

Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРОИДА НА УПРУГОЙ ПРУЖИНЕ В НЕСЖИМАЕМОЙ И ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Введение

Для исследования влияния характеристик движения тела (скорость и ускорение) и других параметров тела и среды на гидроаэродинамические нагрузки целесообразно рассмотреть модельную задачу о затухающих в результате воздействия внешней вязкой среды колебаниях твёрдых тел, закреплённых на упругой пружине. Подобные системы, в которых присутствуют диссипативные свойства, изучаются теоретически в работах [1, 2]. В экспериментальной работе [3] коэффициент вязкости среды варьировался путём растворения глицерина (как более вязкой жидкости) в воде (как менее вязкой жидкости). В частности, изучена зависимость декремента затухания колебаний шара в жидкости от концентрации глицерина в растворе. Показано, что благодаря учёту влияния присоединённой массы на гидродинамическое сопротивление в некоторых случаях удаётся аналитически воспроизвести зависимость силы от времени.

В настоящей работе выполняется численное моделирование на основе бессеточного метода вязких вихревых доменов [4-6] одномерных колебаний твёрдого шара или сфероида (осесимметричного эллипсоида) с заданной плотностью на линейно упругой пружине в безграничном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой средой (см. рис. 1). В отличие от работы [6] закон движения тела не задаётся, а решается сопряжённая задача гидродинамики и динамики. Дается сравнение интегральных результатов численного моделирования при различных удлинениях эллипсоида с результатами расчёта сопротивления на основе упрощённых формул.

Постановка задачи

Рассматриваются одномерные колебания твёрдого сфероида (осесимметричного эллипсоида) с заданной постоянной плотностью ρ_{body} на линейно упругой пружине, рисунок 1. Один конец пружины неподвижен, а другой прикреплен к сфероиду. В начальный момент времени пружина растянута (начальное удлинение равно Δx), а окружающая сфероид вязкая несжимаемая жидкость покоится в неограниченном пространстве. Численно решается сопряжённая задача совместного отыскания двух скалярных функций $\bar{x}_m(t)$, $\Omega(t, x, y)$, удовлетворяющих системе

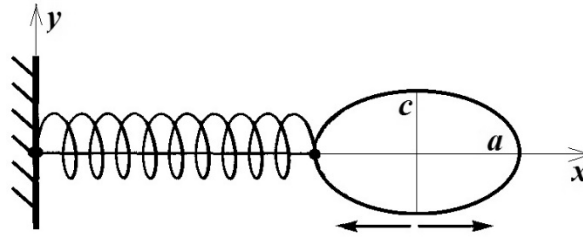


Рисунок 1 – Схема соединения сфероида с упругой пружиной

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_m \mathbf{e}_x &= \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_{ext}, \\
 \mathbf{F}_a &= \ddot{x}_m \mathbf{e}_x V - \pi \mathbf{e}_x \int_0^L y^2(l) \dot{\gamma}(l) dl + \frac{1}{\text{Re}} \int (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}) d\sigma, \\
 \mathbf{F}_{ext} &= -k_0 \frac{\Delta x}{L} \mathbf{e}_x, \\
 \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}; \quad m = \rho_{body} V.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия прилипания на поверхности тела, соответствующие системе (1), имеют вид связи между $\dot{x}_m, \boldsymbol{\Omega}$. Поле скоростей в жидкости восстанавливается по полю завихренности с помощью формулы Био-Савара [5]. Сопряжённая система (1) допускает вырожденный случай нулевой массы тела $m = 0$ без понижения порядка динамического уравнения, который и рассматривается в настоящей работе. В случае, когда однородный по плотности эллипсоид вращения или соответствующая жёсткая эллипсоидальная оболочка с нулевой плотностью движется под действием силы линейной упругости пружины, внешнюю (не гидродинамическую) силу \mathbf{F}_{ext} можно представить в виде: $\mathbf{F}_{ext} = -k_0 \frac{\Delta x}{L} \mathbf{e}_x$. Здесь безразмерная жёсткость пружины

$k_0 = \frac{4k}{LU^2\rho}$, Δx – текущее отклонение координаты центра сфероида от начала координат,

характерное число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$. В качестве основных размерных масштабов приняты L, U, ρ , где L – линейный размер тела (в качестве L мы выбираем поперечный радиус сфероида); U – характерная скорость движения тела относительно среды, покоящейся на бесконечности; ρ – плотность среды.

Метод численного решения

Использован лагранжев бессеточный метод [4-6] решения нестационарных уравнений Навье-Стокса – метод вязких вихревых доменов (ВВД). Пространство с ненулевой завихренностью моделируется набором мелких областей (вихревых доменов),

движущихся относительно жидкости с диффузионной скоростью. На каждом временном шаге с контрольных интервалов разбиения поверхности тела сходят новые домены, моделирующие поток завихренности. Циркуляция каждого домена Γ остаётся постоянной. В контрольной точке каждого домена R вычисляется конвективная скорость жидкости V и диффузионная скорость данного домена относительно среды.

Результаты расчётов

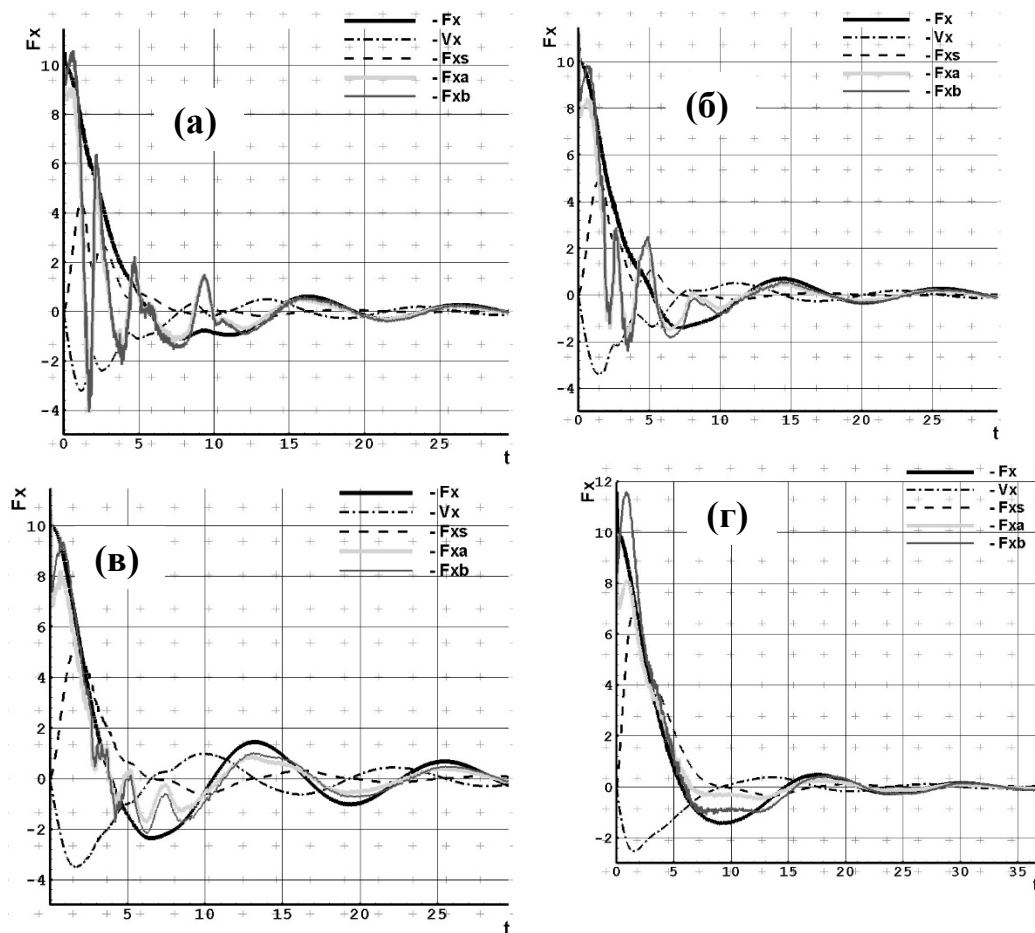


Рисунок 2 – Зависимости от времени скорости движения (V_x) и безразмерной силы сопротивления (F_x) для шара (а) и (г) и для сфероидов с удлинениями (б) и (в)

В результате расчётов при $Re=1200$ (рисунок 2(а-в)) и при $Re=120$ (рисунок 2(г)) получены зависимости от безразмерного времени скорости и гидродинамической силы. На рисунке 2 показано изменение мгновенных значений скорости движения (V_x) для шара и для вытянутых эллипсоидов вращения при их колебаниях на линейно упругой пружине с заданным значением коэффициента жёсткости пружины, равным 1, при заданной плотности тела, равной 0, и при заданном начальном отклонении, равном 10 безразмерных единиц. Представлены зависимости от времени безразмерной силы сопротивления (F_x), а также различных составляющих этой силы при её вычислении на основе упрощённых

формул (F_{xs} – стационарная составляющая, F_{xa} – сила с учётом присоединённой массы, F_{xb} – сила с учётом как присоединённой массы, так и наследственной силы Бассе). Из сравнения рис. 2 (а), (б), (в) видно, что при увеличении степени вытянутости сфероидов от 1,0 (случай шара) до 1,2 улучшается качество аппроксимации зависимости силы сопротивления от времени путём учёта влияния присоединённой массы и наследственной силы Бассе, так как с удлинением тела всё меньше влияют на сопротивление нестационарные вихри (рисунок 2(а) и 2(б)). Из рисунка 2(в) видно, что учёт силы Бассе (кривая F_{xb}) даёт небольшое уточнение по сравнению с формулой с учётом присоединённой массы (F_{xa}). Из рисунка 2(г) видно, что колебания шара при увеличении вязкости в 10 раз стабилизируются, и сила сопротивления хорошо аппроксимируется при учёте присоединённой массы и силы Бассе (кривая F_{xb}).

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.576.21.0079, проект RFMEFI57614X0079) и РФФИ (грант 14-08-01130).

Библиографический список

1. French A.P. 1971 Vibrations and Waves (New York: Norton & Company).
2. Greiner W. 2004 Classical Mechanics. Point Particles and Relativity (New York: Springer).
3. J. Mendoza-Arenas, E. L. D. Perico and F. Fajardo. Motion of a damped oscillating sphere as a function of the medium viscosity. European journal of physics. 31 (2010), pp. 129–141.
4. Дынникова, Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса / Г.Я. Дынникова // Доклады РАН. 2004. Т. 399. №1. С. 42-46.
5. Андронов, П.Р., Гувернюк, С.В., Дынникова, Г.Я. Вихревые методы расчёта нестационарных гидродинамических нагрузок / – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
6. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Нестационарное обтекание и нагрузки при движении сфероида в вязкой и несжимаемой среде. Сборник трудов XVI Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Изд-во СНЦ РАН. Самара. Том 1. С. 154-157.