УДК 681.5.01, 658.5

Мещанов А.С., Султанова А.Ф.

ПОСТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В СИСТЕМАХ С ЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Рассматривается управляемая система общего нормального вида

$$\dot{x} = \overline{A}(t)x + \overline{B}(t)u + \overline{D}(t)F(t), \tag{1}$$

где $\overline{A}(t) = \overline{A}_0(t) + \Delta\overline{A}(t),\ \overline{B}(t) = \overline{B}_0(t) + \Delta\overline{B}(t),\ \overline{D}(t) = \overline{D}_0(t) + \Delta\overline{D}(t),\quad F(t) = F_0(t) + \Delta F(t),\quad t \in I = (t_0, t_k]$, $t_k < \infty$, $u = (u_1,...,u_m)^T$ векторное управление; $\overline{A}_0(t), \overline{B}_0(t), \overline{D}_0(t)$ и $F_0(t)$ – номинальные (известные) с переменными в общем случае коэффициентами $n\times n$, $n\times m$, $n\times l$ матрицы и номинальный $l\times 1$ – вектор внешних возмущений; $\Delta\overline{A}(t), \Delta\overline{B}(t), \Delta\overline{D}(t)$ и $\Delta F(t)$ матрицы параметрических и вектор внешних переменных неопределенных возмущений.

Известные условия инвариантности скользящего режима на подвижном (n-m)-мерном многообразии

$$S(s = (s_1,..., s_m)^T = \overline{C}(t)x = 0), \tag{2}$$

где $\overline{C}(t)$ - $m\times n$ матрица переменных коэффициентов, $s_i = \overline{C}_i x$ - функции переключений, $\overline{C}_i = (c_{i1},..., c_{in})$ - i -е строки матрицы $\overline{C}$, $i = \overline{1,m}$, к возмущениям $\Delta\overline{A}(t), \Delta\overline{B}(t), \overline{D}(t)F(T)$, записанные в виде

$$\Delta\overline{A}(t) = \overline{B}_0(t)\lambda_{\Delta\overline{A}}(t),\quad \Delta\overline{B}(t) = \overline{B}_0(t)\lambda_{\Delta\overline{B}}(t),\qquad \overline{D}(t) = \overline{B}_0(t)(t)\lambda_{\overline{DF}}(t), \tag{3}$$

с $m\times n$, $m\times m$ и $m\times l$ - матрицами $\lambda_{\Delta\overline{A}}(t)$, $\lambda_{\Delta\overline{B}}(t)$ и $\lambda_{\overline{DF}}(t)$ неопределенных ограниченных коэффициентов, при неособенном линейном преобразовании координат $z = M(t)x$ не изменяются. Действительно, задавая неособенную матрицу $M(t)$ получаем систему (1) преобразованную к виду

$$\dot{z} = (\dot{M}M^{-1} + M\overline{A}_0 M^{-1})z + M\Delta\overline{A}M^{-1}z + M\overline{B}_0 u + M\Delta\overline{B}u + M\overline{D}F\ . \tag{4}$$

Условия инвариантности скользящего режима на преобразованном многообразии

$$S(s = (s_1,..., s_m)^T = \overline{C}(t)x = \overline{C}(t)M^{-1}z = C(t)z = 0),\ C(t) = \overline{C}(t)M^{-1}(t), \tag{5}$$

по аналогии с условиями (3) преобразуются к виду

$$M(t)\Delta\overline{A}(t)M^{-1}(t) = M(t)\overline{B}_0(t)\lambda_{\Delta\overline{A}}(t)M^{-1}(t),\quad M(t)\Delta\overline{B}(t) = M(t)\overline{B}_0(t)\lambda_{\Delta\overline{B}}(t),\quad M(t)\overline{D}(t) = M(t)\overline{B}_0(t)\lambda_{\overline{DF}}(t) \tag{6}$$

и в силу выполнения условий (3) также выполняются.

Задача. Синтезировать подвижное многообразие скольжения S(2), (5) и разрывное векторное управление u, приводящее систему (1) в скользящий режим на данном

$(n-m)$–мерном многообразии S, с обеспечением требуемого качества переходных процессов при невыполнении условий инвариантности (3) скользящих режимов к номинальным и неопределенным ограниченным возмущениям в данной системе при соотношении размерностей $n=2m$.

Преобразование системы уравнений к регулярной форме

С целью упрощения решения задачи перейдем от системы (1) к системе регулярной формы, находится неособенная матрица преобразования $z = M(t)x$ в виде [1]

$$M(t) = \begin{pmatrix} E & -\overline{B}_{01}(t)\overline{B}_{02}^{-1}(t) \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В преобразованной системе выполняется равенство $B_{02}(t) = \overline{B}_{02}(t)$.

Уравнения скользящего режима в системе регулярной формы

Запишем систему (4) с приведением всех неопределенных возмущений к одному суммарному вектору $h(z,t)$ с ограниченными составляющими

$$\dot{z} = A_0(t)z + B_0(t)u + D_0(t)F_0(t) + h(z,t). \tag{8}$$

Применяя известный метод эквивалентного управления В.И. Уткина, получаем систему скользящего режима на подвижном многообразии $S(5)$, представленном в виде $S(s=(s_1,...,s_m)^T = C(t)z = C^1(t)z^1 + C^2z^2 = 0),\ C^2 = E$:

$$\dot{z} = A_0(t)z - B_0(t)B_{02}^{-1}(t)(C(t)A_0(t)z + C(t)D_0(t)F_0(t) + C(t)h(z,t) + \dot{C}^1(t)z^1) + D_0(t)F_0(t) + h(z,t). \tag{9}$$

Исключая субвектор z^2, равный в скольжении $z^2 = -C^1(t)z^1$ в силу $s=0$, приходим после отбрасывания обращающихся в тождество последних m уравнений к системе

$$\dot{z}^1 = A_{011}(t)z^1 - A_{012}(t)C^1(t)z^1 + H(z^1,t), \qquad H(z^1,t) = D_{01}(t)F_0(t) + h^1(z^1,t). \tag{10}$$

Метод синтеза многообразия скольжения при отсутствии возмущений

Предполагается, что для управляемой системы (1) система (10) также является управляемой с $(n-m)\times m$-субматрицей $A_{012}(t)$, принимаемой за матрицу входа управления скольжением

$$u_с = -C^1(t)z^1. \tag{11}$$

В системе (10) с правой частью равной $A_{011}(t)z^1 - A_{012}(t)C^1(t)z^1$, $m\times(n-m)$–субматрица $C^1(t)$ подвижного многообразия скольжения $S(5)$ принимается равной $C^1(t) = C^1_{\mathrm{var}}(t)$ и находится по заданному качеству переходных процессов с экспоненциальным уменьшением нормы вектора состояния по методу работы [2].

Синтез многообразия скольжения при номинальных внешних возмущениях

При действии только возмущения $D_{01}(t)F_0(t)$ субматрица $C^1(t)$ в u_c (11) формируется как сумма

$$C^1(t) = C^1(t, z^1(t)) = C^1_{\text{var}}(t) + C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t)), \tag{12}$$

где матрица $C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t))$ с учетом $(n-m)=m$ задается в виде

$$C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t)) = A^{-1}_{012}(t) diag\left\{\alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| / |z_1|, ..., \alpha_{n-m}\left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| / |z_{n-m}|\right\}, \tag{13}$$

$\alpha_i > 1$ - постоянные или переменные коэффициенты определяют, как и субматрица $C^1_{\text{var}}(t)$, степень затухания координат субвектора $z^1(t)$ в скользящем режиме, $D_{01,i}$ - строки $(n-m)\times l$ - субматрицы $D_{01}(t)$, $i=\overline{1, n-m}$.

Многообразие скольжения S (5), управление скольжением u_c (11)-(13) и система скользящего режима (10) примут вид:

$$\begin{gathered} S(s = C(t)z = C^1(t)z^1 + C^2z^2 = (C^1_{\text{var}}(t) + C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t)))z^1 + z^2 = \\ = C^1_{\text{var}}(t)z^1 + A^{-1}_{012}(t)\left(\alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| sign z_1, ..., \alpha_{n-m}\left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| sign z_{n-m}\right)^T + z^2 = 0), \end{gathered} \tag{14}$$

$$u_c = -C^1(t)z^1 = -\left(C^1_{\text{var}}(t)z^1 + A^{-1}_{012}(t)\left(\alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| sign\, z_1, ..., \alpha_{n-m}\left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| sign\, z_{n-m}\right)^T\right), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \dot{z}^1 = A_{011}(t)z^1 - A_{012}(t)C^1(t)z^1 + D_{01}(t)F_0(t) = (A_{011}(t) - A_{012}(t)(C^1_{\text{var}}(t))z^1 + \\ + \left(D_{01,1}(t)F_0(t) - \alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| sign\ z_1, ..., D_{01,n-m}(t)F_0(t) - \alpha_{n-m}\left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| sign\ z_{n-m}\right)^T. \end{gathered} \tag{16}$$

Синтез многообразия скольжения при номинальных и неопределенных возмущениях

При действии и номинальных $D_{01}(t)F_0(t)$ и неопределенных внешних $h^1(z^1,t)$ возмущений матрица $C^1(t)$ для системы (10) в управлении u_c (11) при $n=2m$ (или $(n-m)=m$) формируется в виде суммы

$$C^1(t) = C^1(t, z^1(t)) = C^1_{\text{var}}(t) + C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t)) + C^1_{h^1}(t, z^1(t)), \tag{17}$$

где $(n-m)\times(n-m)$–матрицы $C^1_{D_{01}F_0}(t,z^1(t))$ и $C^1_{h^1}(t, z^1(t))$ имеют соответственно выражения (13) и $C^1_{h^1}(t, z^1(t)) = A^{-1}_{012} diag\left\{\kappa_1 / |z_1|, ..., \kappa_{n-m} / |z_{n-m}|\right\}$, (18)

$$\kappa_i > \max_{z^1, t}\left|h^1_i(z^1, t)\right|, \quad i = \overline{1, n-m}. \tag{19}$$

Многообразие скольжения S(14), управление скольжением (15) и система скользящего режима (16) преобразуются к виду:

$$S(s = C(t)z = C^1(t)z^1 + C^2z^2 = (C^1_{\text{var}}(t) + C^1_{D01F0}(t, z^1(t)) + C^1_{h^1}(t, z^1(t)))\, z^1 + z^2 = C^1_{\text{var}}(t)\, z^1 + \tag{20}$$

$$u_c = -C^1(t)z^1 = -(C^1_{\mathrm{var}}(t) + C^1_{D_{01}F_0}(t, z^1(t)) + C^1_{h^1}(t, z^1(t)))\, z^1 = -\Big(C^1_{\mathrm{var}}(t)\, z^1 +$$
$$+ A^{-1}_{012}(t)\Big(\alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| sign\, z_1, \ldots, \alpha_{n-m} \left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| sign\, z_{n-m}\Big)^T + A^{-1}_{012}(t)(\kappa_1 sign\ z_1, \ldots, \kappa_{n-m} sign\ z_{n-m})^T\Big),$$

$$\dot{z}^1 = (A_{011}(t) - A_{012}(t)C^1_{\mathrm{var}}(t))z^1 + \Big(D_{01,1}(t)F_0(t) - \alpha_1 \left|D_{01,1}(t)F_0(t)\right| sign\ z_1, \ldots$$
$$\ldots, D_{01,n-m}(t)F_0(t) - \alpha_{n-m}\left|D_{01,n-m}(t)F_0(t)\right| sign\ z_{n-m}\Big)^T + (h^1(z^1, t) - diag\ \{\kappa^1\} sign\ z^1),$$

где $diag\{\kappa^1\} = diag\{\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-m}\}$, $sign\, z^1 = (sign\, z_1, \ldots, sign\, z_{n-m})^T$, $diag\{\kappa^1\}\ \ sign\, z^1 = (\kappa_1 sign\, z_1, \ldots, \kappa_{n-m} sign\, z_{n-m})^T$.

Настройкой параметров $\alpha_i > 1$ и κ_i(19) обеспечиваются подходящие свойства переходных процессов.

Методы синтеза управлений, приводящих систему в скользящий режим

В рассматриваемом случае $n = 2m$, предполагается, что $\left|A_{012}(t)\right| \neq 0$. Представим производную $\dot{s}$ функции переключений $s = C(t)z$ (5) в системе (8) в виде суммы $\dot{s} = \dot{s}_0 + \dot{s}_h$, в которой первое слагаемое соответствует номинальным составляющим системы (8), а второе неопределенным, включая и соответствующие слагаемые управления $u : u = u_0 + u_h$. Рассмотрим случай многообразия S (20), как наиболее общий. Управление u_0 находится из условий существования скольжения на каждой из m гиперплоскостей и условий попадания изображающей точки в их малые окрестности $\dot{s}_{0i} s_j < 0,\ j = \overline{1, m}$, а управление u_h только из приведенного условия попадания:

$$u_0 = B_{02}^{\ -1}(t)\Big\{K_g g + K_s s - \Big[\dot{C}^1_{\mathrm{var}}(t)z^1 + C^1_{\mathrm{var}}(t)(A_{011}(t)z^1 + A_{012}(t)z^2 + D_{01}(t)F_0(t)) +$$
$$+ \dot{A}^{-1}_{012}(t)\Big((\alpha_1\left|\varphi_1(t)\right| + \kappa_1) sign\ \ z_1, \ldots, (\alpha_{n-m}\left|\varphi_{n-m}(t)\right| + \kappa_{n-m}) sign\ \ z_{n-m}\Big)^T +$$
$$+ A^{-1}_{012}(t)\big[\alpha_1(\dot{\varphi}_1(t) sign\ \varphi_1 + \varphi_1(t) d(sign\ \varphi_1)/dt) + (\alpha_1 + \kappa_1) d(sign\ \ z_1)/dt, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_{n-m}(\dot{\varphi}_{n-m}(t) sign\ \varphi_{n-m} + \varphi_{n-m}(t) d(sign\ \varphi_{n-m})/dt) + (\alpha_{n-m} + \kappa_{n-m}) d(sign\ \ z_{n-m})/dt\big]^T +$$
$$+ A_{021}(t)z^1 + A_{022}(t)z^2 + D_{02}(t)F_0(t)\Big]\Big\}.$$

Таким образом, получены методы синтеза подвижных многообразий и управления для обеспечения требуемого качества процессов при возмущениях, не удовлетворяющих условиям инвариантности в случае равенства размерности удвоенной размерности управления. Результаты применимы в стабилизации режимов полета летательных аппаратов и работы их двигательных установок при различных типах возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16-31-00463 мол_а.

Библиографический список

1. Мещанов А.С. Синтез многоуровневых векторных управлений для скользящего режима заданного порядка. Вестник КГТУ им.А.Н. Туполева. 2007, № 4, С. 47-51.

2. Мещанов А.С. Синтез линейных систем с заданным качеством процессов управления по норме вектора состояния. Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2009, № 4, С. 107-114.