатываемых деталей и режущих инструментов в технологической системе возникают интенсивные вибрации, приводящие к снижению стойкости и усталостному разрушению инструментов, ухудшению качества обработанной поверхности и возрастанию уровня звукового давления.

Для теоретического анализа вибраций была разработана механико-математическая модель, которая может быть представлена системой четырех дифференциально-разностных уравнений. При этом в качестве доминирующей колебательной системы рассматривалась система "фреза - обрабатываемая деталь" (рис. 1), а в качестве основных причин, обуславливающих возникновение и развитие вибраций, принимались: изменение толщины среза, вызванное вибрациями и влиянием волнообразного следа, оставляемого на поверхности резания режущими лезвиями фрезы, и отставание сил резания от изменения толщины и ширины среза.

Были приняты следующие допущения: работа торцовых, а также переходных радиусных режущих кромок не учитывалась; виброперемещения в направлении оси фрезы, ввиду их малости, не рассматривались; внимание принималось только поперечные изгибные колебания, крутильные колебания фрезы в связи с ее большой крутильной жесткостью не рассматривались.



Р и с. I. Схема доминирующей колебательной системы  
"концевая фреза - обрабатываемая деталь"

Система дифференциально-разностных уравнений имеет вид

$$m_\varphi \frac{d^2 x_\varphi(t)}{dt^2} + 2\gamma_\varphi \frac{dx_\varphi(t)}{dt} + C_{x_\varphi}(t) x_\varphi(t) = P_x;$$

$$m_\varphi \frac{d^2 y_\varphi(t)}{dt^2} + 2\gamma_\varphi \frac{dy_\varphi(t)}{dt} + C_{y_\varphi}(t) y_\varphi(t) = P_y;$$

$$m_g \frac{d^2 x_g(t)}{dt^2} + 2\gamma_g \frac{dx_g(t)}{dt} + C_{x_g}(t) x_g(t) = -P_x;$$

$$m_g \frac{d^2 y_g(t)}{dt^2} + 2\gamma_g \frac{dy_g(t)}{dt} + C_{y_g}(t) y_g(t) = -P_y.$$

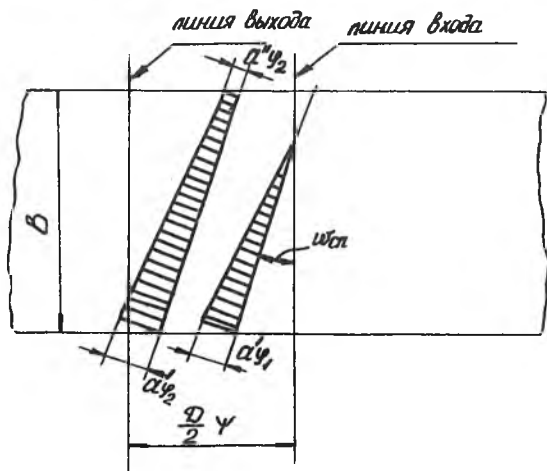
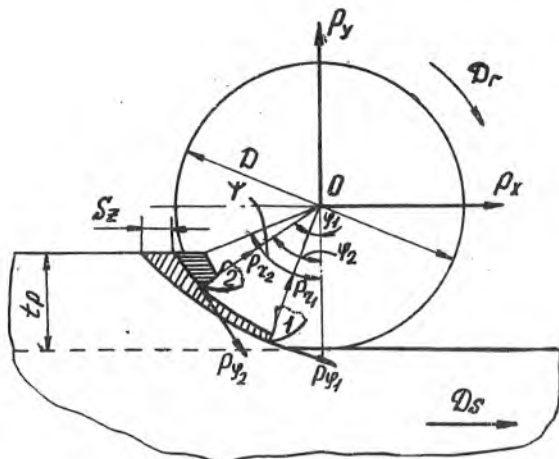
- $m_f, m_d$  — соответственно приведенные массы фрезы и детали;
- $\gamma, \gamma_d$  — обобщенные коэффициенты сопротивления в системах "фреза-шпиндель" и "деталь-приспособление";
- $C_{fp}(t), C_{fd}(t)$  — коэффициенты обобщенной жесткости фрезы в направлении осей  $x$  и  $y$ ;
- $C_{dx}(t), C_{dy}(t)$  — коэффициенты обобщенной жесткости детали в направлении осей  $x$  и  $y$ ;
- $x_f(t), y_f(t)$  — виброперемещения фрезы в направлении осей  $x$  и  $y$  (параллельном и перпендикулярном к обработанной поверхности соответственно);
- $x_d(t), y_d(t)$  — виброперемещения детали в направлении осей  $x$  и  $y$  (параллельном и перпендикулярном к обработанной поверхности соответственно);
- $P_x$  — составляющая силы резания, параллельная направлению движения подачи  $D_s$ ;
- $P_y$  — составляющая силы резания, перпендикулярная направлению движения подачи.

В общем случае, когда в работе одновременно могут находиться несколько режущих зубьев, составляющие  $P_x$  и  $P_y$  определяются путем суммирования проекций касательной  $P_{\varphi_i}$  и радиальной  $P_{r_i}$  составляющих на оси  $x$  и  $y$  (рис. 2):

$$P_x = \sum_{i=1}^K P_{\varphi_i} \cos \varphi_i + \sum_{i=1}^K P_{r_i} \sin \varphi_i;$$

$$P_y = \sum_{i=1}^K P_{\varphi_i} \sin \varphi_i + \sum_{i=1}^K P_{r_i} \cos \varphi_i.$$

- Здесь  $i$  — номер зуба, находящегося в работе, при этом номер "1" всегда присваивается зубу, входящему в заготовку;
- $K$  — число одновременно работающих зубьев, для фрез с винтовым зубом  $K$  определяется как целая часть выражения



Р и с. 2. К расчету сил, действующих на фрезу

$$\frac{D \alpha \cos \left(1 - \frac{2 t_p}{D}\right) z + 2 B z t_p \omega_{сп}}{2 \pi D} + 1,$$

- где  $D$  - диаметр фрезы;  
 $z$  - число режущих зубьев фрезы;  
 $\omega_{сп}$  - угол наклона спирали;  
 $B$  - ширина фрезерования;  
 $t_p$  - глубина резания;  
 $\varphi_i$  - мгновенное значение угла поворота фрезы, определяющее положение  $i$ -го работающего зуба на дуге контакта,

$$\varphi_i = \Omega \left[ t - (q - i) \frac{T}{z} \right],$$

$\Omega$  - угловая скорость фрезы,

$$\Omega = \frac{\pi n}{30};$$

$n$  - частота вращения фрезы, об/мин;

$T$  - период вращения фрезы (время одного оборота фрезы);

$t$  - текущее значение времени от начала врезания первого режущего зуба до рассматриваемого момента (в начальный момент принимается равным нулю, а затем увеличивается дискретно с шагом, равным шагу интегрирования дифференциальных уравнений при численном методе их решения);,

$q$  - порядковый номер зуба, вступающего в работу с момента начала процесса резания, принимает последовательно значения: 1, 2, 3, 4 и т.д. и определяется как целая часть выражения

$$\frac{\Omega t z}{2 \pi} + 1.$$

Касательная  $P_{\varphi_i}$  и радиальная  $P_{z_i}$  составляющие силы резания, действующие на  $i$ -й зуб, рассчитываются на основе закона об удельной силе резания:

$$P_{\varphi_i} = K v_i(t) [a_{\varphi_i}(t)]^{1-\mu}; \quad P_{z_i} = \varepsilon P_{\varphi_i}, \text{ если}$$

$$a_{\varphi_i}(t) > 0 \text{ и } P_{\varphi_i} = 0; \quad P_{z_i} = 0, \text{ если } a_{\varphi_i}(t) \leq 0.$$

Здесь  $K$  и  $\mu$  — коэффициент и показатель степени в формуле удельной силы резания (находятся экспериментально на основе силовых исследований);

$\varepsilon$  — коэффициент, выражающий, какую долю от касательной силы составляет радиальная; в первом приближении  $\varepsilon$  можно принять постоянным, равным по данным [1] 0,6–0,8;

$b_i(t)$  — мгновенное значение ширины среза для  $i$ -го одновременно работающего зуба;

$a_{\varphi_i}(t)$  — мгновенное значение толщины среза для  $i$ -го зуба с учетом изменений, связанных с изменением угла поворота зуба фрезы  $\varphi_i$ , а также вызванных вибрациями и влиянием "следа",

$$a_{\varphi_i}(t) = \frac{a'_{\varphi_i}(t) + a''_{\varphi_i}(t)}{2} + \Delta a_{\varphi_i},$$

где  $a'_{\varphi_i}(t)$  и  $a''_{\varphi_i}(t)$  — мгновенные значения толщины среза для "передней" и "задней" точек режущей кромки  $i$ -го зуба (рис. 2);

$\Delta a_{\varphi_i}$  — приращение толщины среза, снимаемого  $i$ -м зубом, вызванное виброперемещениями фрезы и детали и влиянием "следа".\*

Как видно на рис. 2, особенностью фрезерования концевыми фрезами с винтовым зубом является то, что по мере изменения угла поворота зуба фрезы изменяется и толщина среза, и ширина среза. Кроме того, толщина среза в различных точках режущей кромки также различна. Это существенно усложняет механико-математическую модель и анализ вибраций. К этому следует также добавить тот факт, что значения коэффициентов жесткости фрезы и детали не будут оставаться постоянными. Их изменения связаны с изменением положения точки приложения сил  $P_x$  и  $P_y$  в зависимости от положения режущих зубьев на дуге контакта.

Рассматривая схему встречного фрезерования, можно получить

---

\* Влиянием виброперемещений фрезы и детали на изменение ширины среза можно пренебречь.

следующие выражения для мгновенных значений ширины и толщины среза при условии, что вибрации отсутствуют:

$$1. \quad b_i(t) = \frac{D\Omega [t - (q-i)\frac{T}{Z}]}{2 \sin \omega_{сн}};$$

$$a'_{\varphi_i}(t) = S_{\Sigma} \sin \left\{ \Omega \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] \right\};$$

$$a''_{\varphi_i}(t) = 0,$$

$$\text{если } 0 \leq \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] \leq \frac{2Btq\omega_{сн}}{\Omega D},$$

т.е. от начала до полного врезания  $i$ -го зуба.

2.

$$b_i(t) = \frac{B}{\cos \omega_{сн}};$$

$$a'_{\varphi_i}(t) = S_{\Sigma} \sin \left\{ \Omega \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] \right\};$$

$$a''_{\varphi_i}(t) = S_{\Sigma} \sin \left\{ \Omega \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] - \frac{2Btq\omega_{сн}}{D} \right\},$$

$$\text{если } \frac{2Btq\omega_{сн}}{\Omega D} < \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] \leq \frac{azccos(1 - \frac{2t_p}{D})}{\Omega}$$

(от момента полного врезания до начала выхода  $i$ -го зуба из заготовки).

$$3. \quad b_i(t) = \frac{D \left\{ azccos(1 - \frac{2t_p}{D}) - \Omega \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] + \frac{2Btq\omega_{сн}}{D} \right\}}{2 \sin \omega_{сн}};$$

$$a'_{\varphi_i}(t) = a_{\varphi_{max}} = S_{\Sigma} \sin \left[ azccos(1 - \frac{2t_p}{D}) \right];$$

$$a''_{\varphi_i}(t) = S_{\Sigma} \sin \left\{ \Omega \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] - \frac{2Btq\omega_{сн}}{D} \right\},$$

$$\text{если } \frac{azccos(1 - \frac{2t_p}{D})}{\Omega} < \left[ t - (q-i)\frac{T}{Z} \right] \leq \frac{azccos(1 - \frac{2t_p}{D}) + \frac{2Btq\omega_{сн}}{D}}{\Omega},$$

т.е. от начала до полного выхода  $i$ -го зуба из заготовки.

$$4. \quad b_i(t) = 0;$$

$$a'_{\varphi_i}(t) = 0;$$

$$a''_{\varphi_i}(t) = 0,$$

если 
$$\left[ t - (q-i) \frac{T}{z} \right] > \frac{az \cos \left( 1 - \frac{2t\rho}{D} \right) + \frac{2Btq \omega \rho \pi}{D}}{\Omega},$$

т.е. когда зуб вышел полностью из заготовки и резания не производит.

В представленных выше формулах для определения толщины среза  $S_{\varphi}$  - подача на зуб.

Приращение толщины среза, вызванное вибрациями фрезы и заготовки и влиянием "следа", как показано в [2], может быть представлено в виде

$$\Delta a_i = [x_g(t) - x_f(t)] \sin \varphi_i + [y_g(t) - y_f(t)] \cos \varphi_i - m \left\{ [x_g(t - \frac{T}{z}) - x_f(t - \frac{T}{z})] \sin \varphi_i + [y_g(t - \frac{T}{z}) - y_f(t - \frac{T}{z})] \cos \varphi_i \right\},$$

где  $m$  - коэффициент, учитывающий влияние "следа",  $m = 0$ , если  $q = I$  (работа "по чистому"), и  $m = I$ , если  $q > I$  (работа "по следу");  $x_g(t), y_g(t), x_f(t), y_f(t)$  - виброперемещения детали и фрезы соответственно, знаки приняты согласно схеме, представленной на рис. 1:  $x_g(t) > 0, x_f(t) > 0$ , если они направлены в сторону движения подачи;  $y_g(t) > 0, y_f(t) > 0$ , если они направлены от обработанной поверхности.

Для того, чтобы учесть отставание силы резания от изменения толщины и ширины среза, необходимо во всех приведенных выражениях значение времени  $t$  заменить на  $t^* = t - \tau$ , где  $\tau$  - величина отставания силы резания от изменения толщины и ширины среза. Как показали исследования [3, 4, 5], отставание  $\tau$  оказывает весьма существенное влияние на возникновение и развитие автоколебаний. При этом установлено, что наиболее интенсивные колебания наблюдаются при значениях  $\tau = 0,25 T_k$ , где  $T_k$  - период колебаний.

Для решения системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений (I) использовался метод шагов, который привел к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} = f(x_1, y_1, y_1', \dots, y^{(n-1)}).$$

Решение выполнялось численным методом Рунге-Кутты с использованием ЭВМ ЕС 1040.



1. Резание конструкционных материалов, режущие инструменты и станки /Под ред. П.Г.Петрухи. М.: Машиностроение, 1974. 614 с.
2. Бурмистров Е.В. Исследование вибраций при концевом фрезеровании высокопрочных сталей на станках с ЧПУ //Высокоэффективные методы и инструменты для механической обработки авиационных материалов: Сб. науч. тр. /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1984. С.98-III.
3. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1986. 179 с.
4. Бурмистров Е.В., Авдонин Г.Т., Маркушин Е.М. Роль отставания силы резания от изменения толщины среза в возбуждении вибраций при обработке резанием //Динамика станков. Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1980. С.9-II.
5. Воронцов Е.Н. Повышение производительности и качества обработки деталей из высокопрочных, коррозионно-стойких сталей и титановых сплавов за счет улучшения характеристик виброустойчивости и надежности сверл малых диаметров: Дис. канд. техн. наук. Куйбышев, 1986. 192 с.

УДК 621.923:536.5.001.24

Д.Л.Скуратов, В.Н.Трусов, А.Ф.Урывский

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДЕТАЛЯХ  
ПРИ ВНУТРЕННЕМ КРУГЛОМ ШЛИФОВАНИИ ИХ КРУГАМИ  
РАЗЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлена математическая модель, описывающая температурное поле в деталях, возникающее при внутреннем круглом шлифовании их кругами различных конструкций, с учетом конвективного теплообмена вне зоны контакта круга с изделием. Приведена методика расчета температурного поля методом граничных элементов.