УДК 681.5.01:658.5

Мещанов А.С., Каратаева М.В., Самышева Е.Ю.

СТРУКТУРНОЕ УМЕНЬШЕНИЕ ЭНЕРГОЗАТРАТ И РЕГУЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРАВЛЕНИЯ НА СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМАХ. II

Работа посвящена математическому обоснованию предложений из работы [I].

Математическое обоснование Предложения 1 (нулевые значения управлений u_i в случае совпадения многообразия скольжения с подходящим по качеству процессов управления подпространством собственных векторов матрицы объекта, нулевых параметров матрицы K_g).

Решение данной задачи сформулировано в виде Теоремы 1 (доказательство не приводится). Пусть начальный момент t_0 совпадает с началом скольжения на многообразии пересечения гиперплоскостей скольжения.

Теорема 1. Для получения в системе (11) [1] слагаемого $u_{экв}$ в управлении $u_0 = u_{экв} + u_{gsн}$ (13) [1] полного управления u (3) [1]

$$u = u_{н0} + u_p = u_{н0} + u_{p0} = u_{н0} + u_0 + u_{F0} + u_{0h} = u_{н0} + u_{экв} + u_{gsн} + u_{F0} + u_{0h} \tag{19}$$

равным нулю на всем интервале скользящего режима $t \in (t_0, t_k]$, $t_k < \infty$,

$$u_{экв} = -[(CB_0)^{-1} C(A_0 + B_0 K_0)x] \equiv 0, \tag{20}$$

необходимо и достаточно, чтобы $(n-m)-$мерное многообразие $S(s = Cx(t) = 0)$ (6) [1] совпадало с подпространством, определяемым выбранными собственными векторами матрицы $A_0 + B_0 K_0$ (18) [1].

Следствие 1. Для построения $(n-m)$- мерного многообразия скольжения S (6) [1], совпадающего с подпространством, образуемым первыми $(n-m)$ собственными векторами матрицы канонического базиса M, должна решаться система алгебраических уравнений относительно коэффициентов субматриц C^1, C^2:

$$\begin{pmatrix} C^1, & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix} = \left(C^1 M_{11} + C^2 M_{21} \right) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} - m \times (n-m). \tag{21}$$

В частности, при известных и заданных неособых субматрицах M_{11} и C^2 решение данной системы (21) принимает сравнительно простое выражение:

$$C^1 = -C^2 M_{21} M_{11}^{-1}. \tag{22}$$

Следствие 2. Движение в скользящем режиме по интегральной прямой возможно только в таком случае сочетания размерностей n и m исходной системы (2) [1] и вектора управления u, при котором размерность $n-m$ многообразия скольжения S (6) равна единице

$$n - m = 1. \tag{23}$$

Следствие 3. В случае таких сочетаний размерностей n и m, при которых разность $n-m$ равна двум, трем и т.д., скольжение осуществляется в подпространстве, определяемом соответственно двумя, тремя и т.д. собственными векторами. Так, например, в системе $n-$го порядка со скалярным управлением (при $m=1$) движение в скольжении возможно только в $(n-1)-$мерном подпространстве, определяемом таким же количеством выбранных собственных векторов.

Следствие 4. Если в исходной системе (2) [1] нет вектора внешних номинальных возмущений $F_0(t)$ и неопределенностей, выражаемых приведенным вектором $h(t)$, и объект имеет сам по себе $(n-m)$ приемлемых собственных значений с соответствующими собственными векторами, то необходимость в составляющих u_{F_0}, u_{0h} и $u_{н0}$ в управлении u отпадает и с учетом нулевого значения $u_{экв}$ при соответствующем задании многообразия скольжения S, совпадающего с $(n-m)$- мерным подпространством подходящих собственных векторов матрицы A_0 объекта, оно запишется в виде:

$$u = u_{gsн} = (CB_0)^{-1}(K_g g + K_s s). \tag{24}$$

В данном управлении переключаемые составляющие $\kappa_{gi}^{\pm}$ разрывных параметров κ_{gi} в малой окрестности многообразия S могут задаваться нулевыми, а конечные значения составляющих $\kappa_{si}^{\pm}$ разрывных параметров κ_{si} в скользящем режиме не имеют значения в уменьшении модуля управления и его энергетических затрат, так как в скользящем режиме составляющие вектор - функции s принимают значения достаточно близкие к нулевым и, следовательно, вектор $K_s s$, как и вектор $K_g g$, имеет нулевые составляющие.

Таким образом, данное управление u (24) будет с момента начала скользящего режима принимать по норме минимальное значение, равное нулю, а энергетические затраты (1) [1] постоянное значение, равное сложившимся затратам на этот момент.

Математическое обоснование Предложения 2 (использование подходящей динамики объекта без действия на него стабилизирующего управления на определенных промежутках времени).

Предлагается для существенного уменьшения энергетических затрат на управление объектом использовать только его собственную подходящую динамику с начал $t = t_i$ и до концов t_{i+1} малых интервалов времени, $t \in I_i = (t_i, t_{i+1}],\ i = \overline{1,k},\ k < \infty,$ на которых производная определенно положительной функции Ляпунова $V = x^T Lx,\ L - n \times n -$ матрица, $\dot{V}_{об} -$ производная, определяемая в силу системы уравнений объекта

$$\dot{x}_{об} = A_0 x_{об} + D_0 F_0(t) + (h(t) - \Delta\, B(t)\, u), \tag{25}$$

где $h(t) = \Delta A(t)\, x + \Delta\, B(t)\; u + D_0\; \Delta F(t) + \Delta D(t) F_0(t) + \Delta D(t) \Delta\, F(t)$ - приведенный вектор неопределенных ограниченных возмущений, принимает отрицательные значения большие по модулю, чем производная $\dot{V}$ по системе (2) [1], то есть при действии управления:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + D_0 F_0(t) + h(t). \tag{26}$$

Состояния $x_{об}(t_i)$ системы (25) объекта для проверки выполнения представленного условия

$$\dot{V}_{об}(t_i) < \dot{V}(t_i)\,,\, i = \overline{1,k},\quad k < \infty, \tag{27}$$

приравниваются на каждом шаге в моменты $t = t_i$ состоянию $x(t_i)$ системы (26):

$$x_{об}(t_i) = x(t_i),\ i = \overline{1,k},\ k < \infty. \tag{28}$$

Упростим условия отключений (27) управления на малых шагах $I_i = (t_i, t_{i+1}]$. С учетом равенств $\dot{V}_{об}(t_i) = (A_0 x(t_i) + B_0 u_i + D_0 F_0(t_i) + h(t_i) - \Delta\, B(t_i) u(t_i))^T Lx(t_i),\quad \dot{V}(t_i) = (A_0 x(t_i) +$ $+ B_0 u_i + D_0 F_0(t_i) + h(t_i))^T Lx(t_i)$ в результате сокращений получаем:

$$u(t_i) = \begin{cases} (0,..,0)^T & \text{при}\quad [(B_0 + \Delta B(t_i) u(t_i)]^T Lx(t_i) > 0 \quad \forall \Delta B(t_i) \in \Omega_{\Delta B}, \\ u(t_i) & \text{при}\quad [(B_0 + \Delta B(t_i) u(t_i)]^T Lx(t_i) \le 0 \quad \forall \Delta B(t_i) \in \Omega_{\Delta B}. \end{cases} \tag{29}$$

Математическое обоснование Предложения 3 (регулирование установившихся колебаний управления).

Необходимость регулирования установившихся колебаний самого управления возникает в случаях их возможного негативного воздействия на исполнительные механизмы [2], а также и на другие звенья системы. В частности, могут возникнуть нерасчетные срабатывания данных механизмов, например, электроклапанов с понижением их ресурса на скользящем режиме с большим числом переключений и резонансные колебания в звеньях системы [3].

Рассматривается система (2) [1], (26) с управлениями (3), (5), (7), (9), (12), (13), (17), (19): $u = u_{н0} + u_p$ (3), $u_{н0} = K_0 x$ (5), $u_p = u_{p0} + u_h$ (7), $u_{p0} = u_0 + u_{F_0}$ (9), $u_p = u_{p0} = u_0 + u_{F_0} + u_{0h}$ (12), $u_0 = u_{экв} + u_{gsн}$ (13), $u_{F_0} = -(CB_0)^{-1} CD_0 F_0(t)$, $u_{0h} = -(CB_0)^{-1} Ch_0(t)$ (17), $u = u_{н0} + u_p = u_{н0} + u_{p0} = u_{н0} + u_0 + u_{F_0} + u_{0h} = u_{н0} + u_{экв} + u_{gsн} + u_{F_0} + u_{0h}$ (19), где $u_{экв} = -[(CB_0)^{-1} C(A_0 + B_0 K_0)x]$, $u_{gsн} = (CB_0)^{-1}(K_g g + K_s s)$.

Компенсация возмущений $D_0 F_0(t)$ и $h(t)$ при выполнении условий инвариантности к $F_0(t)$ и $h(t)$ следует непосредственно из вывода уравнений скользящего режима на многообразии S (6) [1] для системы (26) методом эквивалентного управления В.И.Уткина:

- полагаем в скольжении $\dot{s} = C\dot{x} = CA_0 x + CB_0 u + CD_0 F_0(t) + Ch(t) = 0$ и находим из данного уравнения эквивалентное управление $u = u_{экв} = -(CB_0)^{-1}(CA_0 x + CD_0 F_0(t) + Ch(t))x$;
- подставляем данное управление $u = u_{экв}$ в систему (26) и получаем систему

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + D_0 F_0(t) + h(t) = A_0 x - B_0 (CB_0)^{-1}(CA_0 x + CD_0 F_0(t) + Ch(t))x + D_0 F_0(t) + h(t) =$$
$$= (A_0 - B_0 (CB_0)^{-1} CA_0)x + (E - B_0 (CB_0)^{-1} C)D_0 F_0(t) + (E - B_0 (CB_0)^{-1} C)h(t),$$

откуда с учетом условий инвариантности

$$D_0 = B_0 \Lambda_{D_0}, \quad h(t) = B_0 \Lambda_h(t), \tag{30}$$

где Λ_{D_0} и $\Lambda_h(t)$ соответственно $\Lambda_{D_0} - m \times l$ и $\Lambda_h(t) - m \times 1 -$ известные матрица и вектор, окончательно получаем систему скользящего режима

$$\dot{x} = (A_0 - B_0 (CB_0)^{-1} CA_0)x, \tag{31}$$

которая в силу условий инвариантности не содержит возмущения $D_0 F_0(t)$ и $h(t)$.

Следует отметить, что при выполнении условий инвариантности (30) действие возмущений исключается не только с начала скользящего режима, но и с начального момента действия системы в процессе попадания и.т. системы на многообразие S (6), так как управления (17) $u_{F_0} = -(CB_0)^{-1} CD_0 F_0(t)$, $u_{0h} = -(CB_0)^{-1} Ch_0(t)$, умноженные на матрицу входа управления B_0, с учетом условий инвариантности (30) преобразуются в системе (26) к виду:

$$\begin{aligned} B_0 u_{F_0} &= -B_0 (CB_0)^{-1} CD_0 F_0(t) = -B_0 \Lambda_{D_0} F_0(t) = -D_0 F_0(t), \\ B_0 u_{0h} &= -B_0 (CB_0)^{-1} Ch_0(t) = -B_0 (CB_0)^{-1} CB_0 \Lambda_h(t) = -h_0(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Для регулирования установившихся колебаний управления предлагается:

– исключить в управлении (13), (16) $u_{gsн} = (CB_0)^{-1}(K_g g + K_s s)$ диагональную матрицу K_g разрывных параметров $\kappa_{gj}^{\pm}$ и положить в диагональной матрице K_s разрывные параметры $\kappa_{sj}^{\pm}$ непрерывными, то есть равными переменными одного отрицательного знака;

– сомножители s_j – функции переключений структур правления в $K_s s$ задавать в нечетных степенях $s_j^k, k = 1,3,5,...$, для управления асимптотическим приведением и.т. на многообразие скольжения;

– корни характеристических уравнений систем скользящего режима на гиперплоскостях скольжения $s_j = C_j x = 0$, $j = \overline{1,m}$ задавать вещественными отрицательными во избежание колебаний управления, вызванных колебаниями процессов скользящего режима при задании корней комплексно-сопряженными (хотя и с отрицательной вещественной частью);

– в случаях погрешностей $\Delta h(t)$ идентификации $h_0(t)$ приведенного вектора неопределенных возмущений $h(t) = h_0(t) + \Delta h(t)$ и нежелательных колебаний в самих управлениях $u_{F_0} = -(CB_0)^{-1} CD_0 F_0(t)$, $u_{0h} = -(CB_0)^{-1} Ch_0(t)$ в результате вхождения в них возмущений $F_0(t)$ и $h_0(t)$ предлагается ограничение амплитуд колебаний управления до приемлемых значений, при которых не будет нерасчетных срабатываний исполнительных механизмов и устраняются возможные резонансные колебания в звеньях системы.

Рассмотрим последний метод регулирования колебаний несколько подробней [3]. Применяется развитие метода регулирования параметров колебаний не только от неопределенных возмущений $h(t) = h_0(t) + \Delta h(t)$, но и от номинальных возмущений $F_0(t)$. С этой целью с учетом номинальных ($D_0 F_0(t) + h_0(t)$) и неопределенных ограниченных возмущений $\Delta h(t)$ разобьем управление u и производную $\dot{s} = C\dot{x} = (CA_0 x + {}$ ${} + CB_0 u) + C(D_0 F_0(t) + h_0(t)) + C\Delta h(t)$ на соответствующие слагаемые:

$$u = u_0 + u_{D_0 F_0 + h_0} + u_{\Delta h}, \qquad \dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{s}_{D_0 F_0 + h_0} + \dot{s}_{\Delta h}, \tag{33}$$

где слагаемые производной $\dot{s}$ согласно приведенным разбиениям примут вид:

$$\dot{s}_0 = C(A_0 + B_0 K_0)x + CB_0 u_0, \quad \dot{s}_{D_0 F_0 + h_0} = C(D_0 F_0(t) + h_0(t)) + CB_0 u_{D_0 F_0 + h_0}, \quad \dot{s}_{\Delta h} = C\Delta h(t) + CB_0 u_{\Delta h}.$$

Управление u_0 согласно заданию производной $\dot{s}_0$ равной $K_s s^k$, $s^k = (s_1^k, ..., s_m^k)^T$, находится из равенства $K_s s^k$ производной $\dot{s}_0$ в силу системы (15) [1] и примет вид

$$u_0 = (CB_0)^{-1}(K_s s^k - C(A_0 + B_0 K_0)x). \quad (34)$$

С целью упрощения построения управлений $u_{D_0F_0+h_0}$ и $u_{\Delta h}$ полагаем

$$u_{D_0F_0+h_0} = (CB_0)^{-1} u^*_{D_0F_0+h_0}, \qquad u_{\Delta h} = (CB_0)^{-1} u^*_{\Delta h}. \quad (35)$$

Тогда $\dot s_{D_0F_0+h_0} = C(D_0F_0(t) + h_0(t)) + u^*_{D_0F_0+h_0}$, $\qquad \dot s_{\Delta h} = C\Delta h(t) + u^*_{\Delta h}$.

Задаемся структурой векторных управлений $u^*_{D_0F_0+h_0}$ и $u^*_{\Delta h}$ в виде:

$$\begin{aligned}
&u^*_{D_0F_0+h_0} = (u^*_{(D_0F_0+h_0)1},\dots,u^*_{(D_0F_0+h_0)m})^T = (C_1 k^1 s_1,\dots,C_m k^m s_m)^T,\\
&C_j = (c_{j1},\dots,c_{jn}), \quad k^j = (k_1^j,\dots,k_n^j)^T,\\
&\dot s_{(D_0F_0+h_0)j} = u^*_{(D_0F_0+h_0)j} + C_j(D_0F_0 + h_0) = C_j k^j s_j + C_j(D_0F_0 + h_0) =\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n c_{ji}(k_i^j s_j + (D_0F_0 + h_0)_i),\\
&|\kappa_i^j(t)| = |(D_0F_0 + h_0)_i| / \Delta_{*j} + \alpha_i^j, \quad \alpha_i^j \ge 0, \quad (D_0F_0 + h_0)_i = D_{0i}(t)F_0(t) + h_{0i},\\
&\Delta_j \ge \Delta_{*j} > 0, \quad \kappa_i^j(t) = -|\kappa_i^j(t)|\, sign\ c_{ji}(t), \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m};
\end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
&u^*_{\Delta h} = (u^*_{\Delta h1},\dots,u^*_{\Delta hm})^T = (C_1 \bar k^1 s_1,\dots,C_m \bar k^m s_m)^T,\\
&C_j = (c_{j1},\dots,c_{jn}), \quad \bar k^j = (\bar k_1^j,\dots,\bar k_n^j)^T,\\
&\dot s_{\Delta hj} = u^*_{\Delta hj} + C_j \Delta h = C_j \bar k^j s_j + C_j \Delta h = \textstyle\sum_{i=1}^n c_{ji}(\bar k_i^j s_j + \Delta h_i),\\
&|\bar\kappa_i^j| = \max_t |\Delta h_i(t)| / \Delta_{*j} + \alpha_i^j, \quad \alpha_i^j \ge 0,\\
&\Delta_j \ge \Delta_{*j} > 0, \quad \bar\kappa_i^j = -|\bar\kappa_i^j|\, sign\ c_{ji}(t), \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.
\end{aligned} \quad (37)$$

Как следует из выражений (36) и (37), достаточные условия $\dot s_{(D_0F_0+h_0)j} s_j < 0$ и $\dot s_{\Delta hj} s_j < 0$ приведения системы (2) [1]

$$\dot x = A_0 x + B_0 u + D_0 F_0(t) + h(t), \quad h(t) = h_0(t) + \Delta h(t) \quad (38)$$

в скользящий режим на многообразие S (6) [1] с заданным качеством переходных процессов выполняется при условии $\Delta_j \ge s_j > \Delta_{*j} > 0$, $j = \overline{1,m}$. При достаточно малых задаваемых значениях $\Delta_{*j} > 0$ значения по модулю s_j будут также в скольжении малыми, в результате чего установившиеся координаты x_i будут стремиться к нулю. Следовательно, установившиеся значения слагаемых управления u_0 (34) будут также стремиться к нулю. Составляющие управлений $u_{D_0F_0+h_0} = (CB_0)^{-1} u^*_{D_0F_0+h_0}$, $u_{\Delta h} = (CB_0)^{-1} u^*_{\Delta h}$, как следует из выражений (36), (37), с уменьшением модулей функций s_j при малых $\Delta_{*j} > 0$ также стремятся к нулю. Таким образом, установившиеся колебания всех составляющих управления принимают допустимые малые значения, которые можно уменьшать до значений близких к нулевым.

Управления $u_{D_0F_0+h_0} = (CB_0)^{-1} u^*_{D_0F_0+h_0}$, $u_{\Delta h} = (CB_0)^{-1} u^*_{\Delta h}$ (35) являются непрерывными при отсутствии смен знаков функций $c_{ji}(t)$, $j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n},$ либо при замене сигнатур $sign\ c_{ji}(t)$ ($sign\ c_{ji} = 1$ при $c_{ji} > 0$, $sign\ c_{ji} = -1$ при $c_{ji} < 0$, $sign\ c_{ji} = 0$ при $c_{ji} = 0$) на их непрерывные нелинейные аппроксимации f_{ji} :

$$f_{ji} = 1 \quad \text{при} \quad c_{ji} > b, \quad f_{ji} = -1 \quad \text{при} \quad c_{ji} < -b, \quad f_{ji} = (1/b)c_{ji} \quad \text{при} \quad b \ge c_{ji} \ge -b,$$

где линейная функция в третьем выражении может быть заменена на одну из нелинейных: а) $f_{ji} = (1/b^2)c_{ji}^2$ при $0 < c_{ji} \le b$, $f_{ji} = -(1/b^2)c_{ji}^2$ при $0 \ge c_{ji} \ge -b$; б) $f_{ji} = (1/b^3)c_{ji}^3$ при $b \ge c_{ji} \ge -b$.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160012.

Библиографический список

1. Мещанов А.С., Каратаева М.В., Самышева Е.Ю. Структурное уменьшение затрат и регулирование колебаний управления на скользящих режимах. I. Сборник трудов XXI Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Ч.I. Самара, 13-15 июня 2018 г. С. 80-85.

2. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: управление при неопределенности.- М.: Наука. Физматлит, 1997. 352 с.

3. А.С. Мещанов. Регулирование колебаний на скользящих режимах для нелинейных объектов. XII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. Труды. [Электронный ресурс]. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 564-577.