УДК. 517.91

Степанцов И.С.

МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Модернизацию метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности предлагается использовать для моделирования движения центра масс ракетоносителей и космических аппаратов. Данная модернизация метода может использоваться также для моделирования движения центра масс тактических и стратегических ракет; в составе вычислительных комплексов цифровых систем управления динамическими объектами; для решения некоторых научно-технических задач.

Модернизация метода Рунге-Кутты проводится на теоретической базе методов Эйлера, Эйлера-Коши [1], [2], [3]. Интегральная сетка строится таким образом, что в методе каждый расчётный шаг интегрирования начинается в середине прошедшего расчётного шага, что позволяет считать производную в середине текущего расчётного шага интегрирования по реальным параметрам. Эта производная запоминается в рабочей памяти для формирования решения на очередном расчётном шаге. Решение на текущем расчётном шаге формируется с учётом информации прошедшего расчётного шага и информации текущего шага. Скорость решения на шаге почти в два раза быстрее метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности, но разработанный метод имеет на одну группу ячеек оперативной памяти больше, чем метод Рунге-Кутты. Метод двухточечный. В середине первого расчётного шага информация формируется одним из численных методов, например, классическим методом РК-4. В процессе решения задачи алгоритм сам формирует необходимую информацию для текущего и некоторую информацию для очередного расчётного шага. Алгоритмы контроля функции выхода и контроля длины шага интегрирования заимствуются из классического метода Рунге-Кутты и метода Адамса.

В вычислительных комплексах цифровых систем управления динамическими объектами используются, в основном, одноточечные численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Рунге-Кутты четвёртого порядка точности (РК-4) на интегральной сетке с заданным шагом h. Ниже (рисунок 1) предлагается интегральная сетка с расчётным шагом (H). Многократное обращение на шаге классического метода РК-4 к правым частям СДУ влечёт накопление ошибок округления, увеличение времени решения задачи. На предложенной интегральной сетке текущий расчётный шаг равен

$$H = 2h. \quad (1)$$

Середина расчётного шага:

$$H/2 = h. \quad (2)$$

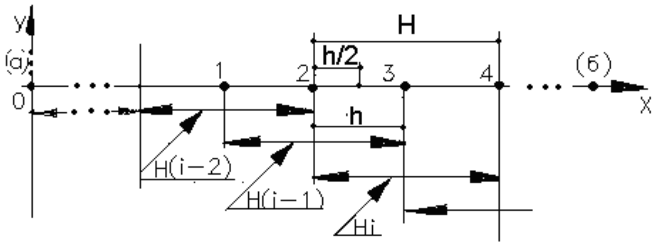

Рисунок 1 – Иллюстрация интегральной сетки с расчётным шагом H

Формирование решения на текущем расчётном шаге проводится с учётом имеющейся информации прошедшего расчётного шага и информации текущего расчётного шага. Производные K_2 и K_3 в середине шага РК-4 рассчитываются по приближенным исходным данным. Разработка предлагаемого метода аналогична методу РК-4. На расчётном шаге предлагаемого метода автоматически отпадает необходимость в поиске приближённого решения в точке H/2 в связи с наличием в ней фактического решения шага $H(i-1)$. В предлагаемом методе вместо расчёта двух производных в точке $Hi/2$ проводится расчёт одной производной, именуемая, как и в РК-4, также K_2. Производная K_2 используется для формирования решения на текущем расчётном шаге и запоминается в рабочей памяти алгоритма для формирования решения на очередном расчётном шаге, как K_1 расчётного шага $H(i+1)$.

В памяти метода перед формированием решения на расчётном шаге Hi имеются:

- решения СДУ шагов $H(i-1)$, $H(i-2)$;
- производная K_2 расчётного шага $H(i-1)$.

С учётом отмеченного выше, приращение решения на расчётном шаге (Hi) можно записать в виде:

$$\Delta Уi = H \bullet (A1 \bullet K_{1i} + A2 \bullet K_{2i} + A3 \bullet K_{3i}).$$

Весовые коэффициенты (A1, A2, A3) заимствуются из расчётной формулы метода РК – 4:

$$A1 = 1/6,\ A2 = 2/3,\ A3 = 1/6.$$

Весовой коэффициент A2 можно взять как сумму весовых коэффициентов при K_2 и K_3

$$A2 = 1/3 + 1/3 = 2/3.$$

Производные Ki на расчётном шаге Hi определяются в виде:

$$K1i = K2(i-1) \text{ (восстанавливается из массива рабочей памяти)},$$

$$K2i = F((X0i + H/2);\ У(i-1),$$

$$K3i = F((X0i + H);\ (У(i\text{-}2)\ H+\ Ki2 \bullet H)).$$

Новое расчётное значение производной К2 шага i запоминается в рабочей памяти алгоритма для формирования решения СДУ на очередном расчётном шаге H(i+1)

Решение системы однородных дифференциальных уравнений (СДУ) на расчётном шаге Hi можно записать в виде:

$$Уi = Уoi + \Delta Уi = Уoi + \sum_{f=1.}^{f=3,}(\Delta Уif) = Уoi + H \bullet (1/6K_{1i} + 2/3K_{2i} + 1/6K_{3i}), \tag{3}$$

Здесь:

Уoi - значение решения на конец расчётного шага H(i–2),

ΔУif - приращения решения на текущем расчётном шаге Hi.

Решение в виде (3) обеспечивает быстродействие в получении решения на заданном расчётном шаге. Решение (3) именуется, как КМС2.

Метод КМС2 требует пять групп ячеек оперативной памяти.

Первая и вторая группы памяти метода условно именуются как массив рабочих ячеек, третья, четвёртая и пятая группы памяти условно именуются как массив информационных ячеек.В процессе решения в памяти КМС2 формируется информация:

- в первой группе ячеек памяти формируется решение текущего шага Hi;
- во второй группе памяти формируются исходные данные для расчёта производных;
- в третьей группе памяти хранятся начальные условия текущего шага;
- в четвёртой группе памяти запоминаются производные точки H/2 текущего расчётного шага;
- в пятой группе хранится решение прошедшего шага.

В конце решения поставленной задачи во второй группе оперативной памяти находится результат решения задачи на заданное значение функции выхода.

На рисунке 2 приведён алгоритм метода КМС2 в мультипрограммном режиме работы вычислительной системы (ВС) цифровой системы управления. Выход из алгоритма КМС2 осуществляется в диспетчер вычислительной системы после каждого расчётного шага интегрирования (зацикливание через диспетчер ВС на пошаговую работу до момента выхода на заданное значение функции выхода).

При равенстве текущего и заданного значений функции выхода выход в обратившийся алгоритм осуществляется в диспетчер по команде «ВЫХОД 1» и в противном случае выход из алгоритма КМС2 осуществляется в диспетчер по команде «ВЫХОД 2».

Ниже приведён перечень информации, которую должен задавать обращающийся алгоритм (абонент):

- начальные условия - во второй группе оперативной памяти;
- признак первого обращения на заданном отрезке интегрирования;
- величину шага (h);
- значение функции выхода;
- точность выхода на заданное значение функции выхода.

При описании функций блоков алгоритма КМС2 предполагается, что исходные данные уже подготовлены.

Блоки 1, 1А и 2 – вход из диспетчера в алгоритм КМС2, расчёт и анализ функции выхода, анализ признака первого шага.

Блоки 3, 4, 5 – получение параметров с помощью метода РК-4 для формирование исходных данных методу КМС2, обнуление признака ПрК4.

Блок 6 – расчёт первого приращения функции на расчётном шаге (ΔУ). Производная К1i восстанавливается из массива рабочей памяти алгоритма, которая на прошедшем шаге именовалась как К2i и запоминалась в рабочей памяти алгоритма перед расчётом второго приращения функции на расчётном шаге.

Блоки (7 – 13) – блоки пересылки и формирования решения в первой группе.

Блок 14 – формирование исходных данных для (i+1) расчётного шага, пересылка информации из пятой группы в третью группу, пересылка решения для абонента во вторую группу.

Блоки 14 А, 15 – анализ текущего значения функции выхода и формирование порядка выхода в диспетчер вычислительной системы цифрового комплекса управления. По окончании работы (выход на заданное значение функции выхода) информация для потребителя находится во второй группе.

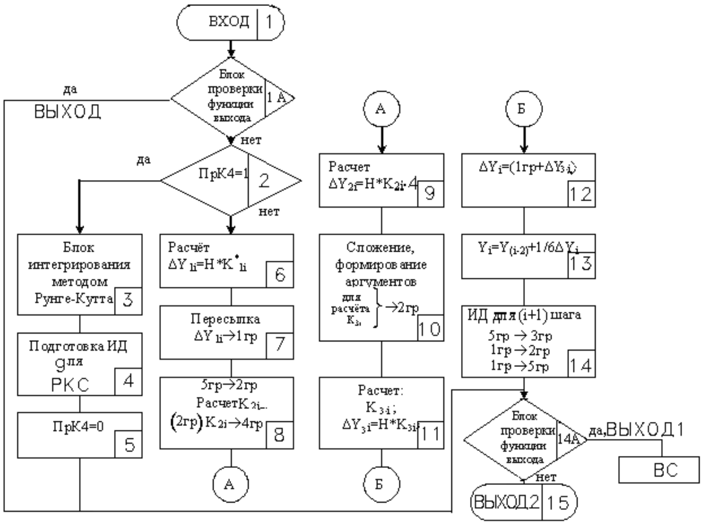

Рисунок 2 – Схема алгоритма РКС

Сравнительная оценка метода КМС 2

Пусть имеем дифференциальное уравнение, которое определено на отрезке [0,1], вида:

$$У' - 1 + У = 0.$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$У = 1 + Ex.$$

Начальные условия: Хо = 0; У(хо) = 2.

Оценка метода КМС2 приведена в таблице 1.

Отличие метода КМС2 относительно методов РК-4 и аналитического решения возникает, в основном, за счёт несоответствия весовых коэффициентов, которые приняты соответствующими классическому методу РК-4, округления в младших разрядах и числа обращений к правым частям.

Таблица1 – Результаты расчётов аналитическим методом, методами РК-4 и КМС2.

Метод решения	Шаг интерирования	Результаты решения в узловых точках		
		0,2	0,6	1,0
Аналитический	—	1.8187307	1.5488116	1.3678794
РК—4	h=0.0025	1.8187307	1.5488116	1.3678795
КМС2	H=0,005	1.8187307	1.5488114	1.3678791

Рекомендуется использовать метод КМС2 без уточнения весовых коэффициентов в вычислительных системах РН и КА при моделирования движения центра масс.

Библиографический список

1. Коллатц, Лотар. Численные методы решения дифференциальных уравнений. [Текст] / Л. Коллатц; пер. с нем. В.С. Рябенького, Л.А. Чудова. - М. :Изд-во иностр. лит., 1953. 459с.

2. Хайрер, Эрнст. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. [Текст] / Э. Хайрер, С.П. Нерсетт, Г. Ваннер – М: Мир, 1990.- 512с.

3. Демидович, Борис Павлович. Численные методы анализа: Приближение функций, дифференц. и интегральные уравнения: Учеб. пособие для втузов [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова - М.: Физматгиз, 1963.- 400с.