

Четвериков А. С.

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ПЕРЕЛЁТЕ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

Проблема повышения эффективности транспортных операций в космосе, в том числе перелётов на геостационарную орбиту (ГСО), с использованием электрореактивных двигателей малой тяги в настоящее время приобретает особую актуальность.

Перелёты на ГСО с малой тягой (ускорение от тяги составляет  $0,1 - 1 \text{ мм/с}^2$ ) в «сильных» гравитационных полях достаточно продолжительны и занимают порядка 150 – 300 суток.

В процессе полёта на космический аппарат (КА) действуют различные возмущающие силы и моменты, которые будут приводить к значительным отклонениям фактической траектории полёта от номинальной.

Модель движения КА с электрореактивной двигательной установкой (ЭРДУ) должна учитывать динамику траекторного движения КА, динамику движения относительно центра масс, ограничения на ориентацию вектора тяги, влияние возмущающих факторов (нецентральность гравитационного поля Земли, лунно-солнечные возмущения, исполнительные ошибки реализации вектора тяги и т. п.).

В общем виде задача оптимального управления записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u, v), \\ t &\in [t_0, t_K], u \in U, x \in X, (x(t), u(t)) \in V(t), \\ x(t_0) &\in X_0, x(t_K) \in X_K \end{aligned}$$

с минимизацией функционала

$$I = \bar{V}_{XK}(x_0, x_K, u(t, x)) + \Delta x_K^T \Lambda \Delta x_K \rightarrow \min.$$

Здесь  $x$  – вектор состояния, включающий в себя параметры траекторного и углового движений;  $u$  – вектор управления, содержащий углы ориентации вектора тяги и управляющие моменты;  $v$  – вектор возмущений, который включает в себя возмущающие ускорения и возмущающие моменты (момент от тяги ЭРДУ, гравитационный момент);  $\Delta x_K$  – вектор отклонения конечного состояния от заданного;  $\bar{V}_{XK}$  – интегральная часть функционала в безразмерном виде, характеризующая затраты характеристической скорости.

Решать задачу оптимального управления в такой постановке довольно сложно. В соответствии с принципом расширения множество  $D$  допустимых элементов  $(x, u)$  расширяется до множества  $E_1$ . Для этого отбрасываются дифференциальные связи, учитывающие

угловое движение аппарата, и связи, характеризующие действия возмущающих факторов. Вектор управления  $u$  будет включать в себя только угол ориентации вектора тяги  $\psi$  (угол между вектором тяги и плоскостью оскулирующей орбиты), а на остальные компоненты (управляющие моменты относительно связанных осей аппарата  $M_X, M_Y, M_Z$ ) накладываются ограничения:

$$\max_t |M_X(t)| \leq M_{X\_MAX}, \max_t |M_Y(t)| \leq M_{Y\_MAX}, \max_t |M_Z(t)| \leq M_{Z\_MAX}. \quad (1)$$

На вектор состояния  $x$  в конечной точке траектории также вводится ограничение

$$x(t_K) = x_K = (A_K, e_K, i_K, u_K)^T \in X_K;$$

а расширенный функционал содержит только интегральную часть

$$L = \bar{V}_{XK} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Здесь  $M_{X\_MAX}, M_{Y\_MAX}, M_{Z\_MAX}$  представляют собой максимально возможные управляющие моменты, которые могут создать исполнительные органы.

Кроме того, если принять в качестве начальной орбиты круговую, то модель движения можно свести к «асимптотической» модели движения КА с малой тягой по околокруговой орбите с «медленным» изменением среднего радиуса и наклона, которую впервые получил В. Н. Лебедев [1]. Для такой модели и функционала (2) в работе [1] получено оптимальное управление

$$\psi(V_X, u) = \psi_m(V_X) \text{sign}(\cos u), \quad (3)$$

$$\text{где } \psi_m(V_X) = \arctg \left\{ \frac{\sin \pi \frac{i_K - i_0}{2}}{\sqrt{\frac{r_K}{r_0}}} \left[ 1 - \frac{\cos \pi \frac{i_K - i_0}{2}}{\sqrt{\frac{r_K}{r_0}}} - \frac{V_X}{V_0} \sqrt{1 - \frac{2 \cos \pi \frac{i_K - i_0}{2}}{\sqrt{\frac{r_K}{r_0}} + \frac{r_0}{r_K}}} \right]^{-1} \right\}.$$

Минимум функционала (2) в этом случае определяется выражением

$$\min_{E_1} \bar{V}_{XK} = \sqrt{1 - 2 \sqrt{\frac{r_0}{r_K}} \cos \pi \frac{i_K - i_0}{2} + \frac{r_0}{r_K}}. \quad (4)$$

Управление (3) при перелёте на ГСО можно принять в качестве номинального, а выражение (4) – в качестве нижней грани для оценки характеристической скорости перелёта. Условия (1) проверяются в результате численного моделирования исходной системы уравнений с оптимальным управлением (3) для расширенной математической модели.

Возмущения, действующие на КА с ЭРДУ, будут приводить к отклонению траектории движения от номинальной.

Тогда управление КА при перелёте на ГСО осуществляется в два этапа:

1) периодические коррекции принятой программы управления, позволяющие перевести вектор  $\Delta x_K$  в некоторую область  $G'$ , в которой один или несколько компонентов вектора  $\Delta x_K$  удовлетворяют заданной точности;

2) формирование законов и алгоритмов управления, позволяющих сузить область  $G'$  до области  $G_D$ , где все компоненты вектора  $\Delta x_K$  удовлетворяют заданной точности.

На первом этапе применяется многошаговый алгоритм управления с прогнозом конечного состояния и идентификацией модели возмущений [2].

Вводится следующая модель возмущений

$$v = v(t, x, \sigma, \xi(t, x)).$$

где  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  - вектор уточняемых параметров модели возмущений,  $\xi(t, x)$  - совокупность величин, входящих в выражение для вектор-функции  $v$  и доступных измерению.

В качестве уточняемых параметров выступает величина тяги ЭРДУ. Уточнение фактической величины тяги проводилось по соотношению

$$P^i = P_{ном} \left( 1 + \frac{\Delta T^i}{T^{расч}} \right),$$

где  $T^{расч}$  - расчётное значение оскулирующего периода обращения;  $\Delta T^i$  - отклонение оскулирующего периода обращения от расчётного значения в  $i$ -й точке коррекции;  $P_{ном}$  - номинальное значение тяги.

Пример результатов моделирования траекторного движения КА с ЭРДУ при перелёте на ГСО при заданных параметрах начальной орбиты ( $A_0, i_0, e_0$ ), скорости истечения  $c$  и начального ускорения  $a_0$  с проведением уточнения величины тяги в зависимости от числа коррекций  $N$  приведён в табл. 1. Здесь  $\Delta P$  – систематическая ошибка величины тяги;  $t_{п}$  - продолжительность пассивных участков, на которых двигатель малой тяги, как правило, выключается для большой точности определения параметров орбиты с последующим уточнением тяги.

Таблица 1 – Результаты моделирования движения КА с ЭРДУ при перелёте на ГСО с уточнением величины тяги ( $a_0 = 0,0006 \text{ м/с}^2$ ,  $c = 25 \text{ км/с}$ ,  $t_{\Pi} = 0,5 \text{ суток}$ ,  $i_0 = 51,6^{\circ}$ ,  $e_0 = 0$ ,  $A_0 = 7171 \text{ км}$ ,  $\Delta P = -1,5\%$  ( $P_{\text{факт}} = 11,82 \text{ Н}$ ))

N	Тяга и продолжительность i-го активного участка			$\Delta A_K = A_K - A_K^{\text{факт}}$ , км	i <sub>к</sub> , град	e <sub>к</sub>	V <sub>хк</sub> , км/с
	i	$P^i, \text{ Н}$	$T_a^i, \text{ сутки}$				
1	0	12	63,278	-464,1	-0,72	0,002	7,670
	1	11,665	66,079				
2	0	12	63,278	-12,8	-0,02	0,004	7,614
	1	11,665	33,039				
	2	11,789	32,222				

Как видно из табл. 1, алгоритм уточнения величины тяги ЭРДУ и коррекции программы управления позволяет сузить область вектора  $\Delta x_K$ , переводя КА в околоэкваториальную орбиту (наклонение орбиты  $|i_K| \leq 0,1^{\circ}$ ). Однако остаются существенными отклонения по большой полуоси  $A$ , долготе точки стояния  $\lambda$  и эксцентриситету  $e$ .

Отклонение большой полуоси  $\Delta A$  орбиты эквивалентно отклонению периода обращения аппарата на орбите  $\Delta T = T - T_3$ . Здесь период обращения КА на ГСО равен звёздным суткам  $T_3 = 86164,09 \text{ с}$ . Положение КА на ГСО определяется долготой  $\lambda$ , которая отличается от требуемого значения долготы точки стояния  $\lambda_P$  на орбите на величину  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_P$ .

На втором этапе решается задача оптимального управления с функционалом

$$I = \Delta x_K^T \Lambda \Delta x_K \rightarrow \min, \quad (5)$$

где  $\Lambda$  – матрица постоянных коэффициентов;  $\Delta x_K = (\Delta T_K, \Delta \lambda_K, \Delta e_K)^T$ .

Корректирующий манёвр осуществляется с помощью трансверсальной тяги  $a_T$ .

Структура управления состоит из последовательности пассивных продолжительностью  $t_{\Pi}(k)$  и активных продолжительностью  $\tau(k)$  участков [3].

Для решения задачи составляется дискретная модель плоского движения КА с ЭРДУ:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_{k+1} &= \Delta \lambda_k + \left( \frac{2\pi}{T_3 + \Delta T_k} - \omega_3 \right) (t_{\Pi k} + \tau_k), \\ \Delta T_{k+1} &= \Delta T_k + 3a_T (T_3 + \Delta T_k) \sqrt[3]{\frac{T_3 + \Delta T_k}{2\pi\mu}} \cdot \tau_k, \\ \Delta e_{k+1} &= \left| \Delta e_k \pm 2a_T \left( \frac{T_3 + \Delta T_k}{2\pi\mu} \right)^{1/3} \tau_k \right|, \quad k = 0 \dots N-1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t_{\Pi k} = \frac{T_k}{2}(1+2m) - \frac{\tau_k}{2} - \frac{\mathcal{G}_k T_k}{2\pi}$  при  $a_T > 0$ ,  $t_{\Pi k} = T_k(1+m) - \frac{\tau_k}{2} - \frac{\mathcal{G}_k T_k}{2\pi}$ , при  $a_T < 0$ ,  $m \in Z$ .

Здесь  $\mathcal{G}_k$  – начальное значение истинной аномалии на  $k$ -м шаге.

Для дискретной модели (6) и функционала (5) решается задача оптимального управления. Принимается, что структура управления состоит из трёх активных участков продолжительностью  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  соответственно и двух пассивных участков продолжительностью  $t_{\Pi 0}$  и  $t_{\Pi 1}$  соответственно. Изменение эксцентриситета при выбранной структуре управления имеет вид, представленный на рис. 1, а; а фазовая траектория КА в отклонениях периода орбиты  $\Delta T$  и средней долготы  $\Delta \lambda$  – на рис. 1, б. На участке  $AB$  происходит уменьшение эксцентриситета до  $e_K = 0$ , на участке  $CD$  эксцентриситет увеличивается на некоторое значение  $e'$  и затем на участке  $EO$  это значение снова гасится до значения  $e_K = 0$ .

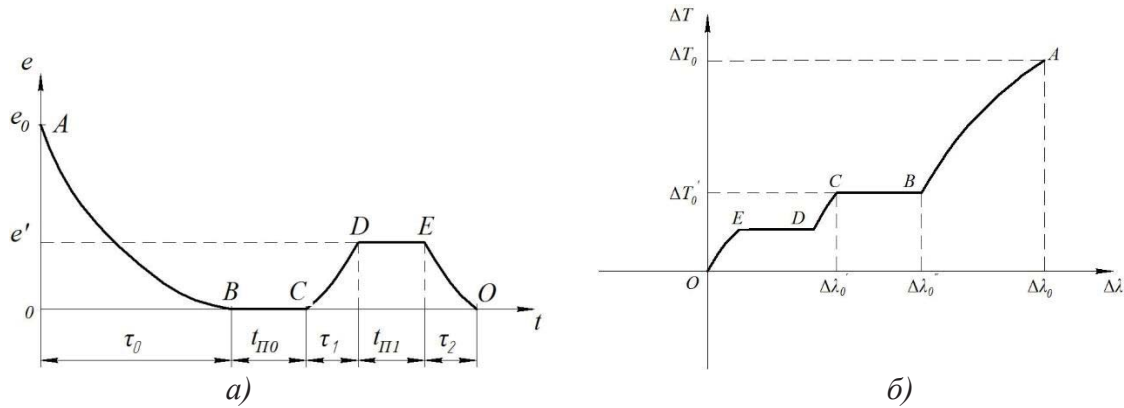


Рисунок 1 – Изменение эксцентриситета и фазовая траектория КА при многошаговой структуре управления

Аналитически получено приближённо-оптимальное управление

$$\tau_0 = \frac{T_0}{\pi} \arcsin \left[ \frac{\Delta e_0}{2 \frac{T_0}{\pi} a_T \sqrt[3]{\frac{T_0}{2\pi\mu}}} \right], \quad \tau_1 = \frac{1}{a_T \left( \frac{T_0'}{2\pi\mu} \right)^{1/3}} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\Delta T_0'}{3T_0'}} \right),$$

$$\tau_2 = \frac{1}{a_T \left( \frac{T_0'}{2\pi\mu} \right)^{1/3}} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\Delta T_0'}{3T_0'}} \right) \sqrt{1 + \frac{\Delta T_0'}{3T_0'}}, \quad t_{\Pi 0} = \frac{\Delta \lambda_0' - \Delta \lambda_0''}{\left( \frac{2\pi}{T_0'} - \omega_3 \right)}, \quad (7)$$

$$t_{\Pi 1} = \left( 1 + 3S' \right) \left[ T_0'(1+m) - \tau_1 \left( \frac{1-S'}{2(1+3S')} + \frac{2}{2+3S'} \right) \right],$$

где  $S' = a_T \sqrt[3]{\frac{T_0'}{2\pi\mu}} \tau_1$ ,  $\Delta \lambda_0'' = \Delta \lambda_0 + \left( \frac{2\pi}{T_0} - \omega_3 \right) \tau_0$ ,  $\Delta T_0' = \Delta T_0 + 3a_T T_0 \sqrt[3]{\frac{T_0}{2\pi\mu}} \tau_0$ ,

$$\Delta\lambda'_0 = -\left(\frac{2\pi}{T'_0} - \omega_3\right)\tau_1 - \left[ \frac{2\pi}{T'_0 \left(1 + 3a_T \sqrt[3]{\frac{T'_0}{2\pi\mu}} \cdot \tau_1\right)} - \omega_3 \right] (t_{III} + \tau_2), \Delta T_0 > 0.$$

Начальное значение угла истинной аномалии  $\vartheta_0$  определяется выражениями

$$\vartheta_0 = 2\pi - \frac{\pi}{T_0} \tau_0 + 2\pi n \text{ при } a_T < 0, \quad \vartheta_0 = \pi - \frac{\pi}{T_0} \tau_0 + 2\pi n \text{ при } a_T > 0.$$

При моделировании удобно вместо  $\vartheta_0$  (если используются уравнения в равноденственных элементах) определять начальное значение угла  $F_0 = \Omega_0 + \vartheta_0 + \omega_0$ , где  $\Omega_0$  и  $\omega_0$  – начальные значения долготы восходящего узла и аргумента перигея, соответственно.

На рис. 2 представлен пример моделирования траектории перелёта КА с ЭРДУ с управлением (7) при следующих исходных данных:  $a_0 = 0,001 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta T_0 = 1000 \text{ с}$ ,  $e_0 = 0,005$ ,  $\lambda_P = 71,5$  градуса. Продолжительности активных и пассивных участков равны:

$$\tau_0 = 7758 \text{ с}, \quad \tau_I = 1997 \text{ с}, \quad \tau_2 = 1998 \text{ с}, \quad t_{II0} = 260200 \text{ с} \approx 3 \text{ суток}, \quad t_{III} = 40170 \text{ с} \approx 0,46 \text{ суток}.$$

Начальное отклонение по долготе  $\Delta\lambda_0 = 0,087$  рад.

При этом конечные отклонения параметров орбиты составили: периода  $\Delta T_K = 1,3 \text{ с}$ ; средней долготы  $\Delta\lambda_K = 0,15$  градуса; эксцентриситета  $\Delta e_K = 1 \times 10^{-4}$ .

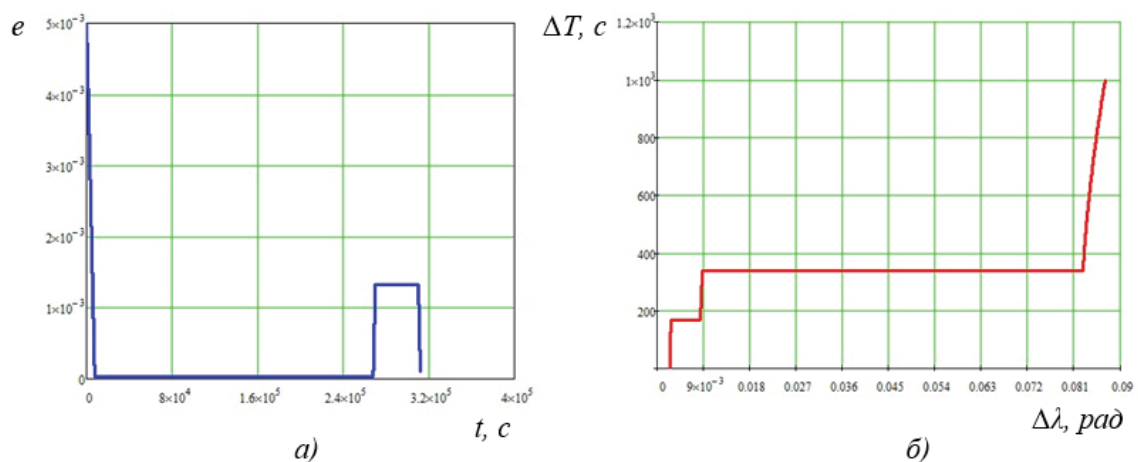


Рисунок 2 – Изменение эксцентриситета (а) и фазовая траектория (б) в отклонениях  $\Delta T$  и  $\Delta\lambda$  ( $a_0 = 0,001 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta T_0 = 1000 \text{ с}$ ,  $e_0 = 0,005$ ,  $\lambda_P = 71,5^0$ )

### Библиографический список

- 1 Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой, - М: ВЦ АН СССР, 1968. – 108 с.
- 2 Салмин, В.В. Многошаговые алгоритмы управления движением космических аппаратов [Текст] // Космические исследования. 1979. Т. 17, № 6. С. 835 – 846.
- 3 Чернявский, Г.М. Управление орбитой стационарного спутника [Текст] / Г.М. Чернявский, В.А. Бартенев, В.А. Малышев. - М.: Машиностроение, 1984 – 144 с.