

ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ МАЛОГО НЕОДНОРОДНОГО ОСЛАБЛЕНИЯ
В ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Рассмотрена задача восстановления коэффициента излучения по проекциям при наличии малого неоднородного ослабления. Показано, что применение известных алгоритмов обращения экспоненциального преобразования Радона с однородным ослаблением приводит к восстановлению искомого поля с некоторой погрешностью. Предложен метод коррекции полученного приближения, позволяющий снизить указанную погрешность. Проанализированы границы применимости метода. Приведены результаты численного моделирования.

Задача восстановления коэффициента излучения $\varepsilon(x, y)$ по проекциям $I(p, \varphi)$ при известном коэффициенте ослабления $\mu(x, y)$ сводится к обращению экспоненциального преобразования Радона

$$I(p, \varphi) = \int_{S_1}^{S_2} \varepsilon(x(s, p, \varphi), y(s, p, \varphi)) \exp\left[-\int_s^{S_2} \mu(x(s', p, \varphi), y(s', p, \varphi)) ds'\right] ds \quad (I)$$

Для случая, когда ослабление постоянно на выпуклом носителе, существует аналитическая формула обращения [1]. Применение этой формулы для случая слабонеоднородного ослабления приводит к восстановлению искомого поля с некоторой погрешностью. В данной работе предлагается метод коррекции полученного приближения, позволяющий уменьшить указанную погрешность.

Пусть $\mu(x, y) = \mu_0 + \Delta\mu(x, y)$. Обозначим интенсивность излучения вдоль прямой в неподвижной и повернутой системах координат соответственно $I(x, y, \varphi)$ и $I(s, p, \varphi)$. Тогда уравнение переноса излучения вдоль прямой, следствием которого является уравнение (I), может быть переписано в виде

$$I(s, p, \varphi) = \int_{S_1}^s [\varepsilon(x(s', p, \varphi), y(s', p, \varphi)) - \Delta\varepsilon(x(s', p, \varphi), y(s', p, \varphi), \varphi)] e^{-\mu_0(s-s')} ds' \quad (2)$$

Вычислительная томография. Куйбышев, 1990

где $\Delta \varepsilon(x, y, \varphi) \equiv \Delta \mu(x, y) I(x, y, \varphi)$.

Представим $\Delta \varepsilon(x, y, \varphi)$ в виде суммы двух ортогональных в L_2 слагаемых:

$$\Delta \varepsilon(x, y, \varphi) = \Delta_1 \varepsilon(x, y) + \Delta_2 \varepsilon(x, y, \varphi),$$

где

$$\Delta_1 \varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) \int_0^{2\pi} I(x, y, \varphi) d\varphi,$$

$$\Delta_2 \varepsilon(x, y, \varphi) = \Delta \mu(x, y) (I(x, y, \varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(x, y, \varphi) d\varphi).$$

Пусть R_{μ_0} - оператор экспоненциального преобразования Радона с постоянным коэффициентом ослабления μ_0 , $R_{\mu_0}^{-1}$ - обратный к нему (выражаемый, например, формулой Третьяка - Метца [1]). Применим оператор $R_{\mu_0}^{-1}$ к обеим частям уравнения (2), рассматриваемого в точке $S = S_2$. Получим

$$R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) = \varepsilon(x, y) - \Delta_1 \varepsilon(x, y) - \Delta_2 \varepsilon(x, y),$$

где $\Delta_3 \varepsilon(x, y) \equiv R_{\mu_0}^{-1} R_{\mu_0} \Delta_2 \varepsilon(x, y, \varphi)$.

Таким образом

$$\varepsilon(x, y) = R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) + \Delta_1 \varepsilon(x, y) + \Delta_3 \varepsilon(x, y). \quad (3)$$

Слагаемые $\Delta_1 \varepsilon(x, y)$ и $\Delta_3 \varepsilon(x, y)$ имеют первый порядок малости по $\Delta \mu$. Однако вычислительный эксперимент показывает, что во многих случаях $\Delta_1 \varepsilon(x, y)$ по норме в несколько раз превосходит $\Delta_3 \varepsilon(x, y)$. Поэтому для учета слабонеоднородного ослабления предлагается искать приближение к $\varepsilon(x, y)$ не в виде

$$\varepsilon(x, y) \approx R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi), \quad (4)$$

а в виде

$$\varepsilon(x, y) \approx R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) + \Delta_1 \varepsilon(x, y). \quad (5)$$

Для $\Delta_1 \varepsilon(x, y)$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \varepsilon(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) \int_0^{2\pi} I(x, y, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) \iint_{s_1}^{2\pi s} [\varepsilon(x, y) - \\
&- \Delta_1 \varepsilon(x, y) - \Delta_2 \varepsilon(x, y, \varphi)] e^{-\mu_0(s-s')} ds' d\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) \iint_{s_1}^{2\pi s} [R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) - (\Delta_2 \varepsilon(x, y, \varphi) - \\
&- \Delta_3 \varepsilon(x, y))] e^{-\mu_0(s-s')} ds' d\varphi \approx \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) \iint_{s_1}^{2\pi s} R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \\
&\varphi) e^{-\mu_0(s-s')} ds' d\varphi = \frac{1}{2\pi} \Delta \mu(x, y) (R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) ** \frac{e^{-\mu_0 z}}{z}),
\end{aligned}$$

где ** - знак $2D$ - свертки.

Были последовательно использованы формулы (2) и (3) и отброшены малые по $\Delta \mu$ слагаемые в подынтегральном выражении.

При малых μ_0 можно избежать вычисления $2D$ - свертки. Аппроксимируем экспоненту линейной зависимостью $\exp(-\mu_0 z) \approx 1 - \mu_0 z$ и воспользуемся вытекающим из малости μ_0 и $\Delta \mu(x, y)$ приближенным равенством

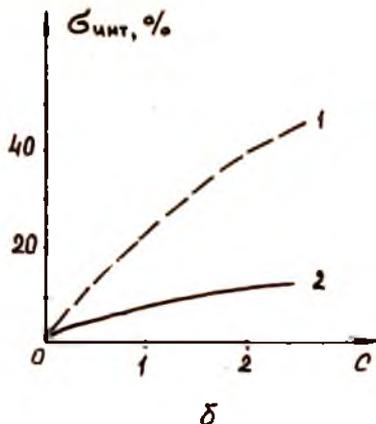
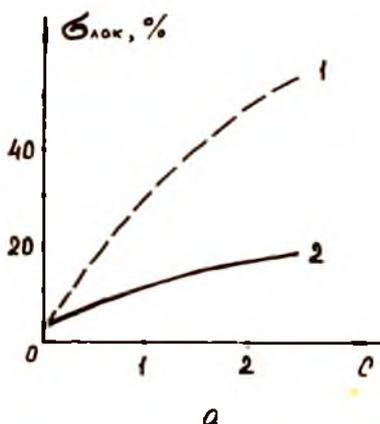
$$R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) ** \frac{1}{z} \approx BI(\rho, \varphi),$$

где B - оператор обратного проецирования $[I]$.

В итоге формула (5) примет вид

$$\varepsilon(x, y) \approx R_{\mu_0}^{-1} I(\rho, \varphi) + \frac{\Delta \mu(x, y)}{2\pi} BI(\rho, \varphi) - \frac{\Delta \mu(x, y)}{2\pi} \mu_0 \alpha \iint R_{\mu_0}^{-1} * (6) \\
* I(\rho, \varphi) dx dy.$$

Численная реализация формулы (6) не требует больших вычислительных ресурсов; время расчета увеличивается на 20% по сравнению с расчетом по формуле (4). Применение формулы (6) наиболее эффективно в тех случаях, когда $\Delta \mu(x, y)$ имеет вид отдельных выбросов, локализация которых либо частично, либо полностью совпадает с локализацией коэффициента излучения. Погрешность восстановления при этом уменьшается в два - три раза по сравнению с восстановлением по формуле (4). Полученное приближение может быть использовано либо самостоятельно, либо как хорошее начальное приближение для последующего итерационного уточнения [2].



Р и с. Зависимость локальной (а) и интегральной (б) погрешностей восстановления от степени неоднородности коэффициента ослабления. 1 - результат восстановления, полученный по формуле (4); 2 - результат восстановления, полученный по формуле (6)

На рисунке приведены результаты вычислительного эксперимента по восстановлению модельного коэффициента излучения, заданного на единичном круге, по 13-ти проекциям и известному коэффициенту ослабления. На проекции был наложен нормально распределенный 5-процентный шум. Коэффициент излучения задавался в виде

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^2 A_i \exp[-((x-x_i)^2 + y^2)/2D_i^2],$$

$$A_1 = 1, \quad x_1 = 0,3, \quad D_1 = 0,15.$$

$$A_2 = 0,7, \quad x_2 = -0,3, \quad D_2 = 0,25.$$

Коэффициент ослабления имел вид

$$\mu(x, y) = \mu_0 + \Delta\mu(x, y),$$

$$\mu_0 = 0,1,$$

$$\Delta\mu(x,y) = c \sum_{i=1}^2 \exp[-((x-x'_i)^2 + y^2)/2d^2],$$

$$x'_1 = 0,2, \quad x'_2 = -0,2, \quad d = 0,15.$$

Параметр c изменялся от нуля до 2,5; тем самым варьировалась степень неоднородности ослабления. Качество восстановления оценивалось по локальной и интегральной погрешностям

$$\sigma_{\text{инт}} = \sqrt{\iint (\varepsilon_{\text{восст}}(x,y) - \varepsilon(x,y))^2 dx dy / \iint \varepsilon^2(x,y) dx dy} \cdot 100\%,$$

$$\sigma_{\text{лок}} = \max |\varepsilon_{\text{восст}}(x,y) - \varepsilon(x,y)| / \max |\varepsilon(x,y)| \cdot 100\%.$$

Библиографический список

1. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987. 232 с.

2. Кунянский Л.А. Итеративное обращение экспоненциального преобразования Радона по малому числу проекций с помощью сплайновых алгоритмов // Методы диагностики двухфазных и реагирующих потоков / Тез. докл. I Всесоюз. науч.-техн. конф. / Харьков, 1988.

УДК 616.07;535.853

П.И.Кулик, В.В.Иванов, А.А.Комиссаров,

Д.И.Поплевина, И.М.Токмулин

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ СПЕКТРАЛЬНО-ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Описан автоматизированный томографический комплекс для исследования плазменного потока сложной конфигурации. В основе разработанного алгоритма лежит обращение двумерного преобразования Радона в схеме веерного пучка. Представлены результаты математического моделирования, качественные и количественные оценки вычислений при реализации данного алго-

Вычислительная томография. Куйбышев, 1990