УДК 533.605; 518.62

Н.П.Менде

О НАКОПЛЕНИИ ОШИБКИ РАЗНОСТИ ХОДА В МЕТОДАХ С ПОСЛОЙНЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ ОБЪЕКТА

Рассмотрен алгоритм вычисления дисперсионных матриц остаточной разности хода с учетом корреляции уменьшаемых и вычитаемых величин.

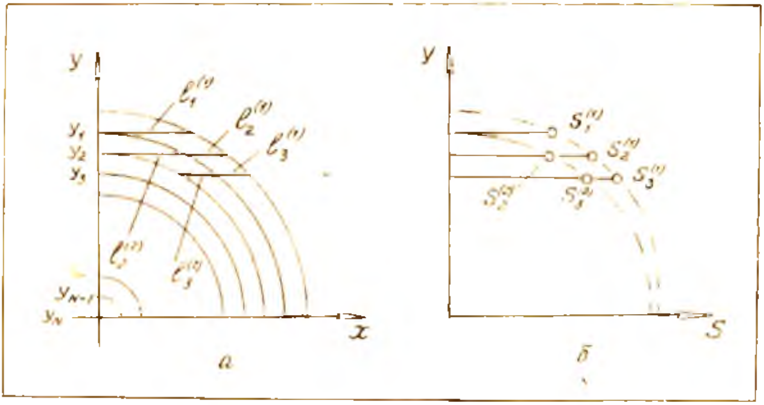
При реконструкции плотности газа по данным интерференционных наблюдений сверхзвуковых аэродинамических объектов могут возникать специфические трудности, обусловленные газодинамическими разрывами на границе и внутри расчетного сечения, а также сильными градиентами плотности. В таких случаях сквозная аппроксимация плотности либо вообще теряет смысл (из-за разрывов), либо имеющейся информации оказывается недостаточно для сквозного описания функции плотности одним аналитическим выражением. Это заставляет прибегнуть к аппроксимации по слоям, в которых плотность описывается не слишком сложными непрерывными функциями. Алгоритм реконструкции в этом случае приобретает рекуррентный характер: на первом шаге рассчитывают плотность во внешнем слое, затем из исходных значений оптической разности хода вычитают вклад внешнего слоя, после чего приступают ко второму слою и т.д. Очевидно, что разность хода после "удаления" внешнего слоя (назовем ее остаточной, а слово "удаление" будем использовать без кавычек, понимая, что речь идет о вычитании вклада слоя) будет иметь дисперсию, отличную от исходной дисперсии измерений.

Дисперсию остаточной разности хода важно знать как для построения адекватной математической модели распределения плотности в очередном слое, так и для оценки дисперсии плотности.

Рассмотрим алгоритм учета нарастания дисперсии остаточной разности хода по мере приближения к центру расчетного сечения на классической схеме зонного метода Шардина в случае осевой симметрии объекта [I]. Алгоритм обобще. на пространственный случай [2].

На рис. I, а изображен один квадрант круглого сечения неоднородности, перпендикулярного оси симметрии. Зондирующие лучи света параллельны оси x . Измерения разности хода проведены в точках y_1, $y_2 \dots y_N$ и образуют вектор.

Вычислительная томография. Куйбышев, 1990



Р и с. I. Квадрант сечения осесимметричной оптической неоднородности (сечение перпендикулярно от симметрии)

$$\bar{S}^{(1)} = (S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \ldots, S_N^{(1)})^T. \tag{I}$$

Чертой над символом будем обозначать векторные величины; здесь нижний индекс отмечает номер компонента вектора; верхний индекс (в скобках, чтоб не путать с показателем степени) относит значение к этапу удаления одноименного слоя (зоны); T – символ транспонирования.

Разобьем сечение на N зон равной ширины и примем, что нам известны значения разности хода на лучах, касательных к границам зон. Плотность газа в каждой зоне полагаем постоянной. Тогда плотность в первой зоне находим по разности хода, накопленной на удвоенном отрезке $\ell_1^{(1)}$ (см.рис.I), а вклады зоны на других лучах окажутся пропорциональны, соответственно, удвоенным длинам отрезков $\ell_2^{(1)}, \ell_3^{(1)}, \ldots$ $\ldots\ \ell_N^{(1)}$ и равны:

$$S_1^{(1)} \frac{\ell_2^{(1)}}{\ell_1^{(1)}},\ S_1^{(1)} \frac{\ell_3^{(1)}}{\ell_1^{(1)}},\ \ldots,\ S_1^{(1)} \frac{\ell_N^{(1)}}{\ell_1^{(1)}}. \tag{2}$$

После расчета плотности во внешней зоне и удаления этой зоны размерность вектора остаточной разности хода (ОРХ) и всех прочих векторов и матриц, которые будут введены ниже, уменьшится на единицу за счет вычеркивания нулевых элементов внешней зоны, которая более не представляет интереса. В индексации компонентов условимся, тем не менее, сохранять первоначальные индексы лучей. Тогда вектор ОРХ (I) после удаления j -I зон следует записать так:

$$\bar{S}^{(j)} = (S_j^{(j)}, S_{j+1}^{(j)}, \ldots, S_N^{(j)})^T. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение вектор отношений

$$h_i^{(j)} = l_i^{(j)} / l_j^{(j)} : \bar{H}^{(j)} = (1, h_{j+1}^{(j)}, h_{j+2}, \ldots, h_N)^T. \tag{4}$$

Теперь вектор вклада зоны j в разность хода на лучах $i=j$, $j+1, \ldots, N$ можно представить в виде

$$\Delta\bar{S}^{(j)} = (\Delta S_j^{(j)}, \Delta S_{j+1}, \ldots, \Delta S_N^{(j)})^T = \bar{H}^{(j)}, S^{(j)}. \tag{5}$$

ОРХ после удаления зоны j составит

$$\bar{S}^{(j+1)} = \bar{S}^{(j)} - \Delta\bar{S}^{(j)}. \tag{6}$$

Напомним, что первый нулевой компонент разности (6) мы отбрасываем, понижая размерность результата на единицу.

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу дисперсий и ковариаций компонентов вектора $\bar{S}^{(j+1)}$ (дисперсионную матрицу вектора) по дисперсионным матрицам векторов в правой части (6). Систематическими ошибками по сравнению со случайными пренебрежем.

Дисперсионная матрица вектора измеренных значений разности хода $\bar{S}^{(1)}$ при равноточных независимых измерениях, очевидно, равна:

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(1)}) = \sigma_0^2 \bar{\bar{I}}, \tag{7}$$

где σ_0^2 - дисперсия измерений разности хода, $\bar{\bar{I}}$ - единичная матрица; двумя чертами над символом будем отмечать матрицы.

Дисперсионные матрицы векторов ОРХ будем, по аналогии с (7), представлять в виде

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(j)}) = \sigma_0^2 \, \overline{\overline{[d_{k,m}^{(j)}]}}; \quad k, m = j, j+1, \ldots, N, \tag{8}$$

где $d_{k,m}^{(j)}$ – элементы положительно определенной матрицы, учитывающей нарастание дисперсии и изменения корреляции компонентов вектора $\bar{S}^{(j)}$ после удаления слоя $j-1$.

Дисперсионная матрица вектора (5) по известному свойству линейного преобразования равна:

$$\bar{\bar{D}}(\Delta\bar{S}^{(j)}) = \sigma^2_{S_1^{(j)}} \bar{H}^{(j)} \bar{H}^{(j)T} = \sigma_0^2 d_{11}^{(j)} \bar{H}^{(j)} \bar{H}^{(j)T}, \tag{9}$$

где $\sigma^2_{S_1^{(j)}}$ – дисперсия первого компонента вектора $\bar{S}^{(j)}$, $d_{11}^{(j)}$ – первый элемент первой строки дисперсионной матрицы того же вектора. Здесь сделано допущение, что геометрия сечения нам известна точно – вектор $\bar{H}^{(j)}$ считается детерминированным; при этом ошибки измерения координат мы "включаем" в ошибку разности хода.

Дисперсионная матрица вектора $\bar{S}^{(j+1)}$ по определению равна:

$$\bar{\bar{D}}(S^{(j+1)}) = E\Big\{\big[(\bar{S}^{(j)} - \Delta\bar{S}^{(j)}) - E(\bar{S}^{(j)} - \Delta\bar{S}^{(j)})\big] \times$$
$$\times \big[(\bar{S}^{(j)} - \Delta S^{(j)}) - E(\bar{S}^{(j)} - \Delta\bar{S}^{(j)})\big]^T\Big\}.$$

E – символ математического ожидания.

Произведя необходимые подстановки и преобразования, найдем [7]

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(j+1)}) = \bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(j)}) + \bar{\bar{D}}(\Delta\bar{S}^{(j)}) - \bar{\bar{D}}_{cov}^{(j)}. \tag{10}$$

Как показано в работе [7], элементы дисперсионной матрицы корреляционного члена в правой части (10) вычисляются через известные элементы первых строки и столбца матрицы $\bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(j)})$. Матрица корреляционного члена равна:

$$\bar{D}_{cov}^{(j)} = \sigma^2 \begin{vmatrix} 2d_{jj}^{(j)}, & d_{j,j+1}^{(j)} h_j^{(j)} + d_{jj}^{(j)} h_{j+1}^{(j)}, & \ldots, & d_{j,N}^{(j)} h_j^{(j)} + d_{jj}^{(j)} h_N^{(j)} \\ d_{jj}^{(j)} h_{j+1}^{(j)} + d_{j,j+1}^{(j)} h_j^{(j)}, & 2d_{j,j+1}^{(j)} h_{j+1}^{(j)}, & \ldots, & d_{j,N}^{(j)} h_{j+1}^{(j)} + d_{j,j+1}^{(j)} h_N^{(j)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{jj}^{(j)} h_N^{(j)} + d_{j,N}^{(j)} h_j^{(j)}, & d_{j,j+1}^{(j)} h_N^{(j)} + d_{j,N}^{(j)} h_{j+1}^{(j)}, & \ldots, & 2d_{j,N}^{(j)} h_N^{(j)} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Заметим теперь, что на первом шаге (j =I) матрица (II) содержит ненулевые элементы только в первых строке и столбце, поскольку корреляция между измерениями разности хода отсутствует ($d^{(1)}_{k,i}$ = 0 при $k \neq i$, см. (7)). Именно эти строку и столбец мы, как условились, вычеркиваем в матрице $\bar{\bar{D}}(\bar{S}^{(2)})$. Таким образом, вычитаемый корреляционный член на первом шаге не оказывает никакого влияния на дисперсионную матрицу $\bar{\bar{D}}(S^{(2)})$, которая, однако, теперь является полностью заполненной, благодаря слагаемому $\bar{\bar{D}}(\Delta S^{(1)})$, не имеющему нулевых элементов. На всех последующих шагах ($j \geq 2$) отрицательный корреляционный член будет оказывать существенное влияние, которое выразится в резком уменьшении приращений дисперсии значений ОРХ. На примере, приведенном в работе [7], показано, что при разбиении сечения на зоны равной ширины приращение дисперсии в последней (внутренней зоне) имеет предел при увеличении числа зон, который не превосходит $1{,}37\sigma_0^2$. Существует предельное значение и для узкой второй зоны, оно равно $(\sqrt{2}-1)^2\sigma_0^2$.

Эффект корреляции компонентов ОРХ, начиная с $j>2$, проявляется в том, что отрицательный корреляционный член на шаге $j+1$ очень близок по величине к слагаемому вклада в дисперсию удаляемой зоны на шаге j, чем достигается почти полная их компенсация. Практически оказывается нескомпенсированным вклад последней удаляемой зоны. Приведем для иллюстрации последовательность слагаемых при вычислении дисперсии ОРХ в последней десятой зоне:

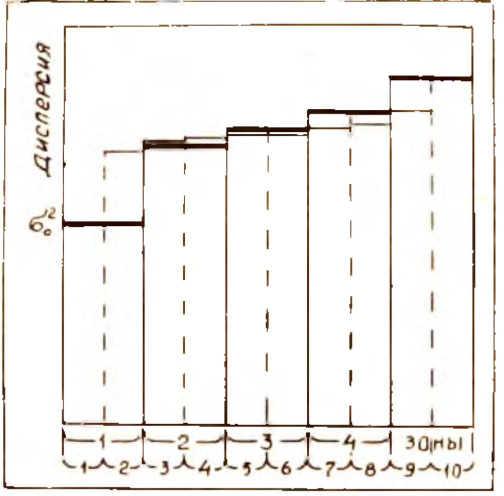
$$\sigma^2=\sigma_0^2(1+0{,}05_1-0_1+0{,}07_2-0{,}05_2+0{,}08_3-0{,}06_3+$$
$$+0{,}09_4-0{,}08_4+0{,}11_5-0{,}09_5+\underline{0{,}14_6}-0{,}11_6+ \qquad (12)$$
$$+\underline{0{,}18_7}-\underline{0{,}14_7}+\underline{0{,}25_8}-\underline{0{,}19_8}+0{,}43_9-\underline{0{,}30_9})\cong 1{,}37\sigma_0^2.$$

Корреляционные члены опознаются по знаку "минус". Компенсирующие друг друга члены в конце последовательности отмечены однотипным подчеркиванием, нижними индексами отмечена принадлежность параметров к соответствующим зонам. Нескомпенсированный член (в данном примере $0{,}43_9$) равен дисперсии разности хода в удаляемой зоне j, умноженной на $(h^{(j)}_{j+1})^2$. Это позволяет предложить оценку сверху для дисперсии ОРХ в очередной зоне $j+1$, смежной с удаляемой зоной j:

$$\sigma^{2\,(j+1)}_{S_{j+1}}=\sigma_0^2+\sigma^{2\,(j)}_{S_j}(h^{(j)}_{j+1})^2=\sigma_0^2(1+d^{(j)}_{jj}(h^{(j)}_{j+1})^2). \qquad (13)$$

Такая оценка не требует вычисления ковариаций компонентов векторов $\vec{S}^{(j)}$ и позволяет рекуррентным образом получать дисперсии в зонах по мере приближения к центру сечения. Погрешность оценки в приведенном примере всего $\sim$ 5%.

На рис. 2 изображены гистограммы дисперсий разности хода в зонах при разбиении сечения на 5 и 10 зон. Видно, что с увеличением числа зон приращение дисперсии во второй зоне несколько уменьшается, скачки дисперсий при переходе к следующим зонам также становятся меньше за исключением последних зон, в которых достигается практически одно и то же значение.



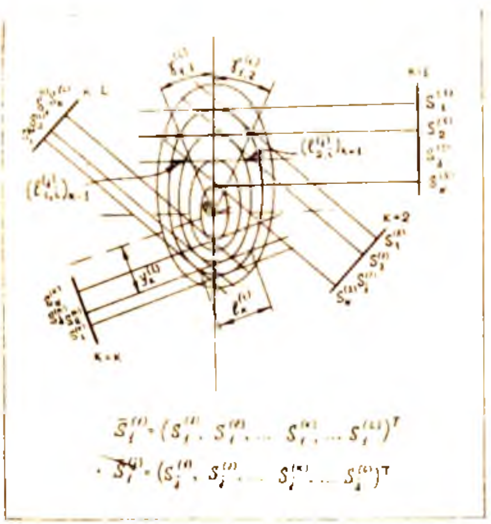
Р и с. 2. Гистограмма дисперсий разности хода в зонах при разбиении на 5 и 10 зон

Из полученного заключения об ограниченном нарастании дисперсии ОРХ при увеличении числа зон было бы неверно сделать вывод о слабой зависимости от числа зон дисперсии окончательного результата, т.е. плотности среды. Помимо разности хода в выражение для плотности входит геометрическая длина пути луча в зоне, стоящая в знаменателе выражения. Таким образом, дисперсия плотности обратно пропорциональна квадрату длины пути. Увеличение числа зон приводит к сокращению отрезков $\ell_j^{(j)}$ (см.рис.1), причем длина пути во внутренних зонах убывает быстрее, чем во внешних. Так, при десяти зонах дисперсия плотности в десятой зоне (при равной ширине зон) в 19 раз превзойдет дисперсию в первой зоне.

Приведенный подход при реконструкции поля плотности с осевой симметрией зонным методом, вообще говоря, не нужен. Дело сводится в этом случае к решению системы алгебраических уравнений с треугольной матрицей полного ранга, а дисперсии значений плотности в зонах могут быть найдены путем обращения матрицы системы. Тем не менее, мы рассмотрели данный подход по двум причинам. Во-первых, при послойном расщеплении сечения и реконструкции с использованием аппроксимации в каждом слое нам понадобятся значения дисперсии ОРХ для внутренних слоев, чтобы выбрать адекватную модель распределения плотности. Во-вторых, подход применим и необходим в более сложном случае – при отсутствии осевой симметрии.

Будем рассматривать аэродинамический объект, обладающий плоскостной симметрией (тело вращения под углом атаки). Это ограничение – плоскостная симметрия – не является принципиальным; оно лишь позволит без усложнений использовать выкладки работы [3], в которой использован принципиально тот же подход, что и в работе [2].

В данном случае рассматривается несколько проекций объекта, причем направления проецирующих лучей параллельны расчетному сечению. Расчетное сечение, перпендикулярное вектору скорости набегающего потока, разобьем на кольцевые зоны, в пределах которых плотность меняется по азимуту, но полагается постоянной по радиальной координате. Измерения разности хода производятся независимо с равной точностью для всех проекций. Обходя здесь вопросы интерполирования, будем считать, что нам известны значения разности хода на лучах, касательных к границам кольцевых зон.



Р и с. 3. Схема просвечивания несколькими пучками света сечения пространственной оптической неоднородности (обозначения)

Введем систему векторов, компонентами которых являются разности хода на разных проекциях для одной зоны. На рис. 3 показано сечение объекта, разбитое на N кольцевых зон. L зондирующих пучков накапливают на лучах, касательных к границам зон, разности хода $S_j^{(k)}$; нижним индексом отмечен номер луча, верхний индекс относит компонент к плоскости наблюдения с индексом k. Итак

$$\bar S^{(j)} = (S_j^{(1)}, S_j^{(2)}, \dots, S_j^{(L)})^T. \qquad (14)$$

В соответствии с процедурой зонного метода значения разности хода на лучах j будут меняться по мере удаления зон, поэтому снабдим векторы $\bar{S}^{(j)}$ нижним индексом $i \geq j=1,2,\ldots,N$, отмечающим этап реконструкции в очередной зоне.

Ограниченность объема публикации в данном сборнике требует краткости изложения: ряд преобразований придется пропустить. Пробелы читатель сможет восполнить из источника [7].

Запишем

$$\bar{S}_{j+1}^{(j)}=\bar{S}_i^{(j)}-\Delta\bar{S}_i^{(j)},\ j=i,\ i+1,\ldots,N, \tag{15}$$

где $\Delta\bar{S}_i^{(j)}$ - вклад в разность хода зоны i на лучах j,

отметим, что

$$\bar{S}_{j+1}^{(j)}=\bar{S}_j^{(j)}-\Delta S_j^{(j)}\equiv 0, \tag{16}$$

поэтому имеет смысл только $i \geq j$.

Дисперсионные матрицы векторов, объединяющих результаты измерений, равны:

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}_1^{(j)})=\sigma_0^2\bar{\bar{I}},\ j=1,2,\ldots,N.$$

Для вычисления вклада зоны в разность хода для лучей j на этапе i (член $\Delta\bar{S}_i^{(j)}$ в (15) необходимо использовать найденное для зоны i распределение плотности. Воспользуемся результатами [3].

Разность хода вдоль луча, отстоящего от полюса системы координат на величину $y_i^{(k)}$ (см.рис.3 и работы [2,3,6,7]), связана с плотностью газа соотношением

$$\int\limits_{\ell_i^{(k)}}\rho_i^*(\ell_i^{(k)})\,d\ell_i^{(k)}=S_i^{(k)}(y_i^{(k)})\,\mathcal{B}+\ell_i^{(k)}, \tag{17}$$

где $\rho_i^*(\ell_i^{(k)})$ - плотность газа вдоль луча $\ell_i^{(k)}$, отнесенная к плотности в набегающем потоке; $S_i^{(k)}(y_i^{(k)})$ - компонент вектора разности хода (отсутствие точки между символами и скобками означает функциональную зависимость в отличие от произведения в противном случае); $\mathcal{B}$ - константа, учитывающая условия проведения опыта [2].

Относительная плотность газа в зоне i представлена [3] отрезком четного ряда Фурье по азимутальной координате γ :

$$\rho_i^{\tau}=\sum_{m=1}^{M}\rho_m^{(i)}\cos\left[(m-1)\gamma\right]. \tag{18}$$

Переходя к интегрированию выражения (17) по полярному углу с помощью преобразования

$$d\ell=y\,\frac{d\gamma}{\cos^2(\varphi_\kappa-\gamma)}, \tag{19}$$

где φ_κ – полярный угол направления нормали к лучам проекции κ, получим

$$\int\limits_{\gamma_{\kappa,1}^{(i)}}^{\gamma_{\kappa,2}^{(i)}}\sum_{m=1}^{M}\rho_m^{(i)}\cos\left[(m-1)\gamma\right]\frac{y_i^{(\kappa)}\,d\gamma}{\cos^2(\varphi_\kappa-\gamma)}=S_i^{(\kappa)}\beta+\ell_i^{(\kappa)}, \tag{20}$$

где $\gamma_{\kappa,1,2}^{(i)}$ – угловые координаты точек пересечения луча с внешним контуром зоны i κ -й проекции (см.рис.3).

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\sum_{m=1}^{M}\rho_m^{(i)}Q_{\kappa m}^{(i)}=S_i^{(\kappa)}\beta+\ell_i^{(\kappa)}, \tag{21}$$

$$\text{где}\quad Q_{\kappa m}^{(i)}=y_i^{(\kappa)}\int\limits_{\gamma_{\kappa,1}^{(i)}}^{\gamma_{\kappa,2}^{(i)}}\cos\left[(m-1)\gamma\right]\frac{d\gamma}{\cos^2(\varphi_\kappa-\gamma)},\quad \kappa=1,2,\dots,4, \tag{21$'$}$$

Интегралы (21$'$) вычисляются аналитически [3,6].

При принятой геометрии расчетного сечения величины $Q_{\kappa m}^{(i)}$ и $\ell_i^{(\kappa)}$ считаем детерминированными.

Перейдем к векторной записи уравнений (21$'$):

$$\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)}=\bar{S}_i^{(i)}\beta+\bar{\ell}^{(i)}. \tag{22}$$

По аналогии с (16) дисперсионные матрицы векторов $\bar{S}_i^{(j)}$ представим в виде

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}_i^{(j)})=\hat{\sigma}_{i-1}^2\,\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(j)}, \tag{23}$$

где $\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(j)}$ – положительно определенная матрица, учитывающая на очередном шаге i увеличение дисперсии и изменение ковариаций компонентов ОРХ.

Величина $\hat{\sigma}^2_{i-1}$ есть оценка дисперсии разности хода по остаточной сумме квадратов при аппроксимации плотности в предыдущей зоне выражением (18).

Нормальные уравнения обобщенного метода наименьших квадратов применительно к (22) имеют вид

$$(\bar{\bar{Q}}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)} = (\bar{\bar{Q}}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}(\bar{S}_i^{(i)}\beta + \bar{\ell}^{(i)}). \qquad (24)$$

Обобщенный метод наименьших квадратов минимизирует выражение, которое в нашем случае выглядит так:

$$(\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)} - \bar{S}_i^{(i)}\beta - \bar{\ell}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}(\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)} - \bar{S}_i^{(i)}\beta - \bar{\ell}^{(i)}). \qquad (25)$$

Дисперсионная матрица остатков в условиях уравнений, соответствующих записи (24) (см. [4]), оказывается диагональной и в данном случае равна:

$$\beta^2\hat{\sigma}_i^2\bar{\bar{I}},$$

где $\hat{\sigma}_i^2$ оценивается с помощью статистики как

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{(\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)} - \bar{S}_i^{(i)}\beta - \bar{\ell}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}(\bar{\bar{Q}}^{(i)}\bar{\rho}^{(i)} - \bar{S}_i^{(i)}\beta - \bar{\ell}^{(i)})}{L - M^{(i)}}, \qquad (26)$$

здесь L – число условных уравнений, равное числу проекций объекта; $M^{(i)}$ – число членов аппроксимации плотности в зоне i .

Найденная таким образом оценка $\hat{\sigma}^2$ и входит с соответствующим нижним индексом в выражение (23). Остается построить матрицы $\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(j)}$, помня что $\bar{\bar{\Sigma}}_1^{(j)} = \bar{\bar{I}}$ (см.формулу (16)).

Вернемся к формуле (15).

При учете вклада зоны i в разность хода для лучей $j = i+1, i+2, \ldots, N$ необходимо вычислить элементы матриц $\bar{\bar{Q}}$, интегрируя (20) вдоль двух отрезков луча $\ell_{1,i}^{(j)}$ и $\ell_{2,i}^{(j)}$ (см.рис.3). Результаты интегрирования в виде двух слагаемых сведем соответственно в две группы матриц $\bar{\bar{Q}}_1^{(j)}$ и $\bar{\bar{Q}}_2^{(j)}$. Тогда можем записать

$$\Delta\bar{S}_i^{(j)} = \frac{1}{\beta}(\bar{\bar{Q}}_{1,i}^{(j)} + \bar{\bar{Q}}_{2,i}^{(j)})\hat{\rho}^{(i)} - \frac{\bar{\ell}_{1,i}^{(j)} + \bar{\ell}_{2,i}^{(j)}}{\beta} . \tag{27}$$

Таким образом, второй член в правой части выражения (I5) найден. Его дисперсионная матрица равна

$$\underset{(L\times L)}{\bar{\bar{D}}(\Delta\bar{S}_i^{(j)})} = \frac{1}{\beta^2}\underset{(L\times M^{(i)})}{(\bar{\bar{Q}}_{1,i}^{(j)} + \bar{\bar{Q}}_{2,i}^{(j)})}\underset{(M^{(i)}\times M^{(i)})}{\bar{\bar{D}}(\hat{\rho}^{(i)})}\underset{(M^{(i)}\times L)}{(\bar{\bar{Q}}_{1,i}^{(j)} + \bar{\bar{Q}}_{2,i}^{(j)})^T} . \tag{28}$$

Под строкой в скобках указаны размеры матриц.

Дисперсионная матрица плотности в (28) находится по известным формулам регрессионного анализа применительно к уравнению (24):

$$\hat{\rho} = \left[(\bar{\bar{Q}}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}\bar{\bar{Q}}^{(i)}\right]^{-1}(\bar{\bar{Q}}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}(\bar{S}_i^{(i)}\beta + \bar{\ell}^{(i)}), \tag{29}$$

$$\bar{\bar{D}}(\bar{\rho}^{(i)}) = \beta^2\hat{\sigma}_i^2\left[(\bar{\bar{Q}}^{(i)})^T(\bar{\bar{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}\bar{\bar{Q}}^{(i)}\right]^{-1} . \tag{30}$$

Построим рекуррентное соотношение для $\bar{\bar{D}}(\bar{S}_i^{(j)})$. По определению

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}_{i+1}^{(j)}) = \bar{\bar{D}}(\bar{S}_i^{(j)} - \Delta\bar{S}_i^{(j)}) = E\left\{\left[\bar{S}_i^{(j)} - \Delta\bar{S}_i^{(j)} - E(\bar{S}_i^{(j)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Delta\bar{S}_i^{(j)})\right]\left[\bar{S}_i^{(j)} - \Delta\bar{S}_i^{(j)} - E(\bar{S}_i^{(j)} - \Delta\bar{S}_i^{(j)})\right]^T\right\} . \tag{31}$$

Проведя подстановки и преобразования, приведем соотношение (3I) к виду

$$\bar{\bar{D}}(\bar{S}_{i+1}^{(j)}) = \bar{\bar{D}}(\bar{S}_i^{(j)}) + \bar{\bar{D}}(\Delta\bar{S}_i^{(j)}) - \bar{\bar{D}}_{i\,cov}^{(j)} , \tag{32}$$

где не определен только последний (корреляционный) член, который равен:

$$\bar{\bar{D}}_{i\,cov}^{(j)} = E\left\{(\bar{S}_i^{(j)} - E\bar{S}_i^{(j)})(\Delta\bar{S}_i^{(j)} - E\Delta\bar{S}_i^{(j)})^T\right\} +$$

$$+ E\left\{(\Delta\bar{S}_i^{(j)} - E\Delta\bar{S}_i^{(j)})(\bar{S}_i^{(j)} - E\bar{S}_i^{(j)})^T\right\} . \tag{33}$$

Для вы..ления (33) представим выражение (27) следующим образом:

$$\overline{\Delta S}_i^{(j)} = \overline{\overline{H}}_i^{(j)} \overline{S}_i^{(i)} + \overline{L}_i^{(j)}, \tag{34}$$

где $\overline{\overline{H}}_i^{(j)} = (\overline{\overline{Q}}_{1,i}^{(j)} + \overline{\overline{Q}}_{2,i}^{(j)}) \left[(\overline{\overline{Q}}^{(i)})^T (\overline{\overline{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1} \overline{\overline{Q}}^{(i)} \right]^{-1} (\overline{\overline{Q}}^{(i)})^T (\overline{\overline{\Sigma}}_i^{(i)})^{-1}$,

а $L_i^{(j)}$ – детерминированный вектор, который в дальнейшем нас не интересует, поскольку $\overline{L}_i^{(j)} - E\overline{L}_i^{(j)} = 0$.

Теперь можно получить

$$\overline{\overline{D}}_{i\,cov}^{(j)} = \overline{\overline{H}}_i^{(j)} \overline{\overline{cov}}(\overline{S}_i^{(i)}, \overline{S}_i^{(j)}) + \overline{\overline{cov}}(\overline{S}_i^{(j)}, \overline{S}_i^{(i)}) (\overline{\overline{H}}^{(j)})^T, \tag{35}$$

где $\overline{\overline{cov}}(\overline{A}, \overline{B})$ – обобщенный ковариационный оператор [5]. Рекуррентное соотношение для вычисления ковариационных операторов в (35) имеет вид

$$\begin{gathered}\overline{\overline{cov}}(\overline{S}_i^{(z)}, \overline{S}_i^{(p)}) = \overline{\overline{H}}_{i-1}^{(z)} \overline{\overline{D}}(\overline{S}_{i-1}^{(i-1)}) \overline{\overline{H}}_{i-1}^{(p)T} + \overline{\overline{cov}}(\overline{S}_{i-1}^{(z)}, \overline{S}_{i-1}^{(p)}) - \\ - \overline{\overline{H}}_{i-1}^{(z)} \overline{\overline{cov}}(\overline{S}_{i-1}^{(i-1)}, \overline{S}_{i-1}^{(p)}) - \overline{\overline{cov}}(\overline{S}_{i-1}^{(z)}, \overline{S}_{i-1}^{(i-1)}) (\overline{\overline{H}}_{i-1}^{(p)})^T, \; z, p = \\ = i, i+1, \ldots, N.\end{gathered} \tag{36}$$

Отметим, что ковариационный оператор некоммутативен по отношению к векторным аргументам, и

$$\overline{\overline{cov}}(\overline{S}_i^{(i)}, \overline{S}_i^{(i)}) = \overline{\overline{D}}(\overline{S}_i^{(i)}). \tag{37}$$

Поскольку из окончательных формул следуют результаты предыдущего раздела как частный случай, ясно, что при слабой асимметрии справедливы качественные выводы, полученные для осесимметричного случая. В частности, определяющим фактором увеличения дисперсии плотности будет уменьшение длин пути к центру сечения.

По аналогии с предыдущим можно предложить для получения оценок приращения дисперсии соотношение

$$\begin{gathered}\overline{\overline{D}}(\overline{S}_{i+1}^{(j)}) = \sigma_0^2 \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{D}}(\overline{\Delta S}_i^{(j)}) = \sigma_0^2 I + \frac{1}{\beta^2} (\overline{\overline{Q}}_{1,i}^{(j)} + \\ + \overline{\overline{Q}}_{2,i}^{(j)}) \overline{\overline{D}}(\hat{\overline{\rho}}^{(i)}) (\overline{\overline{Q}}_{1,i}^{(j)} + \overline{\overline{Q}}_{2,i}^{(j)})^T,\end{gathered}$$

являющееся многомерным аналогом выражения (4) и не требующее дополнительных вычислений сверх тех,которые нужны для расчета плотности.

Заметим, что при многоракурсном просвечивании объекта приращение дисперсии после удаления очередного слоя будет меньше, чем при обработке одной проекции осесимметричного процесса. Причиной этого является "избыточность" информации: число проекций, как правило, превосходит число оцениваемых параметров в разложении плотности.

Библиографический список

1. Ковалев П.И., Менде Н.П., Михалев А.Н. и др. Применение интерферометра Маха-Цендера для изучения обтекания движущихся объектов // Оптические методы исследования в баллистическом эксперименте /Под ред. Г.И.Мишина. Л.: Наука, 1979. С. 70-90.

2. Татаренчик В.С. Определение плотности в пространственных течениях газа оптическим методом//Исследование пространственных газодинамических течений на основе оптических методов /Под ред. С.М.Белоцерковского //Тр. Военно-воздуш.инженер.акад.им.проф. И.Е.Жуковского. Вып. 1059. 1964. С. 11-34.

3. Комиссарук В.А., Менде Н.П., Попов Л.Н. Оптическая томография аэродинамического объекта. Реконструкция плотности/Препринт / АН СССР ФТИ им.А.Ф.Иоффе. Л.,1989. С. 75-80.

4. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента: Учеб.пособие. М.:Наука, 1987. 320 с.

5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.:Мир, 1980.456 с.

6. Комиссарук В.А., Менде Н.П., Попов Л.Н. О некоторых особенностях зонного метода интерференционной томографии аэродинамических объектов //Реконструктивная томография: Сб.науч.тр./Куйбышев.авиац. ин-т. Куйбышев, 1987. С. 34-39.

7. Менде Н.П. Вычислительная томография: о накоплении ошибки разности хода в методах с послойным расщеплением объекта /Препринт/ АН СССР ФТИ им. А.Ф.Иоффе; Л.,1989. С. 13-17.