УДК 629.78:351.814.3

Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А.

УПРАВЛЕНИЕ ПРИЧАЛИВАНИЕМ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА К АСТЕРОИДУ С УЧЁТОМ ИНЕРЦИОННОСТИ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЯ НА ЭТАПЕ ПАУЗЫ И ТОРМОЖЕНИЯ

Введение

На четвёртом полуинтервале-паузе, $t \in (t_3, t_4]$, скорость беспилотного летательного аппарата (БЛА) остаётся постоянной, расстояние h до астероида уменьшается, находится его зависимость от неизвестных t_2, t_5, которые являются моментом окончания установившейся работы двигателя при разгоне и моментом начала установившейся работы двигателя при торможении. На пятом полуинтервале, $t \in (t_4, t_5]$, включается двигатель с тягой торможения, получено второе уравнение относительно расстояния h и неизвестных t_2, t_5. На шестом интервале, $t \in (t_5, t_6]$, получено выражение для расстояния h_6 в конце шестого полуинтервала. На седьмом полуинтервале, $t \in (t_6, t_7]$, получены решение относительно управляющих моментов t_2, t_5 и ограничение в сторону уменьшения на задание конечного времени причаливания $t = t_7 = t_k$.

Решение задачи причаливания на этапе паузы и торможения

Рассмотрим четвёртый полуинтервал, $t \in (t_3, t_4]$. Двигатель не работает, движение БЛА описывается уравнениями:

$$\dot{V} = 0, \quad \dot{h} = -V, \tag{1}$$

с начальными условиями по скорости [1] и расстоянию [1].

Скорость полёта сохраняется неизменной:

$$V = \text{const} = V_3 = n(T_2 - T_1 + t_2). \tag{2}$$

В конце четвёртого полуинтервала она определяется выражением:

$$V_4 = n\left(T_2 - T_1 + t_2\right) \tag{3}$$

Интегрирование второго уравнения системы (1) с учётом зависимости (2):

$$\frac{dh}{dt} = -n\left(T_2 - T_1 + t_2\right),$$

даёт выражение для текущего расстояния: $h = h_3 - n(T_2 - T_1 + t_2)(t - t_3)$.

В конце четвёртого полуинтервала расстояние определяется выражением:

$$h_4 = h_3 - n(-T_1 + T_2 + t_2)(t_4 - t_3)\,.$$

С учётом [1] получаем выражение:

$$h_4 = h_0 + n(T_1 - 3T_2)\, t_2 - nt_2^2 / 2 + n(3T_1T_2 - 2T_2^2 - T_1^2) - n(T_2 - T_1 + t_2)(t_4 - t_3)\,. \qquad (4)$$

Используя соотношение $t_3 = t_2 + 3T_2$, вместо неосновной неизвестной t_3 введём основную неизвестную t_2: $h_4 = h_0 + n(T_1 - 3T)\, t_2 - nt_2^2 / 2 + n(3T_1T_2 - 2T_2^2 - T_1^2) - n(T_2 - T_1 + t_2)(t_4 - t_2 - 3T_2)$.

После преобразований приходим к выражению

$$h_4 = h_0 + nT_1\, t_2 - nt_2^2 / 2 + n(T_2^2 - T_1^2) - n(-T_1 + T_2 + t_2)(t_4 - t_2)\,. \qquad (5)$$

Из соотношения $t_5 - t_4 = 3T_1$ выразим неосновную неизвестную через вторую основную t_5: $t_4 = t_5 - 3T_1$. С учётом последнего соотношения выражение (5) принимает вид:

$$h_4 = h_0 + nT_1\, t_2 - nt_2^2 / 2 + n(T_2^2 - T_1^2) - n(T_2 - T_1 + t_2)(t_5 - 3T_1 - t_2)\,.$$

После преобразований получаем выражение для расстояния в конце четвёртого отрезка составной траектории сближения:

$$h_4 = h_0 + n(T_2 + 3T_1)t_2 + nt_2^2 / 2 - n(T_2 - T_1 + t_2)t_5 + n(T_2^2 + 3T_1T_2 - 4T_1^2)\,, \qquad (6)$$

которое является уравнением с тремя неизвестными t_2, t_5, h_4.

Рассмотрим пятый полуинтервал, $t \in (t_4, t_5]$. Двигатель выключается для торможения, движение БЛА описывается уравнениями:

$$\dot{V} = -n(1 - \exp(-(t - t_4)/T_1))\,, \qquad \dot{h} = -V \qquad (7)$$

с начальными условиями (3) и (6). Интегрирование первого уравнения системы (7) даёт выражение текущей скорости сближения на пятом полуинтервале: $V = V_4 - n(t - t_4) -$ $- nT_1(\exp(-(t - t_4)/T_1) - 1)$. С учётом скорости в начале полуинтервала (3) получаем:

$$V = n(T_2 - T_1 + t_2) - n(t - t_4) - nT_1(\exp(-(t - t_4)/T_1) - 1)\,. \qquad (8)$$

В конце пятого полуинтервала скорость определяется выражением:

$$V_2 = n\left(T_2 - T_1 + t_2\right) - n\left(t_5 - t_4\right) - nT_1\left(\exp\left(t_5 - t_4\right)/T_1 - 1\right).$$

С учётом предельного перехода и соотношения $t_5 - t_4 = 3T_1$ получаем следующую величину скорости в конце пятого полуинтервала:

$$V_5 = n\left(T_2 - 3T_1 + t_2\right), \qquad (9)$$

которая является начальной для интегрирования уравнений движения на шестом полуинтервале составной траектории сближения.

Второе уравнение системы (7) с учётом скорости (8) принимает вид:

$$dh/dt = -n\left(-T_1 + T_2 + t_2\right) + n\left(t - t_4\right) + nT_1(\exp(-(t - t_4)/T_1) - 1)\,.$$

Интегрирование последнего уравнения даёт:

$$h = h_4 - n(T_2 + t_2)(t - t_4) + n(t^2/2 - t_4^2/2 - t_4 t + t_4^2) - nT_1^2(\exp(-(t - t_4)/T_1) - 1).$$

В конце пятого полуинтервала получаем:

$$h_5 = h_4 - n(T_2 + t_2)(t_5 - t_4) + n(t_5 - t_4)^2/2 - nT_1^2(\exp(-(t_5 - t_4)/T_1) - 1).$$

С учётом $t_5 - t_4 = 3T_1$ и предельного перехода приходим к выражению:

$$h_5 = h_4 - n(T_2 + t_2)3T_1 + 11nT_1^2/2.$$

Подстановка выражения (6) даёт:

$$h_5 = h_0 + nT_2 t_2 + nt_2^2/2 - n(T_2 - T_1 + t_2)t_5 + n(T_2^2 + 3T_1^2/2). \tag{10}$$

Получили уравнение с тремя искомыми неизвестными t_2, t_5, h_5, из которых первые две основные управляющие параметры в структуре закона управления.

Рассмотрим шестой полуинтервал, $t \in (t_5, t_6]$. Ракетный двигатель работает в установившемся режиме для создания торможения, движение описывается уравнениями:

$$\dot{V} = -n, \dot{h} = -V \tag{11}$$

с начальными условиями (9), (10). Интегрирование первого уравнения системы (11) даёт: $V = V_5 - n(t - t_5)$. С учётом (9) получаем:

$$V = n(T_2 - 3T_1 + t_2) - n(t - t_5). \tag{12}$$

В конце шестого полуинтервала имеем: $V_6 = V_5 - n(t_7 - 3T_2 - t_5)$, где $t_7 = t_k$ – задано.

Подстановка (9) даёт выражение для скорости в конце шестого полуинтервала:

$$V_6 = n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5). \tag{13}$$

Второе уравнение системы (11) с учётом зависимости (12) принимает вид:

$$dh/dt = -n(T_2 - 3T_1 + t_2) + n(t - t_5).$$

Интегрирование даёт зависимость текущего расстояния от времени:

$$h = h_5 - n(T_2 - 3T_1 + t_2)(t - t_5) + n(t - t_5)^2/2.$$

В конце шестого полуинтервала получаем выражение:

$$h_6 = h_5 - n(T_2 - 3T_1 + t_2)(t_6 - t_5) + n(t_6 - t_5)^2/2.$$

С учётом соотношения $t_6 = t_7 - 3T_2$ получаем:

$$h_6 = h_5 - n(T_2 - 3T_1 + t_2)(t_k - 3T_2 - t_5) + n(t_k - 3T_2 - t_5)^2/2.$$

После преобразований приходим к выражению:

$$h_6 = h_5 - nt_k t_2 + 3nT_2 t_2 + n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k)t_5 + n(t_k^2/2 - 4T_2 t_k + 15T_2^2/2 + 3T_1 t_k - 9T_1 T_2) + nt_5^2/2.$$

Подстановка (10) даёт окончательное расстояние в конце полуинтервала $t \in (t_5, t_6]$:

$$h_6 = h_0 + nt_2^2/2 + nt_5^2/2 + nT_2t_2 - nt_kt_2 + n3T_2t_2 + n(3T_2 - 2T_1 - t_k)t_5 + \\ + n(t_k^2/2 - 4T_2t_k + 17T_2^2/2 + 3T_1t_k - 9T_1T_2 + 3T_1^2/2)\,. \qquad (14)$$

Рассмотрим седьмой полуинтервал, $t \in (t_6, t_7]$. На данном заключительном полуинтервале составной траектории сближения происходит остановка двигателя, движение описывается уравнениями:

$$\dot{V} = -n\exp(-(t - t_6)/T_2)\,, \qquad \dot{h} = -V \qquad (15)$$

с начальными условиями (13), (14). Интегрирование уравнения (15) на полуинтервале с переменным верхним пределом, $t \in (t_6, t]$, даёт зависимость текущей скорости сближения от времени: $V = V_6 + nT_2(\exp(-(t - t_6)/T_2) - 1)$. С учётом зависимости для скорости (13) получаем:

$$V = n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5) + nT_2(\exp(-(t - t_6)/T_2) - 1)\,. \qquad (16)$$

В конце всей составной траектории выражение для скорости имеет вид:

$$V_7 = n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5) + nT_2(\exp(-(t_7 - t_6)/T_2) - 1)\,.$$

С учётом предельного перехода следует уравнение с двумя основными искомыми неизвестными t_2, t_5: $V_k = n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5) - nT_2 = 0$, откуда выразим вторую неизвестную через первую:

$$t_5 = t_k - t_2 + 3T_1 - 3T_2\,. \qquad (17)$$

Второе уравнения системы (15) с учётом зависимости (16) принимает вид:

$$dh/dt = -n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5) - nT_2(\exp(-(t - t_6)/T_2) - 1)\,.$$

Интегрирование последнего уравнения даёт:

$$h = h_6 - n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5)(t - t_6) + nT_2^2(\exp(-(t - t_6)/T_2) - 1) + nT_2(t - t_6)\,.$$

В конце сближения имеем:

$$h_7 = h_6 - n(4T_2 - 3T_1 + t_2 - t_k + t_5)(t_7 - t_6) + nT_2^2(\exp(-(t_7 - t_6)/T_2) - 1) + nT_2(t_7 - t_6)\,.$$

С учётом предельного перехода и соотношения $t_7 - t_6 = 3T_2$ получаем:

$$h_6 + n(-10T_2^2 + 9T_1T_2 - 3T_2t_2 + 3T_2t_k - 3T_2t_5) = 0\,.$$

Подстановка начальной величины расстояния на этом полуинтервале (14) приводит к уравнению с двумя неизвестными:

$$h_0 + nt_2^2/2 + nt_5^2/2 + nT_2t_2 - nt_kt_2 + n(-2T_1 - t_k)t_5 + n(t_k^2/2 - T_2t_k - 3T_2^2/2 + 3T_1t_k + 3T_1^2/2) = 0\,. \qquad (18)$$

Подстановка выражения t_5 (17) даёт:

$$h_0 + nt_2^2/2 + n(t_k - t_2 + 3T_1 - 3T_2)^2/2 + nT_2t_2 - nt_kt_2 + \\ + n(-2T_1 - t_k)(t_k - t_2 + 3T_1 - 3T_2) + n(t_k^2/2 - T_2t_k - 3T_2^2/2 + 3T_1t_k + 3T_1^2/2) = 0\,.$$

После преобразований приходим к уравнению относительно неизвестной t_2:

$$t_2^2 - (T_1 - 4T_2 + t_k)t_2 + h_0 / n + T_1 t_k - T_2 t_k - 3T_1 T_2 + 3T_2^2 = 0 . \qquad (19)$$

Решение уравнения (19) имеет вид:

$$t_2 = t_k / 2 + T_1 / 2 - 2T_2 \pm \sqrt{t_k^2 / 4 - h_0 / n - (T / 2_1 + T_2)t_k + (T_1 + 2T_2)^2 / 4} . \qquad (20)$$

Для вычисления второй неизвестной t_5 согласно (17), (20) получаем формулу:

$$t_5 = t_k / 2 + 5T_1 / 2 - T_2 \mp \sqrt{t_k^2 / 4 - h_0 / n - (T_1 / 2 + T_2)t_k + (T_1 + 2T_2)^2 / 4} . \qquad (21)$$

Ограничение на применимость формул (20), (21) следует из условия положительности подкоренного выражения:

$$t_k > T_1 + 2T_2 + 2\sqrt{h_0 / n} , \qquad (22)$$

которое означает, например, что при располагаемом ускорении $n = 1$ м/с^2 время причаливания нельзя задавать меньше $t_k = 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 2\sqrt{100 / 1} = 20{,}5$ с.

Пример

Пусть БЛА при работе двигателя в установившемся режиме получает ускорение $n = 1$ м/с^2. Причаливание начинается с расстояния $h_0 = 100$ м при начальной скорости $V_0 = 0$. Двигатель имеет постоянные времени: $T_1 = 0{,}1\ c$, $T_2 = 0{,}2\ c$. Требуется составить закон управления силой тяги, при котором причаливание БЛА к астероиду произойдёт через 22 с.

Закон управления считается установленным, если определены моменты времени t_2 и t_5. По формуле (20) получаем:

$$t_2 = 11 + 0{,}05 - 0{,}4 \pm \sqrt{121 - 100/1 - 5{,}5 + 0{,}0625} = 10{,}65 \pm 3{,}945\,\text{с}.$$

Из физических соображений следует, что для вычисления момента t_2 необходимо выбрать знак минус. Тогда получаем значение первого управляющего параметра $t_2 =$ $6{,}705$ с. При вычислении момента t_5 по формуле (21) знак принимается положительным: $t_5 = 14{,}995\,\text{с}$. Вычислим остальные моменты времени в законе управления:

$$t_3 = t_2 + 3T_2 = 6{,}705 + 0{,}6 = 7{,}305\ \text{с}, \qquad t_4 = t_5 - 3T_1 = 14{,}995 - 0{,}3 = 14{,}695\ \text{с}.$$

Пауза между разгоном и торможением равна: $t_4 - t_3 = 7{,}390$ с.

Максимальная скорость достигается в момент t_3 и равна:

$$V_3 = n(T_2 - T_1 + t_2) = 1(0{,}2 - 0{,}1 + 6{,}705) = 6{,}805\ \text{м/с}.$$

Выводы

Решение задачи причаливания состоит в установлении закона управления работой двигателя, при котором БЛА причаливает к астероиду с нулевой скоростью за назначенное время. Для решения задачи используется метод аналитического конструирования составной траектории причаливания из семи типовых отрезков, на которых дифференциальные уравнения поступательного движения имеют аналитические решения. В качестве начальных условий на текущем отрезке принимаются параметры движения в конце предыдущего отрезка. Получены формулы для вычисления значений двух управляющих параметров, однозначно определяющих структуру закона управления. Практическое значение имеет методика формирования в полёте программной траектории причаливания с учётом динамики переходных процессов в силе тяги при включении и выключении ракетного двигателя.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-48-02040.

Библиографический список

1. Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А. Управление причаливанием беспилотного летательного аппарата к астероиду с учетом инерционности тяги двигателя на этапе разгона. Сборник трудов XX Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Часть I. Самара, 14-16 июня 2017 г. – Самара, АНО «Изд-во СНЦ», 2018. С. 21.