

# **Управление движением и навигация летательных аппаратов**

УДК 629.78

**Афанасьев В.А., Балоев А.А., Дегтярев Г.Л., Мещанов А.С.**

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛЕТА В АТМОСФЕРЕ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

### **Введение**

Известно, что управление по обратной связи предполагает наличие программной траектории, параметры которой используются для образования рассогласований между действительными и программными параметрами движения. Из полученных рассогласований с соответствующими коэффициентами усиления формируется сумма, пропорционально которой вырабатывается сигнал на соответствующие рулевые органы. Как правило, для построения программных траекторий используется численное интегрирование дифференциальных уравнений и последовательное приближение к желаемому решению. В общем случае из-за сложных движений беспилотных летательных аппаратов (БЛА) такой подход отнимает много времени и не всегда вычислительный процесс оказывается сходящимся, что затрудняет проведение коррекций программных траекторий в полёте. Гораздо удобнее получать аналитические решения дифференциальных уравнений движения, для чего вводятся упрощающие допущения. Но для уравнений пространственных движений даже с общепринятыми допущениями и упрощениями аналитические решения до сих пор не получены.

В данной работе вводится понятие координированного разворота, при котором подъёмная сила прикладывается перпендикулярно вектору скорости и параллельно поверхности расположения точечной цели. Тогда в предположении большого аэродинамического качества и малого баллистического параметра продолжительность координированного разворота оказывается достаточно малой, что позволяет считать угол наклона траектории постоянным. Последнее обстоятельство позволяет получить аналитические решения уравнений координированного разворота, выраженные не только через элементарные функции, но также содержащие интегральные функции синуса и косинуса, которые достаточно хорошо изучены и задаются таблицами. Никаких затруднений для формирования программных пространственных траекторий они не представляют, поскольку все элементарные функции в бортовом компьютере также представлены таблицами.

## 1. Математическая модель пространственного движения

Введём прямоугольную систему координат  $ODhz$ , начало которой  $O$  расположено в точке на поверхности, являющейся проекцией точки начала управления БЛА. Ось  $OD$  расположена в плоскости, касательной к поверхности. Ось  $Oh$  направлена по вертикали к касательной плоскости, ось  $Oz$  дополняет тройку осей до правой системы координат (рис. 1). Предполагается, что точечная цель расположена справа от оси  $OD$ , для попадания в которую БЛА совершает правый разворот такой, чтобы завести вектор скорости в вертикальную плоскость, проходящую через цель.

Пространственное движение БЛА описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma\rho V^2 - g \sin\theta, & \dot{\theta} &= K\sigma\rho V \cos\gamma + (V/r - g/V)\cos\theta, & \dot{\psi} &= -K\sigma\rho \sin\gamma(V/\cos\theta), \\ \dot{h} &= V \sin\theta, & \dot{D} &= V \cos\theta \cos\psi, & \dot{z} &= -V \cos\theta \sin\psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V$  – скорость;  $\theta$  – угол наклона траектории;  $\psi$  – угол пути;  $h$  – высота;  $D$  – продольное горизонтальное расстояние полёта;  $z$  – боковое отклонение;  $\rho$  – плотность атмосферы;  $g$  – ускорение силы земного притяжения;  $r = R + h$ ,  $r$  – длина радиус-вектора, проведённого из центра Земли до центра масс БЛА,  $R$  – радиус сферической Земли;  $\gamma$  – угол скоростного крена;  $K = C_y/C_x$  – аэродинамическое качество;  $C_x$  – коэффициент силы лобового сопротивления;  $C_y = C_y(\alpha)$  – коэффициент подъёмной силы;  $\alpha$  – угол атаки;  $\sigma = C_x S/(2m)$  – баллистический параметр;  $m$  – масса;  $S$  – площадь миделевого сечения;  $\rho$  – плотность атмосферы, в экспоненциальной модели которой справедливо дифференциальное соотношение:

$$\rho dh = -h_e d\rho, \quad (2)$$

где  $h_e$  – константа, входящая в экспоненциальную модель плотности атмосферы.

## 2. Определение координат и времени координированного разворота

Система (1), (2) решается с начальными условиями:

$$t = t_0; V(t_0) = V_0; \theta(t_0) = \theta_0; \psi(t_0) = \psi_0; h(t_0) = h_0; D(t_0) = D_0; z(t_0) = z_0, \quad (3)$$

соответствующими параметрам движения в начале управляемого движения БЛА в атмосфере.

На рис.1 показан пространственный разворот вправо, начинающийся на высоте  $h_0$  и заканчивающийся в точке «1», в которой величина угла пути составляет:

$$\psi_1 = -\arctg((D_k - D_1)/(z_k - z_1)). \quad (4)$$

Угол пути (4) означает, что вектор скорости расположен в вертикальной плоскости, проходящей через точку « $k$ ». Попадание БЛА в конечную точку « $k$ » обеспечивается регулированием величины аэродинамического качества  $K$  в вертикальной плоскости, которое проводится по различным законам управления в зависимости от решаемой терминальной задачи.

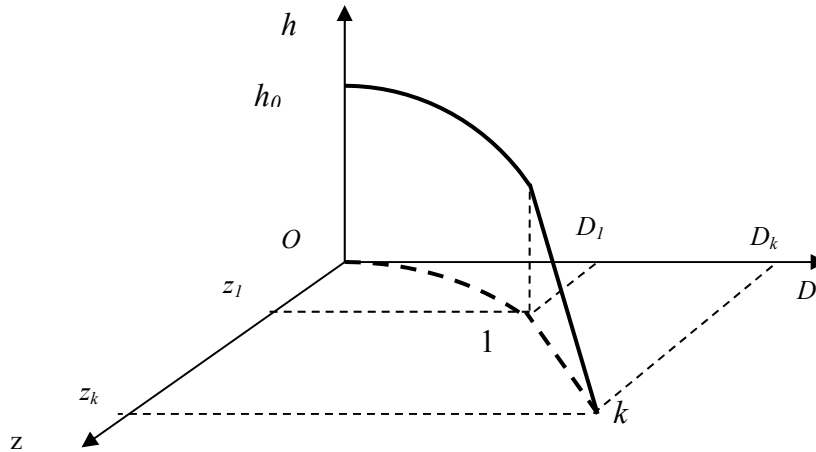


Рис.1. Кинематическая схема пространственного разворота

Третье уравнение системы (1) с учётом четвёртого и соотношения (2) запишется как:

$$d\psi = K\sigma h_e \sin\gamma (d\rho / (\sin\theta \cos\theta)). \quad (5)$$

Воспользуемся соотношением, полученным для угла наклона траектории в плоском продольном движении [1]:

$$\cos\theta = \cos\theta_0 + K\sigma h_e (\rho - \rho_0) \cos\gamma, \quad (6)$$

где  $\cos\gamma = \text{const}$ . При кабрировании угол скоростного крена задаётся в полуинтервалах  $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\gamma \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ , из которых первый обеспечивает получение отрицательных значений угла пути, а второй – положительных значений. При пикировании угол скоростного крена задаётся в интервале  $\gamma \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ , причём значения угла крена на полуинтервале  $\gamma \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  приводят к отрицательным значениям угла курса, а на полуинтервале  $\gamma \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  – к положительным значениям.

Дифференцирование функции (6) даёт:

$$d\rho = -(\sin\theta d\theta) / (K\sigma h_e \cos\gamma). \quad (7)$$

Подстановка (7) в уравнение (5) даёт:

$$d\psi = -\operatorname{tg} \gamma (d\theta / \cos \theta). \quad (8)$$

Интегрируя (8) в пределах от  $\psi_0$  до  $\psi$  и от  $\theta_0$  до  $\theta$ , приходим к выражению:

$$\psi = \psi_0 - \operatorname{tg} \gamma \ln \left| \operatorname{tg} (\pi/4 + \theta/2) \operatorname{tg}^{-1} (\pi/4 + \theta_0/2) \right|. \quad (9)$$

В конечный момент получаем выражение для угла пути:

$$\psi_1 = \psi_0 - \operatorname{tg} \gamma \ln \left| \operatorname{tg} (\pi/4 + \theta_1/2) \operatorname{tg}^{-1} (\pi/4 + \theta_0/2) \right|. \quad (10)$$

С учётом выражения (6) при  $\rho = \rho_1$  последняя формула принимает вид:

$$\psi_1 = \psi_0 - \operatorname{tg} \gamma \ln \left| \operatorname{tg} \left\{ \pi/4 + [\cos \theta_0 + K \sigma h_e (\rho_1 - \rho_0) \cos \gamma] / 2 \right\} \operatorname{tg}^{-1} (\pi/4 + \theta_0/2) \right|. \quad (11)$$

Формула (11) при известных значениях аэродинамического качества  $K$  и плотности  $\rho_1$  (то же самое, при заданной высоте) позволяет вычислять угол пути  $\psi_1$  при различных значениях угла скоростного крена  $\gamma$ .

Формула (11) показывает, что стремление сформировать траекторию пикирования с конечным углом  $\theta_1 = -\pi/2$  или кабрирования с конечным углом  $\theta_1 = \pi/2$  приводит к бесконечному углу пути  $\psi_1 \rightarrow \infty$ , в то время как для траектории кабрирования или пикирования с углом подхода  $\theta_1 = 0$  формула (11) сохраняет физический смысл значений конечного угла пути:

$$\psi_1 = \psi_0 - \operatorname{tg} \gamma \ln \left| \operatorname{tg}^{-1} (\pi/4 + \theta_0/2) \right|. \quad (12)$$

Ограничим разворот вектора скорости углом пути  $\psi_1 = -\pi/2$  при повороте вправо и углом пути  $\psi_1 = \pi/2$  при повороте влево. Тогда из выражения (11) получим величину угла скоростного крена для получения одной из таких крайних траекторий:

$$\operatorname{tg} \gamma = (\psi_0 - \psi_1) \ln^{-1} \left| \operatorname{tg}^{-1} (\pi/4 + \theta_0/2) \right|. \quad (13)$$

Преобразуем шестое уравнение системы (1) с помощью четвёртого уравнения и соотношения (2) к виду:

$$dz = -\operatorname{ctg} \theta \sin \psi dh = h_e \operatorname{ctg} \theta \sin \psi (d\rho / \rho) \quad (14)$$

Получаем квадратуру для боковой координаты конечной точки траектории:

$$z_1 = z_0 + h_e \int_{\rho_0}^{\rho_1} \operatorname{ctg} \theta \sin \psi (d\rho / \rho) \quad (15)$$

и квадратуру для продольной координаты конечной точки траектории:

$$D_1 = D_0 - h_e \int_{\rho_0}^{\rho_1} \operatorname{ctg} \theta \cos \psi (d\rho / \rho). \quad (16)$$

Вычисление интегралов (15), (16) приближённым методом позволяет получить оценки по координатам положения проведённого разворота, в котором БЛА сохраняет угол скоростного крена в течение всего полёта.

Получена математическая модель координированного разворота

$$\dot{V} = -\sigma \rho V^2 - g \sin \theta_0, \quad \dot{\psi} = -K \sigma \rho \sin \gamma (V / \cos \theta_0), \quad \dot{h} = V \sin \theta_0, \quad \dot{z} = -V \cos \theta_0 \sin \psi, \quad \dot{D} = V \cos \theta_0 \cos \psi, \quad (17)$$

где угол скоростного крена принимает одно из двух постоянных значений:  $\gamma = \pm \pi / 2$  на промежутке  $t \in [t_0; t_1]$ . Определены боковая координата, принимающая в точке 1 с учётом выражения для интегральных синуса и косинуса вид

$$z_1 = z_0 + h_e \operatorname{ctg} \theta_0 \{ \sin x_0 [ \operatorname{Ci}(x_1) - \operatorname{Ci}(x_0) ] - \cos x_0 [ \operatorname{Si}(x_1) - \operatorname{Si}(x_0) ] \}, \quad (18)$$

$$\text{ГДЕ } \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Si}(x) = x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} \mp \dots; \quad \operatorname{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx = C + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos x}{x} dx =$$

$$= C + \ln x - \frac{1}{2!} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{4} \mp \dots; \quad x = ((2K \sigma h_e \sin \gamma) / V) \rho, \quad x_0 = \psi_0 + ((2K \sigma h_e \sin \gamma) / \sin 2|\theta_0|) \rho_0,$$

$x_1 = 2K \sigma h_e \sin \gamma \sin 2|\theta_0| \rho_1$ ,  $C \approx 0,577216$  – постоянная Эйлера – Маскерони [2], и дальность

$$D_1 = D_0 - h_e \operatorname{ctg} \theta_0 \{ \cos x_0 [ \operatorname{Ci}(x_1) - \operatorname{Ci}(x_0) ] + \sin x_0 [ \operatorname{Si}(x_1) - \operatorname{Si}(x_0) ] \}; \quad (19)$$

определены скорость, высота и продолжительность координированного разворота

$$V_1 = V_0 \exp((\psi_1 - \psi_0) K \sin \gamma \cos \theta_0), \quad h_1 = h_0 - h_e \ln [ 1 + \sin 2\theta_0 (\psi_1 - \psi_0) / (2K \sigma h_e \rho_0 \sin \gamma) ], \quad (20)$$

$$t_1 = t_0 + b \left[ \ln |q_1 / q_0| + \sum_{k=1}^{\infty} a^k (q_1^k - q_0^k) / k! k \right] \text{ при } a > 0, \quad t_1 = t_0 + b \left[ \ln |q_1 / q_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |a|^k (q_1^k - q_0^k) / k! k \right] \text{ при } a < 0, \quad (21)$$

где  $a = -\cos \theta_0 / (K \sin 2\theta_0 \sin \gamma)$ ,  $q_0 = 2K \sigma h_e \sin \gamma \rho_0$ ;  $q_1 = 2K \sigma h_e \sin \gamma \rho_0 + \sin 2\theta_0 (\psi_1 - \psi_0)$ .

Решение дифференциальных уравнений на втором промежутке «1- $k$ » двухсоставной траектории «0-1, 1- $k$ » находится исходя из заданной терминальной задачи. Построение программной пространственной траектории заканчивается определением параметров движения в точках «1» и « $k$ », включая моменты времени  $t_1$  и  $t_k$ , которые являются управляющими параметрами закона программного управления и однозначно его определяют. При этом значение угла  $\psi_1$  в общем случае может отличаться от значения, вычисляемого по формуле (4). В полёте при формировании программной траектории вместо моментов времени  $t_1$  и  $t_k$  используется любой из параметров движения в этих точках. В частности, при гашении на первом участке «1- $k$ » скорости до 100 м/с при высоте в пределах 500 ÷ 1000 м и при наличии у БЛА, например, конической формы, помимо

рулевых ракетных двигателей также и ракетных двигателей в кормовой части с необходимым запасом топлива, может решаться терминальная задача его мягкого вертикального приземления.

### **Заключение**

Представлены результаты исследований пространственных разворотов БЛА при наведении в точечную цель, расположенную внизу на поверхности или вверху в атмосфере. Введено понятие координированного разворота, при котором подъёмная сила приложена перпендикулярно вектору скорости и параллельно поверхности. Его применение позволяет получить аналитические решения для дифференциальных уравнений разворота, выраженные через интегральные функции синуса и косинуса, и существенно упростить формирование программных траекторий пространственного разворота при решении различных терминальных задач наведения БЛА в точечную цель.

Погрешности, вносимые заменой более строгих пространственных разворотов, формируемых громоздкими приближёнными численными методами, координированными разворотами, при определённых допущениях (большое аэродинамическое качество, малый баллистический параметр, короткая продолжительность движения), в реальных условиях полёта имеют порядок внешних и параметрических возмущений и вместе с ними отрабатываются системой стабилизации. Цена эффективности метода конструирования закона программного управления пространственным движением при использовании координированного разворота определяется стоимостью дополнительного расхода топлива рулевыми органами и несущественным ухудшением качества переходных процессов в стабилизируемых угловых движениях. Результаты могут быть применены в высокоточном решении терминальных задач мягкого вертикального приземления БЛА и многоразовых спускаемых космических ЛА с различными конструктивно-компоновочными схемами.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-48-02040.

### **Библиографический список**

1. Афанасьев В.А., Дегтярёв Г.Л., Мещанов А.С. Управление возвращаемым космическим аппаратом на переходных траекториях в атмосфере // Известия вузов, Авиационная техника, № 2, 2015 г. С.16-22.
2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 832 с.