

Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А.

УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С АСТЕРОИДОМ

Введение

Одной из составляющих защиты от угроз из космоса является установка беспилотного летательного аппарата (БЛА) зондирующей аппаратуры на астероиде для оперативного и точного определения параметров его движения. Рассматривается задача программного управления БЛА на конечном этапе сближения с астероидом, решение которой становится основой в выборе его проектных параметров.

Задача сближения

Предполагается, что БЛА, сформированный из закреплённых днищами двух конусов, выводится на околоземную орбиту ракетой-носителем, после чего он с помощью своих ракетных двигателей (РД), установленных с одной стороны БЛА симметрично по три на двух образующих различных конусов, выходит на орбиту позади астероида, сравнивая свою скорость со скоростью астероида. Для сближения с астероидом БЛА производит разгон, а затем, после углового сравнительно быстрого разворота на 180 градусов вокруг продольной оси связанной системы координат с началом в центре масс (с помощью четырех рулевых РД, установленных попарно с противоположными тягами и с двух противоположных сторон на стыке днищ конусов) производит торможение, в результате которого вплотную сближается с астероидом с нулевой относительной скоростью и закрепляется на нём.

Математическая модель

Поступательное движение БЛА в условиях отсутствия аэродинамического сопротивления и гравитационного притяжения малого астероида описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$m(t) = m_0 - |\dot{m}|(t - t_0), \quad \dot{h} = -V, \quad (1)$$

где V – относительная поступательная скорость БЛА, h – расстояние между БЛА и астероидом, m – масса ракеты (корпус, двигатель, топливо, аппаратура), P – суммарная сила тяги шести РД (представляемых далее в виде одного объединенного РД), проходящая через центр масс БЛА:

$$P = -\dot{m}P_{sp}g, \quad (2)$$

где $\dot{m} = dm / dt = \text{const} < 0$ – массовый секундный расход топлива, P_{sp} – удельная тяга, $g = \text{const} = 9,81 \text{ м/с}^2$. Знак «плюс» в уравнении (1) принимается при разгоне, знак «минус» – при торможении. Предполагается, что расход топлива двигателем осуществляется по равномерному закону [2]:

$$m(t) = m_0 - |\dot{m}|(t - t_0). \quad (3)$$

Для уравнений (1), (2) заданы начальные условия:

$$V(t_2) = V_2 = 0, \quad t = t_0 = 0, \quad V(t_0) = V_0 = 0, \quad h(t_0) = h_0, \quad m(t_0) = m_0. \quad (4)$$

Постановка задачи

Требуется установить закон управления РД, структура которого выражается в моменте переключения t_1 поступательного ускорения с разгона на торможение и моменте выключения двигателя t_2 , когда БЛА, имея начальное состояние (4), переходит в заданное конечное состояние:

$$t = t_2, \quad V(t_2) = V_2 = 0, \quad h(t_2) = h_2 = 0, \quad (5)$$

где t_2 – неизвестное конечное время.

Решение задачи

Решение задачи сближения или установления закона управления проведём методом аналитического конструирования составной траектории поступательного движения БЛА из двух отрезков: разгона и торможения, разделённых моментом переключения [3, 4].

Рассмотрим первый отрезок, $t \in [t_0, t_1]$. Разгон при поступательном движении описывается уравнением:

$$m\dot{V} = -\dot{m}P_{sp}g, \quad (6)$$

с начальными условиями (4). После разделения переменных приходим к уравнению:

$$\int_{V_0}^V dV = -P_{sp}g \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

которое после вычисления интегралов даёт следующую зависимость текущей скорости от времени:

$$V(t) = V_0 - P_{sp}g \ln(m(t)/m_0). \quad (7)$$

В конце первого отрезка получаем выражение для скорости:

$$V_1 = V_0 - P_{sp}g \ln[1 - \beta(t_1 - t_0)], \quad (8)$$

где $\beta = |\dot{m}|/m_0$ – удельный массовый секундный расход топлива в двигателе.

Решение второго уравнения системы (1) с учётом зависимости (7) приводит к уравнению

$$h = h_0 - \int_{t_0}^t \left[V_0 - P_{sp} g \ln \frac{m_0 - |\dot{m}(t-t_0)|}{m_0} \right] dt .$$

С учётом введённого обозначения β предыдущее уравнение принимает вид:

$$h = h_0 - V_0(t-t_0) + P_{sp} g \int_{t_0}^t \ln[1 - \beta(t-t_0)] dt .$$

Для его решения введём новую переменную: $\ln[1 - \beta(t-t_0)] = z$, $t = t_0$, $z_0 = 0$, для которой справедливы соотношения:

$$e^z = 1 - \beta(t-t_0), \quad e^z dz = -\beta dt, \quad dt = -e^z dz / \beta .$$

С новой переменной последнее уравнение принимает вид:

$$h = h_0 - V_0(t-t_0) - \frac{P_{sp} g}{\beta} \int_{z_0}^z z e^z dz .$$

Вычисляя интеграл по частям, получаем зависимость текущего расстояния между БЛА и астероидом от времени при разгоне:

$$h = h_0 - V_0(t-t_0) - P_{sp} g \{ [1 - \beta(t-t_0)] \ln[1 - \beta(t-t_0)] + \beta(t-t_0) \} / \beta . \quad (9)$$

В конце первого отрезка составной траектории поступательного движения расстояние вычисляется по формуле:

$$h_1 = h_0 - V_0(t_1-t_0) - P_{sp} g \{ [1 - \beta(t_1-t_0)] \ln[1 - \beta(t_1-t_0)] + \beta(t_1-t_0) \} / \beta .$$

С нулевыми начальными условиями (4) последнее выражение принимает вид:

$$h_1 = h_0 - P_{sp} g \{ [1 - \beta t_1] \ln[1 - \beta t_1] + \beta t_1 \} / \beta . \quad (10)$$

Получили систему из двух уравнений (8), (10) с тремя неизвестными t_1 , V_1 , h_1 .

Рассмотрим второй отрезок составной траектории сближения, $t \in [t_1, t_2]$. Поступательное движение на втором отрезке представляет собой торможение и описывается уравнением:

$$m \dot{V} = \dot{m} P_{sp} g \quad (11)$$

с начальными условиями (8), (10). Разделяя переменные и учитывая зависимость (3) для второго отрезка, интегрированием уравнения (11) получаем зависимость для текущей скорости сближения от массы:

$$V = V_1 + P_{sp} g \ln((m_1 - |\dot{m}(t-t_1)|) / m_1) .$$

С учётом $m_1 = m_0 - |\dot{m}|t_1$ и обозначения $|\dot{m}|/m_0 = \beta$ приходим к выражению:

$$V = V_1 + P_{sp} g \ln((1 - \beta t)/(1 - \beta t_1)) . \quad (12)$$

Подстановка выражения для скорости (8) даёт зависимость скорости поступательного торможения от времени:

$$V = P_{sp} g [-\ln(1 - \beta t_1) + \ln((1 - \beta t)/(1 - \beta t_1))]$$

или

$$V = P_{sp} g [-2 \ln(1 - \beta t_1) + \ln(1 - \beta t)] . \quad (13)$$

В конце второго отрезка получаем уравнение:

$$V_2 = P_{sp} g [-2 \ln(1 - \beta t_1) + \ln(1 - \beta t_2)] = 0 \quad (14)$$

с неизвестными t_1 и t_2 .

Из уравнения (14) выразим момент сближения t_2 через момент переключения t_1 :

$$t_2 = 2t_1 - \beta t_1^2 = (2 - \beta t_1)t_1 . \quad (15)$$

Второе уравнение системы (1) с учётом зависимости (13) принимает вид:

$$dh/dt = P_{sp} g [2 \ln(1 - \beta t_1) - \ln(1 - \beta t)] .$$

Интегрирование последнего уравнения даёт выражение для текущего расстояния между БЛА и астероидом:

$$h = h_1 + P_{sp} g \{2 \ln(1 - \beta t_1)(t - t_1) + [\ln(1 - \beta t)(1 - \beta t) - \ln(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_1) + \beta(t - t_1)]/\beta\} .$$

Подстановка выражения для расстояния переключения (10) даёт:

$$h = h_0 - P_{sp} g \{[1 - \beta t_1] \ln[1 - \beta t_1] + \beta t_1\} + P_{sp} g \{2 \ln(1 - \beta t_1)(t - t_1) + [\ln(1 - \beta t)(1 - \beta t) - \ln(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_1) + \beta(t - t_1)]/\beta\} / \beta .$$

При контакте с астероидом получаем уравнение:

$$h_2 = h_0 - P_{sp} g \{[1 - \beta t_1] \ln[1 - \beta t_1] + \beta t_1\} + P_{sp} g \{2 \ln(1 - \beta t_1)(t_2 - t_1) + [\ln(1 - \beta t_2)(1 - \beta t_2) - \ln(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_1) + \beta(t_2 - t_1)]/\beta\} / \beta = 0 . \quad (16)$$

Будем предполагать, что сближение БЛА с астероидом осуществляется с помощью двигателя, обеспечивающего БЛА небольшую, например, единичную тяговооружённость:

$$|P|/(m_0 g) = |\dot{m}|P_{sp} g/(m_0 g) = \beta P_{sp} = 1 ,$$

откуда следует:

$$\beta = 1/P_{sp} .$$

Для современных ракетных двигателей с жидкими компонентами топлива величина удельной тяги достигает значений 300 – 400 с. В этом случае удельный массовый секундный расход топлива составляет $\beta = 0,0025 - 0,0033$ 1/с. Кроме того,

будем считать, что сближение с астероидом происходит достаточно быстро (за время, не превышающее нескольких десятков секунд).

Тогда с большой степенью точности логарифмические функции в уравнении (14) можно представить рядами Тейлора с одним членом разложения:

$$\ln(1 - \beta t) \approx -\beta t .$$

С логарифмическими функциями, представленными первыми членами разложения в ряд Тейлора, получаем уравнение:

$$h_0 - P_{sp} g \{-\beta t_1 [1 - \beta t_1] + \beta t_1\} / \beta + P_{sp} g \{-2\beta t_1(t_2 - t_1) + [-\beta t_2(1 - \beta t_2) + \beta t_1(1 - \beta t_1) + \beta(t_2 - t_1)] / \beta\} = 0,$$

которое после несложных преобразований принимает вид:

$$t_2^2 - 2t_1 t_2 + h_0 / (P_{sp} g \beta) = 0 . \quad (17)$$

Подстановка (15) в уравнение (17) приводит к уравнению четвёртой степени относительно искомой неизвестной t_1 :

$$t_1^4 - (2 / \beta) t_1^3 + h_0 / (P_{sp} g \beta^3) = 0 , \quad (18)$$

которое решается одним из приближённых численных методов.

После вычисления момента переключения время сближения вычисляется по формуле (15). Эти два момента полностью определяют закон управления разгоном – торможением БЛА при сближении с астероидом.

Пример

Пусть $\beta = 0,004$ 1/с, $P_{sp} = 300$ с. Тогда при $h_0 = 100$ м уравнение (18) принимает вид:

$$t_1^4 - 500t_1^3 + 530920,8 = 0 .$$

Из четырёх найденных корней подходящий корень t_1 имеет значение 10,273 с . По формуле (15) вычисляем продолжительность сближения:

$$t_2 = (2 - \beta t_1) t_1 = (2 - 0,004 \cdot 10,273) 10,273 = 20,124 \text{ с} .$$

Пусть начальная масса перед сближением составляет $m_0 = 500$ кг. Тогда по формуле $|\dot{m}| = m_0 \beta$ определяем величину массового секундного расхода топлива $|\dot{m}| = 500 \cdot 0,004 = 2$ кг/с. Эта величина позволяет вычислить необходимую величину силы тяги двигателя:

$$P = |\dot{m}| P_{sp} g = 2 \cdot 300 \cdot 9,81 = 5886 \text{ Н} .$$

Необходимая масса топлива определяется продолжительностью сближения:

$$m_2 = |\dot{m}|t_2 = 2 \cdot 20,124 = 40,248 \text{ кг.}$$

Максимальная скорость при сближении достигается в момент переключения, т.е. в конце разгона и составляет величину:

$$V_1 = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1) = -300 \cdot 9,81 \ln(1 - 0,004 \cdot 10) = 120,14 \text{ м/с.}$$

Заключение

На основе аналитического решения дифференциальных уравнений поступательного движения с учётом динамики выгорания топлива получены выражения для расчёта момента переключения двигателя с разгона на торможение и момента сближения, которые являются программными управляющими параметрами в законе управления сближением БЛА с астероидом.

Полученные результаты представляют собой удобный инструмент при выборе основных проектных параметров БЛА и их двигателей, а также при проектировании бортовых алгоритмов, в частности, для построения программных траекторий движения центра масс при сближении.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-48-02040.

Библиографический список

1. Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А. Управление сближением беспилотного летательного аппарата с астероидом за назначенной время. Сборник трудов XX Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Часть I. Самара, 14-16 июня 2017 г. – Самара, АНО «Изд-во СНЦ», 2018. – С. 15.
2. Н.И. Карякин, К.Н. Быстров, П.С. Киреев. Краткий справочник по физике. М. Высшая школа. 1963. 560 с.
3. Афанасьев В.А., Мещанов А.С., Хайруллин В.Р. Аналитическое конструирование траекторий полета возвращаемых космических аппаратов. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2010, № 4, С. 161-170.
4. Афанасьев В.А., Дегтярёв Г.Л., Мещанов А.С., Сиразетдинов Т.К. Аналитическое программирование угловых разворотов в атмосфере космических аппаратов // Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. № 4. С. 11 – 15.