УДК 681.5.01:658.5

Мещанов А.С., Гатауллина Л.А.

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМАХ С ЗАДАННЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ И ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ. I

Решается задача приведения системы управления в скользящий режим заданного высокого порядка, в частности, по заданной фазовой прямой, определяющей качество переходных процессов: находятся последовательно пары переключаемых многообразий скользящих режимов более низких порядков; в обычном скользящем режиме (первого порядка) обеспечивается быстрое уменьшение отклонений от желаемых модельных координат идентификатора.

Постановка задачи

Рассматривается система с линейным стационарным объектом при номинальных и неопределенных, ограниченных возмущениях и неполной информации о состоянии:

$$\dot{z} = (A_0 + \Delta A(t))z + (B_0 + \Delta B(t))u + (D_0(t) + \Delta D(t))(F(t_0) + \Delta F(t)),\ \ x = Kz, \qquad (1)$$

где $z \in R^n$; $t \in I = (t_0, t_k]$, $t_k < \infty$; A_0, B_0, K и $D_0(t), F_0(t)$ – номинальные постоянные $n\times n$, $n\times m$, $q\times n-$матрицы и $n\times l$, $l\times 1$ – матрица и столбец с переменными элементами; $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta D(t)$ и $\Delta F(t)-$ матрицы и $l\times 1-$ столбец с неопределенными ограниченными параметрическими и внешними возмущениями.

В системе (1) выполняются известные условия инвариантности скользящих режимов к неопределенным $\Delta A(t), \Delta D(t), \Delta F(t)$ и к номинальному $D_0(t)F_0(t)$ возмущениям [1]

$$\Delta A(t) = B_0\Lambda_{\Delta A}(t)\ ,\ \Delta D(t) = B_0\Lambda_{\Delta D}(t)\ ,\ D_0(t) = B_0\Lambda(t) \qquad (2)$$

и к обычно не учитываемому параметрическому возмущению $\Delta B(t)$

$$\Delta B(t) = B_0\Lambda_{\Delta B}(t). \qquad (3)$$

Вводится модельная система-идентификатор [2], но с номинальным возмущением:

$$\dot{z}_{\text{м}} = A_0 z_{\text{м}} + B_0 u + K_{\Delta z}G^T(x - Kz_{\text{м}}) + D_0(t)F_0(t),\ \ x = Kz, \qquad (4)$$

где $K_{\Delta z}$ и G^T имеют размеры $n\times m$ и $m\times q$. Предполагается, что система (1) имеет регулярную форму или приводится к ней по отношению к матрице B_0 и, с учетом условий (2), (3), к матрицам $D_0, \Delta B(t)$ и $\Delta D(t)$, т. е. перечисленные матрицы имеют нулевые первые $n-m$ строк [3].

Задачи

1. Найти пары переключаемых фиксированных ($n-m$) - мерных многообразий скольжения вида

$$S(s=(s_1,...,s_m)^T = C\,z_{\text{м}} = 0), \tag{5}$$

где C - $m \times n-$матрица постоянных коэффициентов, $s_i = C_i^T z_{\text{м}} -$ функции переключений, $C_i^T = (c_{i1},...,c_{in}) - i-$е строки матрицы C, $i=\overline{1,m}$, со скольжением к ($n-2m$) – мерным многообразиям пересечений пар таких ($n-1\cdot m$) – мерных многообразий (5); найти пары ($n-2m$) – мерных многообразий со скольжением к ($n-3m$) – мерным многообразиям их пересечений и так далее до размерности последнего многообразия скольжения, равной ($n-km) \ge 1$, $k=1,2,3,....$.

2. Найти векторное многоуровневое управление u, приводящее систему (1)-(4) в скользящий режим заданного $k-$го порядка, то есть с заданной размерностью системы дифференциальных уравнений скользящего режима равной ($n-1\cdot m$), ($n-2m$), ($n-3m$), …, ($n-km) \ge 1$, и с заданным на $k-$м скользящем режиме качеством переходных процессов.

Продолжение решения поставленных задач во второй части работы.

2. Синтез многообразий скольжения по заданным показателям качества переходных процессов

Учтем разложения вектора z и матриц в системе (1)-(4) на субвекторы и субматрицы

$$z=\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix},\ A_0=(A_0^{\ 1},A_0^{\ 2})=\begin{pmatrix} A_{0,11} & A_{0,12} \\ A_{0,21} & A_{0,22} \end{pmatrix},\ A_0^{\ 1}=\begin{pmatrix} A_{0,11} \\ A_{0,21} \end{pmatrix},\ A_0^{\ 2}=\begin{pmatrix} A_{0,12} \\ A_{0,22} \end{pmatrix},$$

$$C=(C^1,C^2),\ B_0=\begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{02} \end{pmatrix},\ K_{\Delta z}G^T K\Delta z=\begin{pmatrix} K_{\Delta z1}G^T K^1\Delta z^1 + K_{\Delta z1}G^T K^2\Delta z^2 \\ K_{\Delta z2}G^T K^1\Delta z^1 + K_{\Delta z2}G^T K^2\Delta z^2 \end{pmatrix},$$

где z^1, $A_0^{\ 1}, A_{0,11}, C^1, B_{01}, K_{\Delta z1}, K^1$ имеют соответственно размеры $(n-m)\times 1$, $n\times(n-m)$, $(n-m)\times(n-m)$, $m\times(n-m)$, $(n-m)\times m$, $(n-m)\times m$, $q\times(n-m)$. Скользящий режим на многообразии S (5), в котором в силу $s=Cz_{\text{м}}=C^1 z_{\text{м}}^1 + C^2 z_{\text{м}}^2 = 0$ выполняется равенство

$z_{\text{м}}^2 = -(C^2)^{-1}C^1 z_{\text{м}}^1$, в координатах исходной системы (1) запишется в виде системы с размерностью вектора состояния равной ($2n-m$) [4]:

$$\begin{aligned}
&\dot{z}^1 = (E_1 - B_{01}(CB_0)^{-1}C)(A_0{}^1 - A_0{}^2(C^2)^{-1}C^1)z^1 + [-(E_1 - B_{01}(CB_0)^{-1}C)(A_0{}^1 - A_0{}^2(C^2)^{-1}C^{-1}) + \\
&+(E_{n-m} - B_{01}(CB_0)^{-1}C^1)K_{\Delta z1}G^T K^1 - B_{01}(CB_0)^{-1}C^2 K_{\Delta z2}G^T K^1 + A_{0,11} - K_{\Delta z1}G^T K^1]\Delta z^1 + \\
&+[(E_{n-m} - B_{01}(CB_0)^{-1}C^1)K_{\Delta z1}G^T K^2 - B_{01}(CB_0)^{-1}C^2 K_{\Delta z2}G^T K^2 + A_{0,12} - K_{\Delta z1}G^T K^2]\Delta z^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\dot{z}^1 = (A_{0,11} - K_{\Delta z1}G^T K^1)\Delta z^1 + (A_{0,12} - K_{\Delta z1}G^T K^2)\Delta z^2, \\
&\Delta\dot{z}^2 = (A_{0,21} - K_{\Delta z2}G^T K^1)\Delta z^1 + (A_{0,22} - K_{\Delta z2}G^T K^2)\Delta z^2, \\
&z^2 = -(C^2)^{-1}C^1 z^1 + (C^2)^{-1}C^1\Delta z^1 + \Delta z^2,
\end{aligned}$$

где E_{n-m} - единичная $(n-m)\times(n-m)-$матрица. При единичной субматрице C^2, $C^2 = E,$ в многообразии $S(s = Cz_{\text{м}} = C^1 z_{\text{м}}^1 + C^2 z_{\text{м}}^2 = 0)$ (5) и с учетом регулярности системы (1) уравнения (6) упростятся до вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{z}^1 = (A_{0,11} - A_{0,12}C^1)z^1 + A_{0,12}C^1\Delta z^1 + A_{0,12}\Delta z^2, \quad \Delta\dot{z}^1 = (A_{0,11} - K_{\Delta z1}G^T K^1)\Delta z^1 + (A_{0,12} - K_{\Delta z1}G^T K^2)\Delta z^2, \\
&\Delta\dot{z}^2 = (A_{0,21} - K_{\Delta z2}G^T K^1)\Delta z^1 + (A_{0,22} - K_{\Delta z2}G^T K^2)\Delta z^2, \quad z^2 = -C^1 z^1 + C^1\Delta z^1 + \Delta z^2
\end{aligned} \tag{7}$$

или

$$\dot{z}^1 = (A_{0,11} - A_{0,12}C^1)z^1 + (A_{0,12}C^1, A_{0,12})\Delta z, \quad \Delta\dot{z} = (A_0 - K_{\Delta z}G^T K)\Delta z, \quad z^2 = -C^1 z^1 + C^1\Delta z^1 + \Delta z^2. \tag{8}$$

При соответствующем задании матрицы $K_{\Delta z}$ (по заданному распределению корней $\Lambda_1,...,\Lambda_n$ характеристического уравнения $|(A_0^T - K^T G K_{\Delta z}^T) - \Lambda E| = 0$ второй подсистемы в системе (8) [4]) вектор $\Delta z = (\Delta z^{1T}, \Delta z^{2T})^T$ достаточно быстро приближается к нулевому значению и система (8), а вместе с ней и движение в исходной системе (1) приводится к движению, представленному системой модельного скользящего режима на данном многообразии S [4]:

$$\dot{z}_{\text{м}}^1 = (A_{0,11} - A_{0,12}C^1)z_{\text{м}}^1, \qquad z_{\text{м}}^2 = -C^1 z_{\text{м}}^1. \tag{9}$$

Если требуемое качество переходных процессов достижимо на данном скользящем режиме первого порядка (то есть на обычном скользящем режиме с системой (9)), то субматрица C^1 находится по методу модального управления [2] или по методу работы [5]. Для этого в системе (9) с управляемой парой ($A_{0,11}, A_{0,12}$) произведение $-(C^1 z_{\text{м}}^1)$ принимается за управление с матрицей коэффициентов $-C^1$ и матрицей линейного входа в систему $A_{0,12}$. Субматрица C^1 сравнительно легко находится по заданному распределению $n-m$ корней характеристического уравнения системы (9) по известным условиям прямых показателей качества переходных процессов в скольжении. Следовательно, с учетом сравнительно малого времени на попадание изображающей точки (и.т.) на многообразие скольжения и на последующее уменьшение отклонений от модельного движения в скользящем режиме и, тем более, при определенных ограничениях на начальное состояние $z(t_0)$ системы, обеспечиваются требуемые показатели качества переходных процессов и для системы управления в целом.

Если же требуемое качество процессов достигается на скользящих режимах более высокого порядка, то есть с размерностями системы уравнений меньшими чем $n-m$ в системе (9), например, с размерностями равными $n-2m,\ n-3m,...$, то сначала находятся два переключаемых многообразия типа (5) с размерностями $n-m$ таким образом, чтобы и.т. системы скользящего режима на одном из этих многообразий устремлялась к $n-2m$-мерному многообразию его пересечения со вторым $(n-m)-$мерным многообразием и совершала движение в достаточно малой окрестности этого пересечения с пониженной размерностью системы скользящего режима, равной $n-2m$.

Для дальнейшего, при необходимости, понижения размерности системы скольжения до значения $n-3m$ формируется еще одно многообразие размерности $n-2m$ и осуществляется переключение скользящих режимов с одного на другое с результирующим движением и.т. в малой окрестности многообразия размерности $n-3m$ и так далее, вплоть до достижения при необходимости движения и.т. на скользящем режиме $k-$го порядка в малой окрестности подходящего по качеству процессов многообразия в виде прямой или плоскости.

При движении в малой окрестности прямой и плоскости на значения n, m, k должны накладываться соответственно ограничения:

$$n-km=1 \ \text{ и } \ n-km=2, \tag{10}$$

где $k=1,2,3...-$ порядок скольжения и, одновременно, номер верхнего уровня многоуровневого управления. При $k=1$ имеем обычный скользящий режим (режим первого порядка и первый уровень разрывного многоуровневого управления). Нулевому уровню управления и нулевому порядку скольжения ($k=0$) соответствует уровень переключаемых структур каждой из m составляющих 2^k векторных разрывных управлений $u_{0,1}, u_{0,2};...; u_{0,2^k-1}, u_{0,2^k}$ (рис.1).

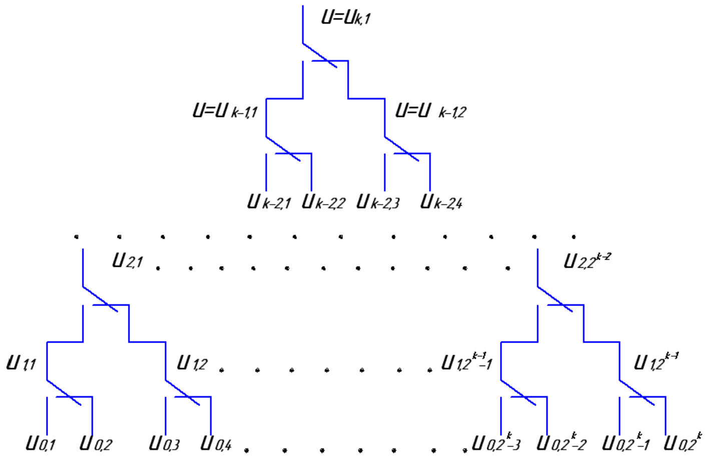

Рис.1. Переключаемые структуры управления

При $k=(n-1)/m$ или $k=(n-2)/m$ (11)

получаем верхний уровень многоуровневого управления (то есть само векторное управление $u=u_{k,1}$), соответствующий движению и.т. в малой окрестности подходящей по качеству прямой или плоскости в фазовом пространстве. Если сочетание значений n и m не приводит к целому значению k, но необходимо обеспечить требуемые показатели качества переходных процессов, то для изменения значения числа m допустим перевод части составляющих u_j исходного управления в разряд линейных управлений для придания объекту управления подходящих динамических и статических свойств, не исключая при этом и задания им нулевых значений. Так, например, при $n=5$ и $m=3$ для движения по прямой получаем $k=(n-1)/m=(5-1)/3=4/3$ и, следовательно, понижая значение m до $m=2$ указанным путем, получаем двухуровневое управление. Для движения по плоскости в рассматриваемом случае значений n и m достаточно применить обычное скольжение: $k=(n-2)/m=(5-2)/3=1$.

Рассмотрим метод и порядок построения многообразий скольжения [3]. В правой части системы скользящего режима (9) составляющая $-C^1 z_{\text{м}}^1$ полагается фиктивным управлением $u_{\phi}^1=-C^1 z_{\text{м}}^1$,

$$\dot{z}_{\text{м}}^1 = A_{0,11} z_{\text{м}}^1 + A_{0,12} u_{\phi}^1, \qquad z_{\text{м}}^2 = u_{\phi}^1 = -C^1 z_{\text{м}}^1, \tag{12}$$

равным с одной стороны $-C^1 z_{\text{м}}^1$ в (12), а с другой стороны некоторому $m-$мерному разрывному управлению u_{ϕ}^1, приводящему систему (12) в скользящий режим по некоторому $(n-2m)-$мерному многообразию $S^1_ф$, определяемому по методам работ [2, 5]:

$$S^1_ф(s^1_ф=(s^1_{ф\,1},...,s^1_{ф\,m})^T=C^1_ф z^1_{\text{м}}=0), \tag{13}$$

где $C^1_ф$ является $m\times(n-m)-$матрицей. Система (12) является номинальной (не зависящей от неопределенных возмущений), не зависит она также и от номинальных внешних возмущений.

Для построения управления $u^1_ф$ предлагается применить метод построения номинального управления u_0, предложенный в работе [6]. Данное разрывное управление u_0 предполагает сравнительно малое число логических переключающих устройств и не имеет, помимо обычных условий существования разрывного управления (в данном случае $u^1_ф$) дополнительных ограничений на задание матрицы $C^1_ф$. Для модельной системы (4) при $F_0(t)\equiv 0$ оно запишется:

$$u_0=(CB_0)^{-1}(K_g g+K_s s-CA_0 z_{\text{м}}), \tag{14}$$

где $K_s(z_{\text{м}},t)=\left(\kappa_{s_i}(z_{\text{м}},t)\delta_{ik}\right)_1^m$, δ_{ik} –символ Кронекера, $i,k=\overline{1,m}$; $s=(s_1,...,s_m)^T=Cz_{\text{м}}$, $s_i=c^{iT}z_{\text{м}}=0$, $g=(g_1,...,g_m)^T=Dz_{\text{м}}$, $g_i=d^{iT}z_{\text{м}}$,

$$\kappa_{g_i}(z_{\text{м}},t)=\begin{cases}\kappa^+_{g_i}<0 & \text{при } s_i g_i>0,\\ \kappa^-_{g_i}>0 & \text{при } s_i g_i\le 0,\end{cases}\qquad \kappa_{s_i}(z_{\text{м}},t)=\begin{cases}\kappa^+_{s_i}<0 & \text{при } s_i g_i>0,\\ \kappa^-_{s_i}<0 & \text{при } s_i g_i\le 0.\end{cases}$$

Применяя данный тип управления (14) для системы (12) в целях ее приведения в скользящий режим на многообразии $S^1_ф$ (13), получаем управление $u^1_ф$:

$$u^1_ф=(C^1_ф A_{0,12})^{-1}(K_{gф}g^1_ф+K_{sф}s^1_ф-C^1_ф A_{0,11}z^1_{\text{м}}), \tag{15}$$

где $K_{gф}\left(z^1,t\right)=\left(\kappa_{g_iф}(z^1,t)\,\delta_{ik}\right)_1^m$, $K_{sф}\left(z^1,t\right)=\left(\kappa_{s_iф}(z^1,t)\,\delta_{ik}\right)_1^m$ и задаваемые разрывные коэффициенты (или функции) $\kappa_{g_iф}$, $\kappa_{s_iф}$ удовлетворяют неравенствам аналогичным (14) с функциями переключений $s^1_{ф\,i}$ и $g^1_{ф\,i}$, $i=\overline{1,m}$. Из выражения (15) с учетом $u^1_ф=-C^1 z^1_{\text{м}}$, $g^1_ф=(g^1_{ф\,1},...,g^1_{ф\,m})^T=D^1_ф z^1_{\text{м}}$ и $s^1_ф=(s^1_{ф\,1},...,s^1_{ф\,m})^T=C^1_ф z^1_{\text{м}}$ следует соотношение для нахождения двух $m\times(n-m)$ матриц C^1 и $D_ф^1$ по заранее определенной (по требуемым показателям качества скользящего режима второго порядка) матрице $C_ф^1$:

$$C^1 = -(C_ф^1 A_{0,12})^{-1}(K_{gф} D_ф^1 + K_{sф} C_ф^1 - C_ф^1 A_{0,11}). \tag{16}$$

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160012.

Библиографический список

1. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М., Наука, 1974. 272 с.

2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.

3. Мещанов А.С. Скользящие режимы с заданными размерностью и качеством в системах с линейными стационарными объектами при неопределенности. – Авиакосмическое приборостроение, 2009. № 2. С.22-27.

4. Мещанов А.С Синтез многообразия скольжения и управления с идентификатором состояния при неопределенности. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2008, № 3. С. 92-97.

5. Sinswat V., Fallside F. Eigenvalue/eigenvector assignment by state-feedback, International Journal of Control. 1977. vol. 26, № 3. P. 389-403.

6. Мещанов А.С. Уравнения скольжения на подвижных многообразиях и синтез векторных управлений для нелинейных объектов при неопределенных возмущениях. Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева, 2008, №2. С. 51 -55.