УДК 681.5.01.658.5

Мещанов А.С., Султанова А.Ф.

СИНТЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ БЕЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ С РАЗМЕРНОСТЬЮ, ОТЛИЧНОЙ ОТ УДВОЕННОЙ УПРАВЛЕНИЯ

При невыполнении известных условий инвариантности скользящих режимов к возмущениям обеспечить высокие показатели качества процессов управления без увеличения значений управления и его энергетических затрат обычно не удается. В этой связи предлагаются методы синтеза подвижных многообразий скольжения и разрывного векторного управления, устраняющих этот недостаток. Предлагаемые методы зависят от соотношения размерностей n и m системы уравнений и управления. Рассматриваются случаи $n < 2m$ и $n > 2m$. Результаты применимы в эффективной стабилизации режимов полета летательных аппаратов при различных типах возмущений.

Постановка задач. Рассматривается управляемая система с линейным нестационарным объектом, преобразованная к регулярной форме

$$\dot{z} = A_0(t)z + B_0(t)u + D_0(t)F_0(t) + h(z,t)\,, \qquad (1)$$

с нулевой субматрицей $B_{01} = 0_{(n-m)\times m}$ при неособенной $m\times m-$субматрице $B_{02}(t)$, $|B_{02}(t)| \neq 0$ и суммарном векторе неопределенных ограниченных возмущений

$$h(z,t) = (h_1,...,h_n)^T = \Delta A(t)z + \Delta B(t)u + \Delta D(t)(F_0(t) + \Delta F(t)) + D_0(t)\Delta F(t)\,.$$

Задача. Получить заданные показатели качества процессов на скользящих режимах при невыполнении условий инвариантности в системе, преобразованной к регулярной форме с линейным нестационарным объектом при номинальных и неопределенных возмущениях в случае $n < 2m$. Исследовать возможность решения изложенной задачи в случае $n > 2m$.

Решение задачи. Уравнение скользящего режима на многообразии

$$S(s = (s_1,...,s_m)^T = C(t)z = 0)\,,\; C(t)z = C^1(t)z^1 + C^2z^2, \quad z^1 - (n-m)\times 1, \quad C^2 = E - m\times m, \qquad (2)$$

находится, например, по методу эквивалентного управления и принимает вид:

$$\dot{z}^1 = A_{011}(t)z^1 + A_{012}(t)u_c + H^1(z^1,t), \quad z^2 = -C^1(t)z^1\,, \qquad (3)$$

где $A_{011}(t)$ и $A_{012}(t)$ являются $(n-m)\times(n-m)$ и $(n-m)\times m-$субматрицами в $A_0(t)$, $H^1(z^1,t)=D_{01}(t)F_0(t)+h^1(z^1,t),\ D_{01}(t)$ и $h^1(z^1,t)-$ первые $(n-m)$ строки $n\times l-$ номинальной матрицы D_{01} и идентифицированного вектора $h(z,t)$ с учетом выражения в скольжении вектора z через вектор z^1, а $u_c=-C^1(t)z^1=-(C^1_{\text{var}}(t)+C^1_{H^1}(t,z^1(t))\,z^1$ принимается за управление скольжением. Субматрица $C^1_{\text{var}}(t)$ определяет качество процессов при отсутствии возмущений $F_0(t)$ и $h(z,t)$, а $C^1_{H^1}(t,z^1(t))$ компенсирует в общем случае неблагоприятное воздействие на систему возмущений путем их преодоления-превышения. Для этого $C^1_{H^1}$ находится из условия:

$$-A_{012}(t)C^1_{H^1}(t,z^1(t))z^1=diag\{-\alpha_1(t)\left|H^1_1(z^1,t)\right|,...,-\alpha_{n-m}(t)\left|H^1_{n-m}(z^1,t)\right|\}sign\ z^1, \tag{4}$$

где $sign\,z^1=(sign\,z_1,...,sign\,z_{n-m})^T$, $\alpha_i(t)>1,\ i=\overline{1,n-m}.$ В правой части системы (3) в этом случае в каждом $i-$м уравнении формируется слагаемое, ускоряющее, дополнительно к действию $u_c=-C^1_{\text{var}}(t)\,z^1$, затухание координаты z_i субвектора $z^1=(z_1,...,z_{n-m})^T$. Структура матрицы $C^1_{H^1}$ согласно условию (4) задается в виде

$$C^1_{H^1}(t,z^1(t))=\left(c_{i,j}(t)/\left|z_j\right|\right),\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n-m}, \tag{5}$$

а ее элементы $c_{i,j}(t)$, составляющие матрицу $C_{m\times(n-m)}(t)$, находятся в силу уравнений

$$(ac)_{ii}=\alpha_i(t)\left|H^1_i(z^1,t)\right|,\ i=\overline{1,n-m},\qquad (ac)_{ij}=0,\quad i,j=\overline{1,n-m},\ \ i\neq j, \tag{6}$$

где $(ac)_{ij}$, $i,j=\overline{1,n-m},$ являются произведениями $i-$й строки $\left(a_{012,i1}(t),...,a_{012,im}(t)\right)$ матрицы $A_{012}(t)$ на $j-$й столбец $(c_{1,j}(t),...,c_{m,j}(t))^T$ матрицы $C_{m\times(n-m)}(t)$. Приравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, получаем $(n-m)^2$ уравнений для определения $m\times(n-m)-$элементов матрицы $C_{m\times(n-m)}(t)$, часть из которых, в количестве $m\times(n-m)-(n-m)^2$, в рассматриваемом случае $n<2m$, $(n-m)<m,$ задается, а остальная находится в силу уравнений (6).

При неточной идентификации вектор возмущений $h^1(z^1,t)$ представляет сумму $h^1(z^1,t)=h^1_0(z^1,t)+\Delta h^1(z^1,t)$ номинальных, $h^1_0(z^1,t)$, и неопределенных, $\Delta h^1(z^1,t)$, возмущений с известными предельными значениями. Подвижное многообразие скольжения формируется в виде

$$S(s = C^1(t)z^1 + C^2z^2 = C^1_{\mathrm{var}}(t)z^1 + (C^1_{H^1}(t,z^1(t)) + C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t)))z^1 + z^2 = 0)\,. \quad (7)$$

Уравнения скольжения запишутся:

$$\dot z^1 = A_{011}(t)z^1 - A_{012}(t)C^1(t)z^1 + H^1(z^1,t) + \Delta h^1(z^1,t), \quad (8)$$

где $H^1(z^1,t) = D_{01}(t)F_0(t) + h_0^1(z^1,t)$, $C^1(t) = C^1_{\mathrm{var}}(t) + C^1_{H^1}(t,z^1(t)) + C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t))$. Матрицы $C^1_{H^1}(t,z^1(t))$ и $C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t))$ задаются таким образом, чтобы в скольжении выполнялось равенство (4) для нахождения первой и равенство для нахождения второй

$$-A_{012}(t)C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t))z^1 + \Delta h^1(z^1,t) = K + \Delta h^1(z^1,t), \quad (9)$$

в котором $K = (k_1,...,k_{n-m})^T$, $k_i = -\beta_i \, sign\, z_i$, $\beta_i > \left|\Delta h_i^1(z^1,t)\right|$. В результате приходим к таким матрицам $C^1_{H^1}(t,z^1(t))$ и $C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t))$, что в силу выполнения равенств (4), (9) система скользящего режима (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\dot z^1 = A_{011}(t)z^1 - A_{012}(t)(C^1_{\mathrm{var}}(t) + C^1_{H^1}(t,z^1(t)) + C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t))\, z^1 + H^1(z^1,t) + \Delta h^1(z^1,t) = A_{011}(t)z^1 - \\ &- A_{012}(t)C^1_{\mathrm{var}}(t)z^1 + \left[H^1(z^1,t) - diag\,\{\alpha_1(t)\left|H_1^1(z^1,t)\right|,...,\alpha_{n-m}(t)\left|H^1_{n-m}(z^1,t)\right|\}\, sign\, z^1\right] + \left[\Delta h^1(z^1,t) + K\right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\alpha_i(t) > 1$, $K = (k_1,...,k_{n-m})^T$, $k_i = -\beta_i \, sign\, z_i$, $\beta_i > \left|\Delta h_i^1(z^1,t)\right|$, $i = \overline{1, n-m}$, и обеспечивается заданное качество скользящего режима при постоянном действии ограниченных номинальных $H^1(z^1,t)$ и неопределенных $\Delta h_i^1(z^1,t)$ возмущений путем их преодоления (превышения), несмотря на невыполнение известных условий инвариантности скользящих режимов к неопределенным возмущениям, в силу создания дополнительной скорости затухания модуля каждой координаты субвектора z^1. Координаты субвектора z^2, следующего в скользящем режиме из уравнения гиперплоскости S (7)

$$z^2 = -[C^1_{\mathrm{var}}(t)z^1 + (C^1_{H^1}(t,z^1(t)) + C^1_{\Delta h^1}(t,z^1(t)))z^1] = -C^1_{\mathrm{var}}(t)z^1 - C_{m\times(n-m)}(t) sign\ z^1 - c^1_{\Delta h^1}(t) sign\ z^1$$

стремятся, также как и координаты субвектора z^1, к нулю в силу конечности элементов матрицы $C^1_{\mathrm{var}}(t)$ и линейной зависимости составляющих $m \times 1-$векторов $C^1_{H^1}(t,z^1(t))z^1 = = C_{m\times(n-m)}(t) sign\ z^1$ и $C^1_{\Delta h^1}(z^1(t))z^1 = c^1_{\Delta h^1}(t) sign\ z^1$ от $sign\, z_i \to 0$ при $z_i \to 0,\ i = \overline{1, n-m},$

согласно системе скользящего режима (10). Во избежание возможных скачкообразных изменений значений $sign\, z_i$, а с ними и значений субвектора z^2, предлагается вместо сигнатур использовать непрерывные нелинейные функции достаточно близко приближающиеся к скачкообразно изменяющейся функции трехпозиционного реле с малой зоной нечувствительности: $f_i(z_i) = 1$ при $z_i > b_i$, $f_i(z_i) = -1$ при $z_i < -b_i$, $f_i(z_i) = = (1/b_i)z_i$ при $b_i \ge z_i \ge -b_i$, где линейная функция в третьем выражении может быть заменена на нелинейные функции $f_i(z_i) = (1/b_i^2)z_i^2$ при $0 < z_i \le b_i$, $f_i(z_i) = -(1/b_i^2)z_i^2$ при $-b_i < z_i \le 0$; $f_i(z_i) = (1/b_i^3)z_i^3$ при $b_i \ge z_i \ge -b_i$, $i = \overline{1, n-m}$.

Приведение системы с номинальными и неопределенными возмущениями

$$\dot{z} = A_0(t)z + B_0 t)u + H(z,t) + \Delta h(z,t)$$

в скользящий режим на многообразии S (7) осуществляется разрывным управлением u, определяемым по методу работы [1] с применением разложения производной $\dot{s}$ на сумму с номинальными и неопределенными слагаемыми и соответствующего разбиения управления: $\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{s}_{\Delta h}$, $u = u_0 + u_{\Delta h}$. Для вектор-функции s многообразия S (7), где $C^1_{H^1}(t, z^1(t))\, z^1$ и $C^1_{\Delta h^1}(t, z^1(t)))\, z^1$ являются известными векторами $C_{m\times(n-m)}(t) sign\ z^1$ и $c^1_{\Delta h^1}(t) sign\ z^1$, получаем производную:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \dot{C}^1_{\text{var}}(t)z^1 + C^1_{\text{var}}(t)\dot{z}^1 + (\dot{C}_{m\times(n-m)}(t) + \dot{c}^1_{\Delta h^1}(t)) sign\, z^1 + (C_{m\times(n-m)}(t) + c^1_{\Delta h^1}(t)) d(sign\, z^1)/dt + \dot{z}^2 = \\ &= \dot{C}^1_{\text{var}}(t)z^1 + C^1_{\text{var}}(t)\,(A_{011}(t)z^1 + A_{012}(t)z^2 + H^1(z,t) + \Delta h^1(z,t)) + (\dot{C}_{m\times(n-m)}(t) + \dot{c}^1_{\Delta h^1}(t)) sign\, z^1 + \\ &+ (C_{m\times(n-m)}(t) + c^1_{\Delta h^1}(t)) d(sign\, z^1)/dt + (A_{021}(t)z^1 + A_{022}(t)z^2 + B_{02}(t)(u_0 + u_h) + H^2(z,t) + \Delta h^2(z,t)),\end{aligned}$$

где для $d(sign\, z_j)/dt$ предлагается аппроксимация по алгоритму

$$d(sign z_j)/dt = = \begin{cases} \beta_{j\,\text{огр}} \exp[-\beta^2_{j\,\text{огр}}(t - t_{\text{прш}})^2]/\sqrt{\pi} \ \text{ при } -\Delta_j < z_j(t_{\text{прш}}) < \Delta_j \approx 0+ \text{ и } sign[z_j(t_{\text{прш}} + \Delta t)] > sign[z_j(t_{\text{прш}})]; \\ 0 \ \text{ при } -\Delta_j > z_j(t_{\text{прш}}) \text{ или } z_j(t_{\text{прш}}) > \Delta_j; \\ -\beta_{j\,\text{огр}} \exp[-\beta^2_{j\,\text{огр}}(t - t_{\text{прш}})^2]/\sqrt{\pi} \ \text{ при } -\Delta_j < z_j(t_{\text{прш}}) < \Delta_j \approx 0+ \text{и } sign[z_j(t_{\text{прш}} + \Delta t)] < sign[z_j(t_{\text{прш}})], \end{cases}$$

на основе конечных непрерывных функций на конечном промежутке времени $\Delta t = t - t_{прш} > 0$ [2, с.794]: $d(sign\, z_j)/dt = \beta_j \exp[-\beta_j^2(t - t_{прш})^2]/\sqrt{\pi}$, $\beta_j \to \infty$ (в реальной системе принимаются ограниченные положительные постоянные $\beta_{j\ \text{огр}} > 0$). В остальном управление строится на применении условий существования скользящего режима и попадания изображающей точки на многообразие S для управления u_0 и только второго условия для управления $u_{\Delta h}$.

Возможности применения изложенного метода в случае $n > 2m$ открываются тогда, когда условие $n \le 2m$, которое не выполнялось в исходной системе (1) или (7), может выполниться в системе скользящего режима (3) или (8), так как размерность $n - m$ вектора z^1 может оказаться уже меньше или быть равной $2m$, где $m -$ число столбцов матрицы $A_{012}(t)$ входа управления скольжения $u_c = -C^1(t)z^1$. При управляемости систем (3) и (8) становится возможным формирование скользящего режима второго порядка, с размерностью системы равной уже не $n - m$, а $n - 2m \ge 1$.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-48-02101.

Библиографический список

1. Мещанов А.С. Приведение на подвижное многообразие скольжения систем с линейными нестационарными объектами в общем случае входа неопределенных возмущений. – Авиакосмическое приборостроение, № 5, 2008. - С.16-20.

2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М., Наука, 1973 г. 832 с.