УДК 629.78

Крикунов М.М.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НАБОРА ВЫСОТЫ ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА МЕТОДОМ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Вопросы движения гиперзвуковых летательных аппаратов рассматривались в работах [1-4]. Монография [1] посвящена оптимизации траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов. Работы [2-3] посвящены вопросам силовых установок гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов. Наряду с основными проблемами создания гиперзввуковых летательных аппаратов (ГЛА) в сферах двигателестроения, аэродинамики и конструкции, не менее актуальной остаётся проблема оптимизации траекторий движения ГЛА на этапе разгона-набора высоты в атмосфере. В работе [4] рассматривается движение гиперзвукового самолёта-разгонщика как первой ступени двухступенчатой авиационно-космической системы. Определены оптимальная и приближённо-оптимальная программы угла атаки из условия минимума затрат топлива. Основные трудности, возникающие при решении задач оптимального управления методом принципа максимума Понтрягина[5], связаны с проблемой определения начальных приближений сопряжённых переменных при решении краевой задачи.

Данная работа посвящена вопросам решения задачи оптимизации набора высоты гиперзвукового летательного аппарата методом принципа максимума и особенностям, которые возникают в процессе её решения.

Математическая модель движения

Модель движения включает в себя:

1) уравнения движения,
2) граничные условия движения,
3) управление,
4) ограничения,
5) характеристики гиперзвукового летательного аппарата.

При построении математической модели движения ГЛА используются следующие допущения:

1) движение происходит в вертикальной плоскости;
2) поле тяжести является однородным;
3) атмосфера неподвижна;

4) аппарат является материальной точкой переменной массы;

5) направления вектора тяги и аэродинамической хорды при нулевом угле атаки α совпадают с направлением строительной горизонтали ГЛА;

6) используются приближённые формулы для синуса и косинуса в виде:

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

С учётом принятых допущений уравнения движения ГЛА в траекторной системе координат примут вид [4]:

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{r\mu m_0 g_0}{2m}\left(2-\alpha^2\right) - C_{xa}\dfrac{\rho V^2}{2m}S - g_0\sin\theta, \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{r\mu m_0 g_0}{m}\alpha + C_{ya}\dfrac{\rho V^2}{2m}S - g_0\cos\theta\right) + \dfrac{V\cos\theta}{R_З + h}, \\ \dot{h} = V\sin\theta, \\ \dot{m} = -\beta = -\dfrac{r\mu m_0}{j_{уд.}J_0}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь V [м/с] – скорость, θ [рад] – угол наклона траектории; h [м] – высота полёта; m [кг] – масса ГЛА; α [рад] – угол атаки; r – относительная тяга двигательной установки (ДУ); C_{xa} – коэффициент силы лобового сопротивления; C_{ya} – коэффициент подъёмной силы; S – характерная площадь ГЛА; ρ – плотность атмосферы Земли; $R_З$ [м] – радиус Земли; g_0 [м/с^2] – ускорение свободного падения; μ – стартовая тяговооружённость; m_0 [кг] – стартовая масса; β [кг/с] – секундный расход топлива ДУ; $j_{уд.}$ – относительный удельный импульс ДУ; J_0 [с] – удельный импульс ДУ на старте.

Аэродинамические характеристики ГЛА выражаются зависимостями:

$$\begin{aligned} C_{xa}(M,\alpha) &= C_{xa0}(M) + C_{xa1}(M)\alpha + C_{xa2}(M)\alpha^2, \\ C_{ya}(M,\alpha) &= C_{ya0}(M) + C_{ya1}(M)\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Начальные и конечные граничные условия движения записываются в виде:

$$\begin{aligned} t = t_н &: V = M_н \cdot a(h_н), \theta = \theta_н, h = h_н, m = m_н; \\ t = t_к &: V = M_к \cdot a(h_к), \theta = \theta_к, h = h_к. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t – время, M – число Маха, a – скорость звука; $M_н$, $M_к$, $\theta_н$, $\theta_к$, $h_н$, $h_к$, $m_н$ – заданные числа.

В качестве функции управления принята программа угла атаки при ограничениях:

$$\alpha_{\min} \le \alpha(t) \le \alpha_{\max},$$

где α_{min} и α_{max} – значения минимального и максимального угла атаки соответственно.

Постановка и решение задачи оптимизации

Физический смысл данной постановки заключается в следующем: требуется перевести ГЛА за произвольное время $T=t_к - t_н$ с начальной высоты $h_н$ на высоту $h_к$, увеличив скорость от начального значения $V_н$ до значения $V_к$ с изменением угла наклона траектории от начального значения $\theta_н$ до значения $\theta_к$, затратив при этом минимальное количество топлива.

Для решения поставленной задачи используется принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона записывается в виде:

$$H = \psi_V \dot{V} + \psi_\theta \dot{\theta} + \psi_h \dot{h} + \psi_m \dot{m}, \tag{4}$$

где ψ_V, ψ_θ, ψ_h, ψ_m – сопряжённые переменные.

Сопряжённые переменные определяются из решения системы сопряжённых дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\psi}_V = -\frac{\partial H}{\partial V},\ \dot{\psi}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta},\ \dot{\psi}_h = -\frac{\partial H}{\partial h},\ \dot{\psi}_m = -\frac{\partial H}{\partial m}.$$

$$\begin{cases}
\dot{\psi}_V = -\psi_V \left[\dfrac{\partial r}{\partial V} \dfrac{2-\alpha^2}{2m} \mu m_0 g_0 - \left(\dfrac{\partial C_{xa}}{\partial V} \cdot \dfrac{V}{2} + C_{xa} \right) \dfrac{\rho V}{m} S \right] + \\
+\psi_\theta \left[\left(\dfrac{r}{V} - \dfrac{\partial r}{\partial V} \right) \dfrac{\alpha \mu m_0 g_0}{Vm} - \left(V \dfrac{\partial C_{ya}}{\partial V} + C_{ya} \right) \dfrac{\rho S}{2m} - \dfrac{\cos\theta}{R_з + h} - \dfrac{g_0 \cos\theta}{V^2} \right] \\
-\psi_h \sin\theta + \psi_m \dfrac{\mu m_0}{J_0} \cdot \dfrac{\partial}{\partial V} \left(\dfrac{r}{j_{уд.}} \right), \\
\dot{\psi}_\theta = \psi_V g_0 \cos\theta + \psi_\theta \left(\dfrac{V}{R_з + h} - \dfrac{g_0}{V} \right) \sin\theta - \psi_h V \cos\theta, \\
\dot{\psi}_h = -\psi_V \left[\dfrac{\partial r}{\partial h} \dfrac{2-\alpha^2}{2m} \mu m_0 g_0 - \left(\dfrac{\partial C_{xa}}{\partial h} \rho + C_{xa} \dfrac{\partial \rho}{\partial h} \right) \dfrac{V^2 S}{2m} \right] - \\
-\psi_\theta \left[\dfrac{\partial r}{\partial h} \dfrac{\alpha \mu m_0 g_0}{Vm} + \left(\dfrac{\partial C_{ya}}{\partial h} \rho + C_{ya} \dfrac{\partial \rho}{\partial h} \right) \dfrac{VS}{2m} - \dfrac{V \cos\theta}{\left(R_з + h \right)^2} \right] - \psi_m \dfrac{\mu m_0}{J_0} \cdot \dfrac{\partial}{\partial h} \left(\dfrac{r}{j_{уд.}} \right), \\
\dot{\psi}_m = \dfrac{\psi_V}{2m^2} \left[\left(2 - \alpha^2 \right) r \mu m_0 g_0 - C_{xa} \rho V^2 S \right] + \dfrac{\psi_\theta}{2Vm^2} \left(2\alpha r \mu m_0 g_0 + C_{ya} \rho V^2 S \right).
\end{cases} \tag{5}$$

Для того чтобы функционал $\Delta G = m_н - m_к$ вариационной задачи Майера достигал сильного минимума, необходимо существование на интервале времени $t \in [0,\ T]$

ненулевых непрерывных функций $\psi_V(t)$, $\psi_\theta(t)$, $\psi_h(t)$, $\psi_m(t)$, удовлетворяющих сопряжённой системе, на которых:

1) функция Гамильтона достигает максимума по углу атаки;
2) выполняется условие трансверсальности в виде:

$$\left[\psi_V \delta V + \psi_\theta \delta\theta + \psi_h \delta h + \psi_m \delta m + H\delta t + \delta G\right]_0^T = 0.$$

Из необходимого условия максимума функции Гамильтона по углу атаки

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0$$

получим выражение для оптимального угла:

$$\alpha_{opt} = \frac{\psi_\theta \left(2r\mu m_0 g_0 + C_{ya1}\rho V^2 S\right) - \psi_V C_{xa1}\rho V^3 S}{2V\psi_V \left(r\mu m_0 g_0 + C_{ya2}\rho V^2 S\right)}, \tag{6}$$

где C_{xa1}, C_{xa2}, C_{ya1} – коэффициенты из зависимостей (2).

Рассмотрим решение поставленной нелинейной краевой задачи с использованием метода редукции к задачам Коши. Вычислительная схема метода состоит из следующих этапов.

1) Решаем задачу Коши для системы (1), (5) при некотором начальном приближении. Для (1) – это значения фазовых переменных в левой границе. В результате решения получаем значения фазовых и сопряжённых переменных в правой границе для нулевого приближения.

2) Решаем восемь задач Коши (1), (5) при начальных условиях, отличающихся на малую величину l_k (k – номер шага), с целью определения «чувствительности» результата в правой границе к изменению начальных условий каждой переменной.

3) Используя значения из п.2, составляем матрицу Якоби и правые части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов «чувствительности». Система решается методом Гаусса.

4) Используя решение из п.3, вычисляем очередное приближение. Проверяем, достигнута ли наперёд заданная точность.

5) Если точность не достигнута, повторяем шаги 1-4, используя полученное в п.4 приближение.

Сходимость метода редукции обусловливается сходимостью метода Ньютона [6].

Рассмотрим особенности метода редукции к задачам Коши.

Элементы матрицы Якоби можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial G_i^{(k)}}{\partial z_j} \approx \frac{G_i\left(z^{(k)} + l_k e_i\right) - G_i\left(z^{(k)}\right)}{l_k}, \qquad (7)$$

где i, j – номера строки и столбца соответственно; k – номер приближения; e_i – вектор-столбец, у которого на i-*м* месте 1, а остальные элементы равны нулю; G – краевые условия (3) плюс условие равенства нулю функции Гамильтона (4) в правом конце; z_j – фазовые и сопряжённые переменные.

Рассмотрим особенности выбора величины l_k.

Чтобы элементы матрицы Якоби вычислялись как можно более точно, то величину l_k по смыслу производной нужно выбирать возможно меньшей. При вычислении элементов матрицы Якоби в числителе будет результат вычитания двух близких по абсолютной величине чисел. При больших значениях фазовых переменных (например, высоты или скорости) произойдёт сильная потеря значащих цифр, что приведёт к увеличению погрешности в элементах матрицы Якоби. Если l_k выбраны недостаточно малой, то по смыслу производной формула для расчёта элементов матрицы Якоби не сможет дать хорошего по точности результата [6]. По этим причинам вопрос рационального выбора величины l_k в каждом конкретном случае требует специального рассмотрения.

Программное обеспечение для решения задачи оптимизации

Для получения решения задачи оптимизации набора высоты ГЛА разработано (в среде Delphi) программное обеспечение, включающее следующие модули:

1) главный модуль программы;
2) модуль расчёта атмосферы;
3) модуль расчёта аэродинамических характеристик;
4) модуль расчёта высотно-скоростных характеристик ДУ;
5) модуль расчёта оптимального угла атаки согласно (6);
6) модуль пользовательских функций (вспомогательный);
7) модуль параметров модели;
8) модуль решения системы дифференциальных уравнений(1), (5);
9) модуль решения краевой задачи;
10) модуль решения (СЛАУ);
11) модуль реализации метода наименьших квадратов, используемый при рассчете аэродинамических и высотно-скоростных характеристик.

Преимущество программного продукта заключается в возможности его перестройки для решения той же задачи для различных ГЛА.

Библиографический список

1. Бузулук, В.И. Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов [Текст] / В.И. Бузулук. – М.: ЦАГИ, 2008. 476 с.

2. Нечаев, Ю.Н. Силовые установки гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов [Текст] / Ю.Н. Нечаев. – М.: Российская академия космонавтики, 1996. 214 с.

3. Нечаев, Ю.Н. Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата [Текст] / Ю.Н. Нечаев, А.С. Полев, А.В. Никулин // Вестник Академии космонавтики. Научно-технические проблемы космонавтики. Выпуск 2. Материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996-1997 гг. М.: Российская академия космонавтики, 1998. С. 159-191.

4. Балакин, В.Л. Оптимизация движения гиперзвукового самолёта-разгонщика двухступенчатой авиационно-космической системы [Текст] / В.Л. Балакин, А.А. Бебяков, А.Г. Кочян // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2008. №1. С. 23-32.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, том II. М.: Наука, 1977. 400 С.