УДК 629.78

**Дон Ч., Заболотнов Ю.М., Ван Ч.**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С АТМОСФЕРНЫМ ЗОНДОМ

Рассматривается моделирование и анализ динамики свободного движения орбитальной тросовой системы с атмосферным зондом после ее развертывания в вертикальное положение. Исследуются колебания, которые возникают при совместном действии гравитационных, аэродинамических и упругих сил. Анализ проводится с помощью математической модели, в которой трос представляется как совокупность материальных точек. Оценивается влияние на маятниковые колебания параметров троса, аэродинамического зонда и других характеристик тросовой системы.

## Введение

Орбитальная тросовая система (ОТС) состоит из базового космического аппарата (КА), троса и атмосферного зонда. Атмосферный зонд представляет собой тело с увеличенным баллистическим параметром надувной или легкой складной конструкции. Ставится задача анализа маятниковых колебаний троса, влияющих на точность приведения ОТС в вертикальное положение. Для анализа производится построение дискретной многоточечной математической модели, учитывающей весомость троса, его жесткость, диссипативные силы внутри троса, аэродинамические и упругие силы. При задании упругих сил используется закон Гука с односторонней механической связью (трос не воспринимает сжимающих усилий). Рассматриваемая модель движения ОТС представляет собой модель с распределенными параметрами и позволяет исследовать колебания системы, возникающие за счет совместного влияния гравитационных, аэродинамических и упругих сил. Как было установлено в работе [1] при анализе более простых моделей движения, совместное влияние аэродинамических и упругих сил при достаточно большой длине троса приводит к возникновению так называемой «аэроградиентной» неустойчивости колебаний троса в плоскости орбиты центра масс системы.

## Дискретная математическая модель движения тросовой системы с распределенными параметрами

При построении уравнений движения ОТС используются следующие системы координат (рисунок 1): 1) геоцентрическая система координат $OXYZ$; 2) геоцентрическая орбитальная подвижная система координат $OX_OY_OZ_O$; 3) орбитальная подвижная система координат $Cx_O y_O z_O$. Плоскость $OXY$ геоцентрической системы координат $OXYZ$ совпадает с плоскостью орбиты, ось $OX$ направлена по линии узлов, ось $OZ$ перпендикулярна плоскости орбиты и направлена по вектору кинетического момента центра масс системы, $OY$ дополняет систему координат до правой. Ось $OX_O$ системы координат $OX_O Y_O Z_O$ направлена по линии $OC$, где $C$ – центр масс системы. Система координат $OX_O Y_O Z_O$ вращается относительно системы координат $OXYZ$ с угловой скоростью $\dot{u} = du/dt$, где $u$ - аргумент широты. Оси орбитальных подвижных систем координат $OX_O Y_O Z_O$ и $Cx_O y_O z_O$ параллельны.

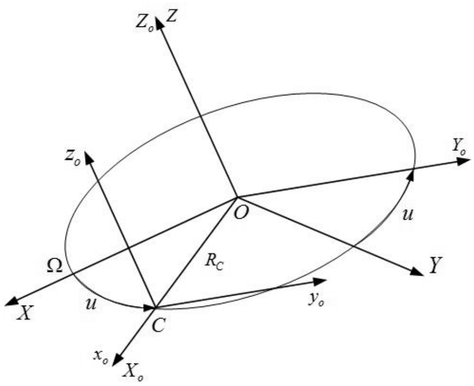


Рисунок 1 – Системы координат

Уравнения движения совокупности $N$ материальных точек с упругими связями записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_k, \; m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k, \qquad (1)$$

где $\vec{r}_k$, $\vec{V}_k$ и $m_k$ – радиус-вектор, скорость и масса $k$-ой материальной точки; $\vec{F}_k$ – равнодействующая сил, действующих на материальные точки, $k = 1, 2, ...N$.

В уравнениях движения (1) в качестве концевых тел рассматриваются материальные точки. Для дискретной математической модели (1) должны быть выполнены следующие условия: $M = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k$, $L = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \Delta L_k$, где $M$ и $L$ – масса и длина троса, $\Delta L_k$ - расстояние между $k$-ой и $k+1$-ой точками.

Учитывая основные силы, действующие на ОТС, запишем

$$\vec{F}_k = \vec{G}_k + \vec{R}_k + \vec{T}_k - \vec{T}_{k+1} + \vec{D}_k - \vec{D}_{k+1}, \qquad (2)$$

где $\vec{G}_k$ – гравитационная сила, $\vec{R}_k$ – аэродинамическая сила, $\vec{T}_k$ и $\vec{D}_k$ – сила натяжения троса и диссипативная сила, действующие между $k$-ой и $k+1$-ой точками и приложенные к $k$-ой точке. При определении силы $\vec{G}_k$ используется центральное ньютоновское гравитационное поле.

При диффузном отражении аэродинамическая сила $\vec{R}_k$ имеет лишь составляющую в направлении скорости набегающего потока (силу лобового сопротивления), которая определяется следующим образом [1]

$$\vec{R}_k = -\frac{1}{2} C_R \rho_a S_k V_{ck} \vec{V}_{ck} \left|\sin(\alpha_k)\right|, \quad (3)$$

где $\vec{V}_{ck}$ – скорость центра симметрии $k$-ого цилиндра относительно атмосферы, $C_R \approx 2,2$ – коэффициент силы аэродинамического сопротивления цилиндра, $S_k = d_t \Delta L_k$ – характерная площадь элементарного цилиндра, $d_t$ – диаметр троса, $\rho_a$ – плотность атмосферы, $\alpha_k$ – угол атаки цилиндра. Скорость центра симметрии элементарного цилиндра и его угол атаки определяются по формулам

$$\vec{V}_{ck} = \frac{\vec{V}_{r,k} + \vec{V}_{r,k+1}}{2}, \quad \cos(\alpha_k) = \frac{\Delta\vec{L}_k \cdot \vec{V}_{ck}}{\Delta L_k \, V_{ck}}, \quad (4)$$

где $\vec{V}_{r,k} = \vec{V}_k - \vec{V}_{ak}$ – скорость относительно атмосферы $k$-ой точки, $\vec{V}_{ak} = \vec{\Omega}_a \times \vec{r}_k$ – скорость атмосферы в $k$-ой точке, $\Delta\vec{L}_k = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k$, $\vec{\Omega}_a$ – вектор угловой скорости вращения атмосферы. Обычно принимают $\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_З$, где $\vec{\Omega}_З$ – вектор угловой скорости вращения Земли.

Для определения силы упругости троса используется закон Гука. Сила, действующая на точку $k$ со стороны точки $k+1$, задается в виде

$$\vec{T}_k = c\, a_k (\gamma_k - 1) \frac{\Delta\vec{L}_k}{\Delta L_k}, \quad (5)$$

где $\gamma_k = \dfrac{\Delta L_k}{\Delta L_{0k}}$, $\Delta L_{0k}$ – недеформированная длина элемента, $c = E\,A$ – коэффициент жесткости троса, $a_k$ – безразмерный коэффициент, равный нулю или единице. Коэффициент $a_k = 0$ для $N$-ой концевой точки и при выполнении условия: $\Delta L_k < \Delta L_{0k}$, в остальных случаях $a_k = 1$.

Диссипативная сила задается в виде

$$D_k = K_D \frac{d\gamma_k}{dt} = K_D \frac{1}{\Delta L_{0k}} \frac{d(\Delta L_k)}{dt}, \quad (6)$$

где коэффициент $K_D = \dfrac{c\eta}{\omega_k}$, где $\eta$ – коэффициент потерь в материале, $\omega_k$ - частота колебаний в $k$-ом элементе.

**Моделирование и анализ маятниковых колебаний распределенной ОТС**

После окончания управляемого развертывания ОТС с атмосферным зондом трос находится вблизи вертикали и система начинает совершать свободные колебания под действием гравитационных, аэродинамических и упругих сил. Причем, при достаточно большой длине троса, амплитуда этих колебаний со временем не уменьшается и остается приблизительно постоянной. Так, например, если высота начальной круговой орбиты центра масс системы $H = 250\,км$, длина троса $L = 28\,км$, коэффициенты сил аэродинамического сопротивления $C_{1,2} = 2,4$, массы КА и зонда $m_1 = 100\,кг$ и $m_2 = 20\,кг$, баллистические коэффициенты КА и зонда $\sigma_1 = 4,712 \cdot 10^{-3}\,м^2/кг$ и $\sigma_2 = 9,4 \cdot 10^{-2}\,м^2/кг$, линейная плотность троса $0,2\,кг/км$, жесткость троса $c = 7069\,Н$, диаметр троса $0,6\,мм$, то амплитуда колебаний зонда составляет около $2\,км$, что иллюстрируется на рисунке 2а, где точка $(0,0)$ - центр масс системы, нижняя и верхняя кривые – траектории зонда и КА относительно местной вертикали ($y_o = 0$). Для рассматриваемых данных форма троса близка к прямой (рисунок 2б).

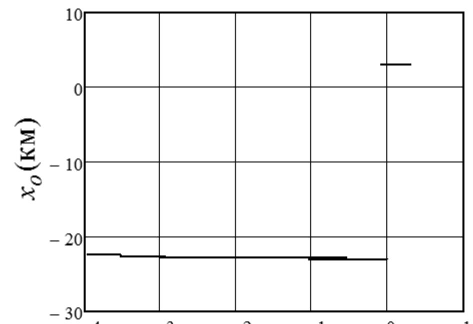


Рисунок 2а – Траектория КА и зонда относительно центра масс системы

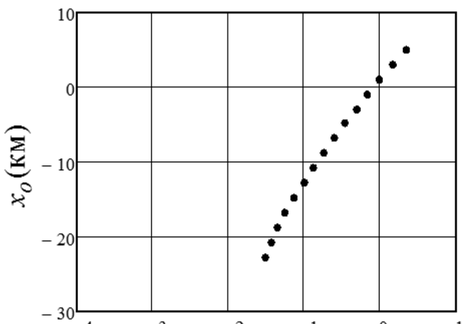


Рисунок 2б – Форма троса

На основании проведенного численного моделирования колебаний ОТС с атмосферным зондом можно сделать следующие выводы:

1. Амплитуда маятниковых колебаний слабо зависит от жесткости троса ($c$) и диссипативных свойств материала троса (коэффициент $K_D$). При уменьшении жесткости

и увеличении коэффициента диссипации троса на порядок численные результаты слабо изменяются.

2. При уменьшении длины троса амплитуда колебаний зонда относительно вертикали уменьшается. Так, например, при уменьшении в рассматриваемом примере длины троса в 2 раза ($14\,км$) амплитуда колебаний уменьшается в 5 раз ($0,4\,км$).

3. При увеличении высоты орбиты амплитуда маятниковых колебаний троса уменьшается. При увеличении начальной высоты круговой орбиты с $250\,км$ до $300\,км$ амплитуда колебаний уменьшается в 8 раз ($0,25\,км$)

4. При увеличении баллистического коэффициента зонда амплитуда колебаний ОТС увеличивается, причем существует предельное значение баллистического коэффициента, когда система теряет устойчивость и трос деформируется. Для данного примера оно равно приблизительно $\sigma_2 = 0,34 м^2 / кг$.

5. Маятниковые колебания ОТС очень чувствительные к изменению диаметра троса. Так, если увеличить диаметр троса с $0,6\,мм$ до $0,7\,мм$, то амплитуда колебаний зонда в рассматриваемом случае увеличиться в 4,25 раза, то есть до $8,5\,км$.

**Библиографический список**


1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Zabolotnov Yu. Introduction to Dynamics and Control in Space Tether System. Beijing: Science Press, 2013. 40 pp. (in Chinese)