

Зелёный А.С., Бунякин А.В.

**ВЫДЕЛЕНИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ВЕТВЕЙ КОМПЛЕКСНОГО  
ПОТЕНЦИАЛА ОБТЕКАНИЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЕГО СЕГМЕНТА**

Изложен метод численного моделирования плоского потенциального обтекания крылового профиля. Используется модель течения с постоянной плотностью. Нахождение потенциала скорости даёт возможность вычисления давления из интеграла Коши – Лагранжа. Для этой цели контур профиля аппроксимируется комплексным кубическим сплайном с возможностью смещения его вершин. Расчёт внешнего течения вокруг профиля осуществляется методом граничных элементов, в котором используется условие Кутта-Жуковского (плавного схода потока с острой кромки) как условие замыкания системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Использование данного метода аппроксимации профиля в комбинации с методом граничных элементов позволяет получить полуаналитическое решение для комплексного потенциала скорости во всей области течения. Представленный метод выделения однозначных ветвей может использоваться для описания колебаний сегмента аэродинамического профиля во взаимодействии с набегающим потоком (флаттера).

Постановка задачи заключается в следующем: на плоскости заданы *опорные точки*, определяющие «каркас» профиля ( $z_0 = z_n$  – острая кромка, рис. 1); требуется построить кусочно-кубическую функцию, интерполирующую данные опорные точки.

Будем использовать интерполяционный сплайн степени 3 дефекта 1. Также будем исходить из предположения, что узлы сплайна

$$a = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = b, \quad [a, b] \in \mathbb{R}$$

одновременно служат узлами интерполяции, т.е. в них известны значения функции  $z_k := z(p_k) \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, n$ , причём  $z_0 = z_n$  (условие замыкания профиля, рис. 1).

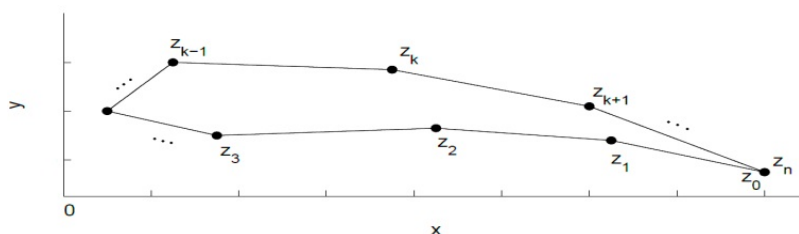


Рис. 1. Набор опорных точек, задающих каркас профиля ( $z_0 = z_n$  – острая кромка)

Определение. Кубическим комплексным сплайном на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , называется функция

$$S(p) := \left\{ \begin{array}{l} s_k(p) := a_k + b_k(p - p_k) + c_k(p - p_k)^2 + d_k(p - p_k)^3 \\ p \in [p_{k-1}, p_k] \subset \mathbb{R}; a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{C} \end{array} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

удовлетворяющая совокупности условий:

а) интерполяция в узлах сплайна

$$s_k(p_k) = z_k, \quad k = 1, \dots, n;$$

б) гладкая стыковка звеньев сплайна

$$s_{k-1}(p_{k-1}) = s_k(p_{k-1}), s'_{k-1}(p_{k-1}) = s'_k(p_{k-1}), s''_{k-1}(p_{k-1}) = s''_k(p_{k-1}), k = 2, 3, \dots, n;$$

в) условия слияния профиля в точке  $z_0 = z_n$

$$s_1(p_0) = s_n(p_n), s'_1(p_0) = s'_n(p_n), s''_1(p_0) = s''_n(p_n).$$

На рис. 2 показана наглядная структура звеньев сплайна.

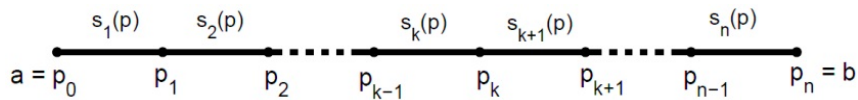


Рис. 2. Расположение узлов и звеньев кубического сплайна (1)

Условий оказалось  $4n$  – ровно столько, сколько неизвестных коэффициентов.

Подставляя в них выражения функций и их производных

$$\begin{aligned} s_k(p) &= a_k + b_k(p - p_k) + c_k(p - p_k)^2 + d_k(p - p_k)^3, \\ s'_k(p) &= b_k + 2c_k(p - p_k) + 3d_k(p - p_k)^2, \quad s''_k(p) = 2c_k + 6d_k(p - p_k) \end{aligned}$$

и полагая для краткости  $h_k = p_k - p_{k-1}$ , получаем систему связей

$$a_k = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, \end{array} \right\} \text{при } k = 2, 3, \dots, n,$$

$$a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = a_n,$$

$$b_1 - 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = -b_n, \quad (*)$$

$$c_1 - 3d_1 h_1 = -c_n. \quad (**)$$

Исключая неизвестные  $a_k, b_k, d_k$ , приходим к формуле для нахождения коэффициентов  $c_k$  [1]:

$$h_{k-1} c_{k-2} + 2(h_{k-1} + h_k) c_{k-1} + h_k c_k = 3 \left( \frac{z_k - z_{k-1}}{h_k} - \frac{z_{k-1} - z_{k-2}}{h_{k-1}} \right), \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

При  $k = 2$  в (2) присутствует коэффициент  $c_0$ , который принимается равным нулю

(т. н. фиктивный коэффициент). При использовании метода прогонки для систем с трёхдиагональной матрицей коэффициентов необходимо также равенство нулю и коэффициента  $c_n$ . Поэтому полагаем в начале  $c_n = 0$ , а затем выражаем его из (\*\*). Так как производная в точке замыкания не существует, то отбрасывается соотношение (\*). Это не влияет на последующие результаты. Кубический сплайн (1), оставаясь интерполяционным дефекта 1, утрачивает лишь свойство быть естественным.

Стоит также заметить, что  $|2h_{k-1} + 2h_k|$  заведомо больше, чем  $|h_{k-1}| + |h_k|$ , а значит, выполняется достаточное условие однозначной разрешимости, т.е. существует единственный набор коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющий (2). Вектор свободных членов системы (2) является комплексным, в то время как сама матрица – вещественная. Однако можно воспользоваться свойством линейности СЛАУ и решить отдельно две чисто вещественные системы, а уже из их решений получить вектор комплексных коэффициентов.

Преимуществом данного метода является возможность свободного варьирования опорных точек для получения кривой произвольной формы, а также возможность произвольно задавать количество получаемых точек между любыми двумя узлами сплайна. Рисунок 3 демонстрирует результат аппроксимации вышеизложенным методом.

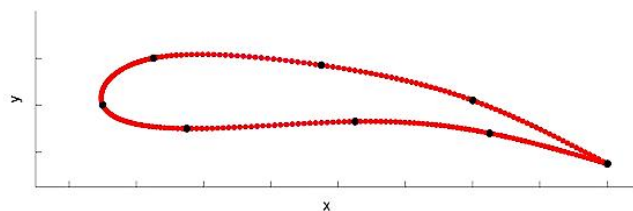


Рис. 3. Аппроксимированный профиль

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$w(z) = U_\infty e^{-i\alpha} z - \oint \gamma(s) \ln(z - z(s)) ds, \quad U_n = 0, \quad (3)$$

где  $w(z)$  – комплексный потенциал скорости;  $U_\infty$  – скорость набегающего потока;  $\gamma(s)$  – вихревой слой;  $\alpha$  – угол атаки;  $U_n$  – условие непротекания.

Везде далее  $\alpha = 0$ . Дифференцируя (3) по  $z$ , получаем сопряжённую скорость течения

$$V = \frac{dw}{dz} = U_\infty - \frac{\partial}{\partial z} \oint \gamma(s) \ln(z - z(s)) ds. \quad (4)$$

Во избежание путаницы введём также комплексную скорость  $U = V$

$$V = u - iv, \quad U = u + iv,$$

где  $u, v$  — компоненты вектора скорости.

В связи с заменой контура профиля ломаной (рис. 4)

$$\gamma(s) = \gamma_k + \frac{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)s}{\Delta s_k}, \quad z(s) = z_k + \frac{(z_{k+1} - z_k)s}{\Delta s_k}, \quad \Delta s_k = |z_{k+1} - z_k|, \quad s \in [0, \Delta s_k], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

интеграл в правой части (4) заменяется конечной суммой:

$$\frac{\partial}{\partial z} \oint \gamma(s) \ln(z - z(s)) ds = \oint \frac{\gamma(s)}{z - z(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta s_k} \frac{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)}{(z - z_k) \Delta s_k - (z_{k+1} - z_k)s} ds, \quad (5)$$

то есть интеграл по контуру заменяется интегралом по ломаной, аппроксимирующей этот контур.

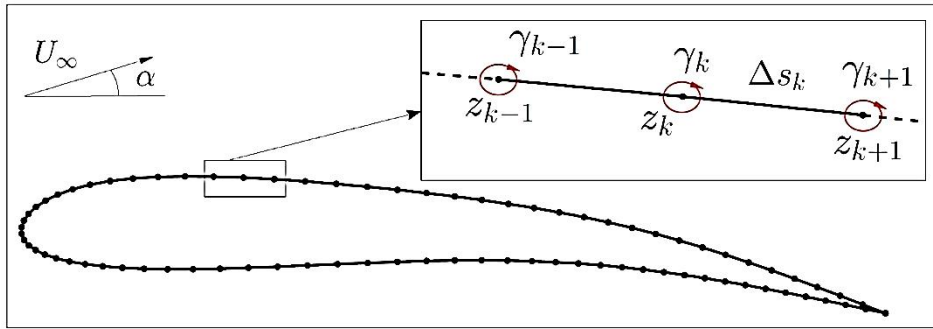


Рис. 4. Расположение точечных вихрей и точек на контуре.

После взятия интеграла (5) и подстановки его в равенство (4), придём к выражению для комплексно-сопряжённой скорости:

$$V = U_\infty - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{z_{k+1} - z_k} \left\{ \gamma_{k+1} - \gamma_k + \left[ \frac{(z - z_k)(\gamma_{k+1} - \gamma_k)}{z_{k+1} - z_k} + \gamma_k \right] \ln \frac{z - z_{k+1}}{z - z_k} \right\}. \quad (6)$$

Для нахождения  $\gamma_k$  надо произвести коллокацию с учётом граничного условия, состоящего в том, что на граничных элементах (на звеньях ломаной) скорость направлена по касательной к этим элементам. В качестве коллокационных точек берутся середины элементов. В результате коллокации задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно  $\gamma_k$ . В качестве замыкания системы уравнений выступает уравнение (условие Кутта-Жуковского)

$$\gamma_1 + \gamma_{n+1} = 0.$$

Проинтегрировав формально равенство (6) по  $z$ , получим формулу для комплексного потенциала скорости:

$$w(z) = U_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{2A_k} \left[ B_k (z_k + z) - C_k A_k \ln(z - z_{k+1}) + \frac{(z_k - z)(C_k z_k - B_k z - 2\gamma_k z_{k+1}) \ln \left( \frac{z - z_{k+1}}{z - z_k} \right)}{A_k} \right], \quad (7)$$

где  $A_k = z_{k+1} - z_k$ ;  $B_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k$ ;  $C_k = \gamma_{k+1} + \gamma_k$ . Константа интегрирования в равенстве (7) опущена.

Сложность в использовании формулы (7) для нахождения комплексного потенциала скорости  $w(z)$ , следовательно, для нахождения вещественного потенциала  $\varphi(z) = \text{Re}[w(z)]$  заключается в наличии множителя  $\ln(z - z_{k+1})$ .

Из теории известно [2], что функция

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

является многозначной функцией.

Разобьём всю область движения, которая не является односвязной на две односвязные области  $D_+$  и  $D_-$ , граница между которыми состоит из сепаратрисы течения и профиля крыла (рис. 5).

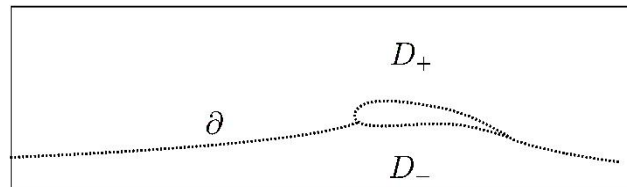


Рис. 5. Выделение односвязных областей

Тогда в каждой односвязной области можно выделить главную ветвь логарифма  $\text{Ln}(z)$ :

$$\begin{aligned} \ln_+(z - z_{k+1}) &= \ln|z - z_{k+1}| + i \text{Arg}_+(z - z_{k+1}), \quad z \in D_+, \\ \ln_-(z - z_{k+1}) &= \ln|z - z_{k+1}| + i \text{Arg}_-(z - z_{k+1}), \quad z \in D_-. \end{aligned}$$

Экспериментальным путём с помощью численного расчета было установлено, что аргументы  $\text{Arg}_+$  и  $\text{Arg}_-$  в областях  $D_+$  и  $D_-$  необходимо вычислять с разрезами  $-\pi/2$  и  $\pi/2$  соответственно (рис. 6).

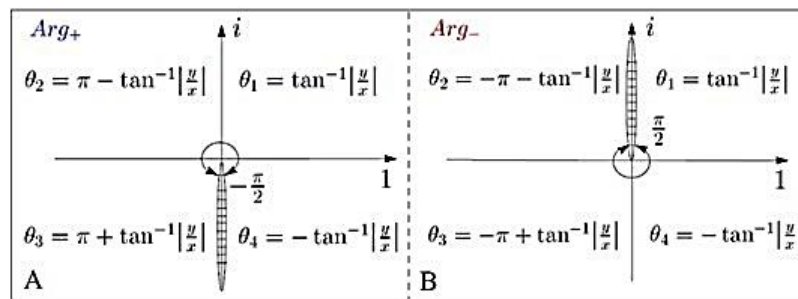


Рис. 6. К вычислению главных аргументов логарифмических функций

Таким образом, среди всех ветвей многозначной функции (7) были выделены две однозначные ветви, осуществляющие отображения областей  $D_+$  и  $D_-$ :

$$w(z)_{\pm} = \bar{V}_{\infty} z + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta s_k}{2A_k} \left[ B_k (z_k + z) - C_k A_k \ln(z - z_{k+1}) + \frac{(z_k - z)(C_k z_k - B_k z - 2\gamma_k z_{k+1}) \ln\left(\frac{z - z_{k+1}}{z - z_k}\right)}{A_k} \right], z \in D_{\pm}. \quad (8)$$

На рис. 7 показан результат численного интегрирования потенциала методом Рунге-Кутты с начальным условием  $\varphi_{\pm}^0 = \operatorname{Re} [w_{\pm}(s_{\pm}^0)]$  (рис 7, B) и потенциал, найденный с помощью функций (8) на линиях тока  $S_+$  и  $S_-$  (рис. 7, C), где  $S_+$  и  $S_-$  – линии тока, «обтекающие» профиль сверху и снизу. При этом сами линии тока  $S_+$  и  $S_-$  полностью лежат в односвязных областях  $D_+$  и  $D_-$  (рис. 7, A).

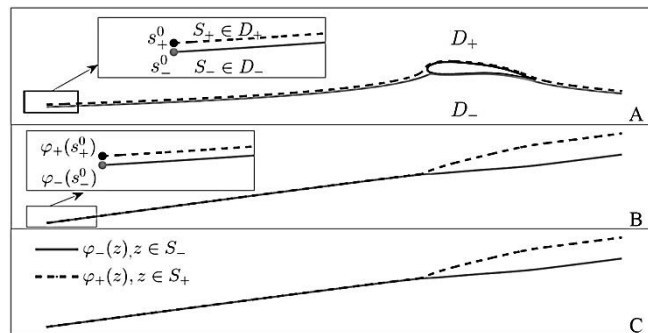


Рис. 7. Сравнение результатов интегрирования вещественнозначного потенциала методом Рунге-Кутта (B) с полуаналитическим решением  $\varphi_{\pm}^0 = \operatorname{Re} [w_{\pm}(s_{\pm}^0)]$  (C)

Модуль разности соответствующих значений потенциала, полученных этими двумя способами, – величина порядка  $10^{-7}$ , что указывает на надёжность и адекватность предлагаемого метода линейного приближения – метода граничных элементов.

С помощью полученных функций (8) находятся значения потенциала в любой точке (за исключением сепаратрисы) течения. Данный алгоритм выделения однозначных ветвей может использоваться для описания колебаний сегмента аэродинамического профиля (флаттера) в модели аэроупругости [3].

### Библиографический список

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов – М.: Высш. шк., 2002.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
3. Zelenyy A.S., Bunyakin A.V. Direct numerical simulation of the airfoil segment's flutter and its effect on the aerodynamic force // Universal Journal of Applied Mathematics 5(2): pp. 17-27, 2017.