

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ПОТОКА ВОЗДУХА

Течение жидкой пленки под действием внешнего потока газа часто встречается в технических приложениях. Например, пленочное течение при газификации криогенного окислителя в топливной системе ракеты-носителя, течение дождевой пленки на поверхности летательного аппарата. Пленка уменьшает сопротивление трения и может быть использована как элемент управления пограничным слоем. Рассмотрим установившееся течение плоской пленки переменной толщины под действием силы тяжести и внешнего потока воздуха. Пленка жидкости на поверхности пластины формируется выдавливанием жидкости через пористую поверхность (рис. 1).

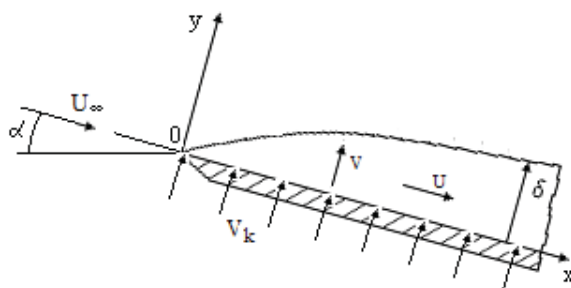


Рисунок 1 – Схема течения пленки: u, v – компоненты вектора скорости, V_k – скорость вдува массы, U_∞ – скорость набегающего потока

Математическая постановка задачи включает в себя уравнения движения в приближении пограничного слоя и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия задачи будут иметь следующий вид:

$$y = 0, \quad u = 0, \quad v = v_k, \quad (3)$$

$$y = \delta, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau, \quad (4)$$

где p – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, τ – трение, μ – динамическая вязкость, δ – переменная толщина пленки, v_k – скорость вдува массы в пленку жидкости.

Дополним уравнения движения кинематическим условием на поверхности пленки

$$y = \delta, \quad v(\delta) = \frac{\partial \delta}{\partial x} u(\delta). \quad (5)$$

Поскольку толщина пленки достаточно мала, то силы вязкости будут играть определяющую роль в формировании течения. В этом случае можно принять для продольной скорости квадратичный закон распределения в поперечном сечении пленки и воспользоваться выражением для скорости пленки постоянной толщины, стекающей по плоской вертикальной стенке с учетом трения на поверхности

$$u(y) = \frac{g \sin \alpha \rho_3 \delta^2}{\mu_3} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{y\tau}{\mu_3}. \quad (6)$$

Средняя скорость течения

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u dy = \frac{g \sin \alpha \rho_3 \delta^2}{3\mu_3} + \frac{\delta\tau}{2\mu_3}. \quad (7)$$

С учетом (7) распределение (6) можно переписать в виде

$$u(y) = 3 \langle u \rangle \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{\tau}{2\mu_3} \left(\frac{3y^2}{2\delta} - y \right), \quad (8)$$

Выполним осреднение слагаемых, входящих в уравнение (1), по толщине пленки. Для этого проинтегрируем слагаемые по y от 0 до δ , используя правило Лейбница, и будем иметь

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\tau}{20\mu_3} \langle u \rangle \delta^2 + \frac{\tau^2}{120\mu_3^2} \delta^3 \right) - u^2(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy = (uv)_0^\delta = u(\delta)v(\delta). \quad (10)$$

После осреднения слагаемых левая часть уравнения (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \langle u \rangle^2 \delta + \frac{\tau}{20\mu_3} \langle u \rangle \delta^2 + \frac{\tau^2}{120\mu_3^2} \delta^3 \right) - u^2(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x} + u(\delta)v(\delta). \quad (11)$$

Продолжим интегрирование правой части уравнения (1)

$$\int_0^\delta g \sin \alpha dy = \delta g \sin \alpha, \quad v \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^\delta = \frac{3\tau}{2\rho} - \frac{3v \langle u \rangle}{\delta}. \quad (12)$$

Уравнение движения, после осреднения слагаемых, примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \delta \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \left(12 \langle u \rangle + \frac{1}{4\mu_3} \tau \delta \right) - \left(\frac{21}{20} \langle u \rangle^2 + \frac{13}{20\mu_3} \tau \delta \langle u \rangle + \frac{3}{80\mu_3^2} \tau^2 \delta^2 \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} + \\ & + u(\delta)v(\delta) = g \delta \sin \alpha + \frac{3\tau}{2\rho_3} - \frac{3v_3 \langle u \rangle}{\delta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем уравнение сохранения массы, для чего проинтегрируем уравнение неразрывности (2) по y от 0 до δ_0

$$v(\delta) = v_k - \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \delta + \frac{\langle u \rangle}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\tau \delta}{4\mu} \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (14)$$

Подставим (14) в (13), и тогда

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \left(\frac{9}{10} \langle u \rangle - \frac{3}{10\mu} \tau \delta \right) - \left(\frac{3}{10} \langle u \rangle^2 - \frac{1}{40\mu^2} \tau^2 \delta^2 + \frac{3}{20\mu} \tau \delta \langle u \rangle \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} + \\ + \left(\frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta \tau}{4\mu} \right) v_k = \delta g \sin \alpha + \frac{3}{2\rho} \tau - 3\nu \frac{u}{\delta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользуемся кинематическим условием (5) на поверхности пленки

$$y = \delta, \quad v(\delta) = u(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x} = \left(\frac{3 \langle u \rangle}{2} + \frac{\delta \tau}{4\mu} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (16)$$

Объединяя (14) и (16), получим закон сохранения массы

$$v_k = \langle u \rangle \frac{\partial \delta}{\partial x} + \delta \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (17)$$

Выполним безразмерные преобразования для уравнения движения (15) и уравнения (17) с помощью переменных

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta^*}, \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \bar{u} = \frac{\langle u \rangle}{u^*}, \bar{v} = \frac{v}{v_k}, \text{Re} = \frac{u^* \delta^*}{\nu}, \bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho u^{*2}}, \quad (18)$$

где L – длина пластины, δ^* и u^* – соответственно масштабы для толщины пленки и продольной скорости, которые подлежат определению.

Для определения масштабов воспользуемся задачей для установившегося течения пленки. В приближении теории пограничного слоя запишем уравнение движения и неразрывности

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Введем безразмерные переменные для пленки

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta^*}, \bar{u} = \frac{u}{u^*}, \bar{v} = \frac{v}{v_k}. \quad (20)$$

Подставим безразмерные переменные (18) в уравнение неразрывности, и тогда получим

$$\frac{u^* \partial \bar{u}}{L \partial \bar{x}} + \frac{v_k \partial \bar{u}}{\delta^* \partial \bar{y}} = 0. \quad (21)$$

Чтобы сохранить оба слагаемых в уравнении неразрывности, потребуем равенства масштабов и получим связь

$$u^* = \frac{v_k L}{\delta^*}. \quad (22)$$

С учетом (22) уравнение движения примет вид

$$\frac{u^{*2}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = g + \frac{v u^*}{\delta^{*2}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (23)$$

При течении пленки сила тяжести уравновешивается вязким трением, и тогда найдем

$$g = \frac{v u^*}{\delta^{*2}}. \quad (24)$$

С учетом (22) будем иметь масштабы величин

$$\delta^* = \sqrt[3]{\frac{v_k L v}{g}}, \quad u^* = \sqrt[3]{\frac{v_k^2 L^2 g}{v}}. \quad (25)$$

Подставим безразмерные переменные (18) в уравнения (15) и (17). Черта над безразмерными переменными в дальнейшем опущена

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{9}{10} u - \frac{3 \text{Re}}{10} \tau \delta \right) - \varepsilon \left(\frac{3}{10} u^2 - \frac{\text{Re}^2}{40} \tau^2 \delta^2 + \frac{3 \text{Re}}{20} \tau \delta u \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{3u}{2} + \frac{\text{Re} \delta \tau}{4} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\delta \sin \alpha - \frac{3u}{\delta} \right) + \frac{3\tau}{2}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\delta^*}{L} \ll 1. \end{aligned} \quad (26)$$

$$1 = u \frac{\partial \delta}{\partial x} + \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\delta^*}{L} \ll 1. \quad (27)$$

Воспользуемся наличием в уравнении (26) малого параметра и представим решение задачи в виде ряда

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad \delta(x) = \delta_0(x) + \varepsilon \delta_1(x) + \dots. \quad (28)$$

Нулевое приближение задачи включает в себя систему уравнений, приведённую к стандартному виду:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{4\delta_0 \sin \alpha + 3\tau \text{Re}}{6\delta_0^2 \sin \alpha + 9\tau \delta_0 \text{Re}}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial x} = \frac{6}{6\delta_0^2 \sin \alpha + 9\tau \delta_0 \text{Re}}. \quad (30)$$

Решение задачи получено в пакете прикладных программ Wolfram Mathematica. Результаты представлены на графиках (рис. 2, рис. 3) для $\alpha = \pi/6$ и $Re = 10$, $1 - \tau = 0,025$, $2 - \tau = 0,07$.

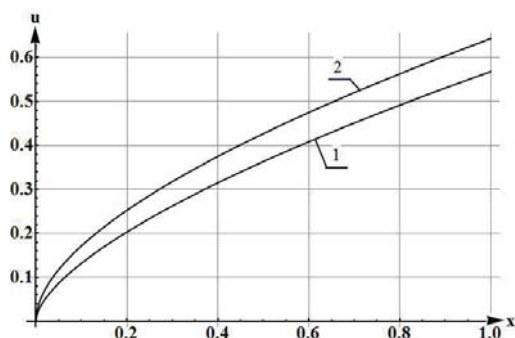


Рисунок 2 – Продольная скорость

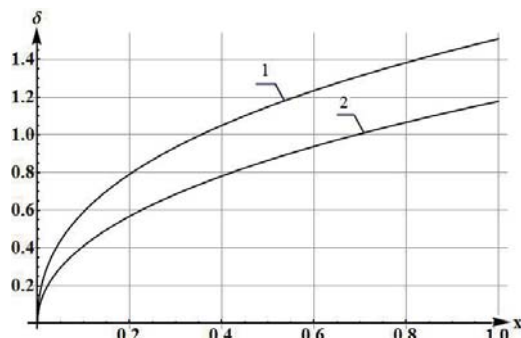


Рисунок 3 – Толщина пленки

Как и следовало ожидать, спутный поток воздуха увеличивает среднюю продольную скорость и уменьшает толщину пленки. На графиках (рис. 4, рис. 5) показано изменение продольной скорости и толщины пленки при $\tau = 0,025$ и $Re = 10$ для разных углов атаки: $1 - \alpha = \pi/6$, $2 - \alpha = \pi/4$.

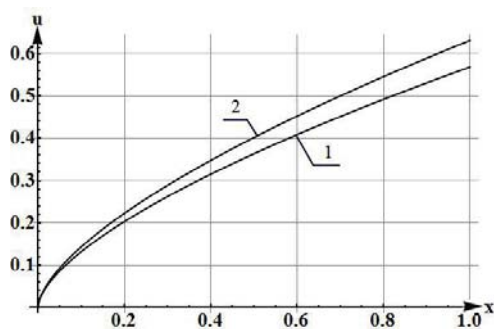


Рисунок 4 – Продольная скорость

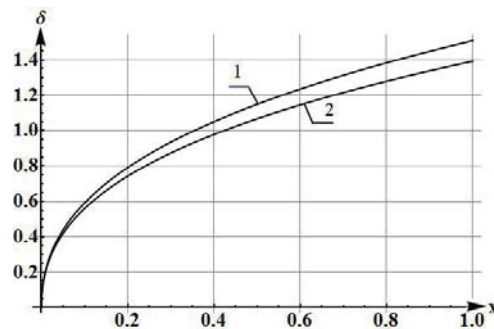


Рисунок 5 – Толщина пленки

Из графиков видно, что увеличение угла атаки приводит к увеличению продольной скорости и уменьшению толщины пленки.

Отметим, что для $V_k = 10^{-5} \text{ м/с}$ величина малого параметра $\varepsilon \approx 10^{-4}$ и второе слагаемое ряда (28) практически не оказывает влияния на общее решение. Полученные результаты совпадают с известным решением [1]. Таким образом, предложенная методика может быть использована при моделировании плоского течения пленки под действием силы тяжести и внешнего потока воздуха.

Библиографический список

- 1 Ключев Н.И. Течение вязкой жидкости в тонком слое на поверхности плоской пластины / Н.И.Ключев, В.И.Никитин, О.Г.Лагно, Е.А.Ендуткина // Научное обозрение. М., 2013, №9. С.289-292.