

Сомов Е.И., Бутырин С.А., Макаров В.П., Суханов В.М.

**ДИАГНОСТИКА И РЕКОНФИГУРАЦИЯ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ  
ГИРОДИНАМИ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ ЖИВУЧЕСТИ СИСТЕМЫ  
ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ЗЕМЛЕОБЗОРА**

**Введение.** В прецессионной теории силовых гироскопов при простейшем моделировании движения космического аппарата (КА) как абсолютно твердого тела нетрудно представить принципиальные проблемы, возникающие в силовом гироскопическом комплексе (СГК) на основе избыточного числа  $m \geq 4$  гироскопов (ГД), которые не имеют ограничений на угловое положение относительно осей их подвеса на корпусе КА. Далее применяются обозначения  $\text{col}(\cdot) = \{\cdot\}$ ,  $\text{line}(\cdot) = [\cdot]$ ,  $(\cdot)^t$ ,  $[\mathbf{a} \times]$  и  $\circ, \sim$  для векторов, матриц и кватернионов. Введем кватернион  $\Lambda$  ориентации связанного с корпусом КА базиса  $\mathbf{B}$  относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$  и вектор  $\boldsymbol{\omega}$  абсолютной угловой скорости КА. Свяжем с каждым ГД, который имеет вектор кинетического момента (КМ)  $\mathbf{H}_i = h_g \mathbf{h}_i$ ,  $i = 1 \div m$ , с одинаковым модулем  $h_g$ , правый триэд его осей: (i) орт  $\mathbf{h}_i(\beta_i)$  вектора КМ ГД, положение которого определяется углом  $\beta_i$ , (ii) фиксированный в базисе  $\mathbf{B}$  орт  $\mathbf{g}_i$  оси подвеса ГД и (iii) орт  $\mathbf{p}_i(\beta_i) = \mathbf{h}_i(\beta_i) \times \mathbf{g}_i$ . При столбце  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$  вектор суммарного нормированного КМ СГК  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_i(\beta_i)$ , а орт гироскопического момента  $i$ -го ГД  $\mathbf{m}_i^g(\beta_i) = \partial \mathbf{h}_i(\beta_i) / \partial \beta_i = \mathbf{g}_i \times \mathbf{h}_i(\beta_i) = -\mathbf{p}_i(\beta_i)$ .

Все векторы и тензор инерции корпуса КА  $\mathbf{J}$  представляются в базисе  $\mathbf{B}$  и определяется матрица Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \equiv [\mathbf{a}_i(\beta_i)] = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{m}_i^g(\beta_i)]$ . Определим нормированный к значению  $h_g$  вектор КМ корпуса КА в виде  $\mathbf{k}(t) \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t) / h_g$  и для простоты будем считать, что вектор нормированного КМ механической системы «КА+СГК»  $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{k}(t) + \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \mathbf{0}$ . Пусть при отсутствии внешнего возмущающего момента  $\forall t \in T_r \equiv [t_i, t_f]$  заданы функции времени  $\Lambda(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , представляющие программное угловое движение базиса  $\mathbf{B}$  в базисе  $\mathbf{I}$ , которое описывается дифференциальными уравнениями  $\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega} / 2$ ;  $\dot{\mathbf{k}}(t) = -\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ . Здесь вектор управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \sum \mathbf{m}_i^g(\beta_i) \dot{\beta}_i$  вычисляется как  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{u}^g$ ;  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^g$ , где «управлением» считается столбец  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^g = \{u_i^g\}$  с компонентами  $u_i^g$  скоростей поворота ГД, ограниченных по модулю заданным значением

$u_g^m = \text{const}$ . Пусть также заданы значения нормированных к значению  $h_g$  векторов КМ СГК  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}^3$  и потребного управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g \in \mathbf{M} \subset \mathbf{R}^3$ . В результате приходим к двум нелинейным векторным уравнениям  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = -\mathbf{k}(t)$ ;  $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{m}^g$  в трехмерном пространстве относительно столбцов  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$  и  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \{\dot{\beta}_i\}$ , каждый из которых имеет размерность  $m$ .

*Первая* проблема заключается в построении внешней граничной поверхности  $\partial \mathbf{S} = \mathbf{S}^* \subset \mathbf{R}^3$  области  $\mathbf{S}$  вариации КМ СГК, форма которой зависит от числа  $m$  ГД и расположения ортов  $\mathbf{g}_i$  осей их подвеса в базисе  $\mathbf{B}$ , а также в анализе условий разрешимости уравнений указанных нелинейных векторных уравнений при возможном уменьшении ранга матрицы Якоби  $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\beta})$  для особых (сингулярных) состояний СГК. Таким состояниям соответствуют расположения конца вектора  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  как на поверхности  $\mathbf{S}^*$ , так и на поверхностях  $\mathbf{h}_k^*$  весьма сложной структуры внутри области  $\mathbf{S}$ .

*Вторая* проблема заключается в обосновании законов настройки СГК, которые являются законами распределения вектора  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$  его суммарного КМ между избыточным числом ГД с учетом необходимости обхода либо прохождения сингулярных состояний СГК. Угловые скорости каждого ГД ограничены, что существенно нелинейным образом «трансформируется» в ограничения на компоненты вектора нормированного управляющего момента СГК  $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ , т.е. моментные характеристики СГК зависят как от предыстории, так и текущего расположения векторов КМ гиродинов в его составе. При произвольном одинаковом числе применяемых ГД класс кратных схем СГК, где используются коллинеарные группы ГД (в каждой группе два или более ГД с параллельными осями подвеса), уступает пространственным схемам СГК общего вида как по размерам области  $\mathbf{S}$  вариации КМ СГК. Однако СГК кратных схем имеют три достоинства: граница  $\mathbf{S}^*$  области  $\mathbf{S}$  вариации КМ СГК совпадает с её выпуклой оболочкой; все поверхности  $\mathbf{h}_k^*$  особых состояний СГК внутри области  $\mathbf{S}$  являются проходимыми; для таких схем могут быть обоснованы явные законы настройки, когда все характеристики движения каждого ГД получаются по аналитическим соотношениям.

В статье рассматриваются задачи диагностики кластера шести ГД и реконфигурации законов управления ими для обеспечения живучести системы управления ориентацией (СУО) маневрирующего КА землеобзора при отказах любых двух гиродинов.

**Математические модели.** Коллинеарная пара ГД в известной работе *J.W. Crenshaw (1973)* была названа *Scissored Pair Ensemble (SPE)*, а кратные схемы на основе 2 и 3 коллинеарных пар ГД – как *2-SPE* и *3-SPE*.

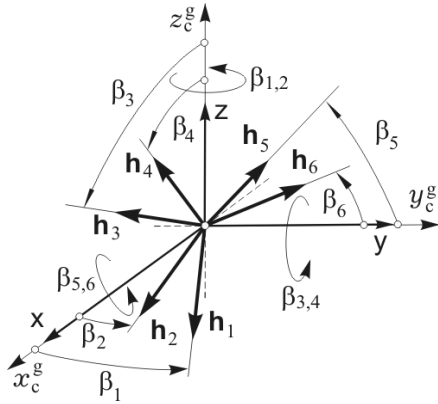


Рисунок 1 – Схема 3-SPE и отсчёт углов ГД

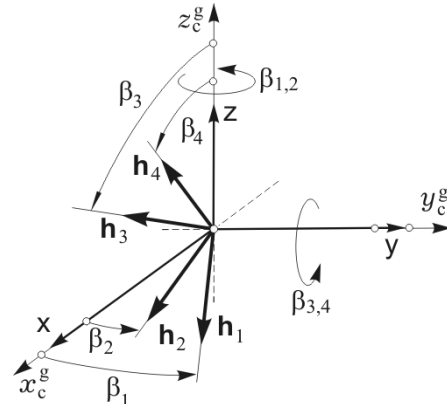


Рисунок 2 – Схема 2-SPE и отсчёт углов ГД

На рисунке 1, 2 представлены канонические структуры указанных схем, когда оси подвесов ГД параллельны осям канонического гироскопического базиса (КГБ)  $\mathbf{G}^c (Ox_c^g y_c^g z_c^g)$ , который считается совпадающим с базисом  $\mathbf{B}$ . Кластеры ГД (СГК) должны обеспечивать требуемую рабочую область  $S^g \subset S$  вариации нормированного вектора КМ  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_i(\beta_i)$ . В «парковом» состоянии СГК при  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^0$  вектор КМ  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}^0) = \mathbf{0}$ .

Введем обозначения проекций ортов КМ каждого ГД на оси КГБ  $\mathbf{G}^c (Ox_c^g y_c^g z_c^g)$ , (рисунок 1, 2):

$$\begin{aligned} x_1 = C_1 \equiv \cos \beta_1; \quad x_2 = C_2 \equiv \cos \beta_2; \quad y_1 = S_1 \equiv \sin \beta_1; \quad y_2 = S_2 \equiv \sin \beta_2; \\ x_3 = S_3 \equiv \sin \beta_3; \quad x_4 = S_4 \equiv \sin \beta_4; \quad z_3 = C_3 \equiv \cos \beta_3; \quad z_4 = C_4 \equiv \cos \beta_4; \\ y_5 = C_5 \equiv \cos \beta_5; \quad y_6 = C_6 \equiv \cos \beta_6; \quad z_5 = S_5 \equiv \sin \beta_5; \quad z_6 = S_6 \equiv \sin \beta_6. \end{aligned}$$

Тогда столбец нормированного суммарного КМ СГК  $\mathbf{h}$  в ортогональном КГБ  $\mathbf{G}^c$  и градиентная матрица Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$  представляются для схемы 3-SPE в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 + C_5 + C_6 \\ C_3 + C_4 + S_5 + S_6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & -S_5 & -S_6 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 & C_5 & S_6 \end{bmatrix},$$

а для схемы 2-SPE – в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 \\ C_3 + C_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 \end{bmatrix}.$$

Многообразия сингулярных состояний кластеров ГД представлены на рисунке 3 (для схемы 2-SPE) и на рисунке 4 (для схемы 3-SPE), подробности приведены в [1].

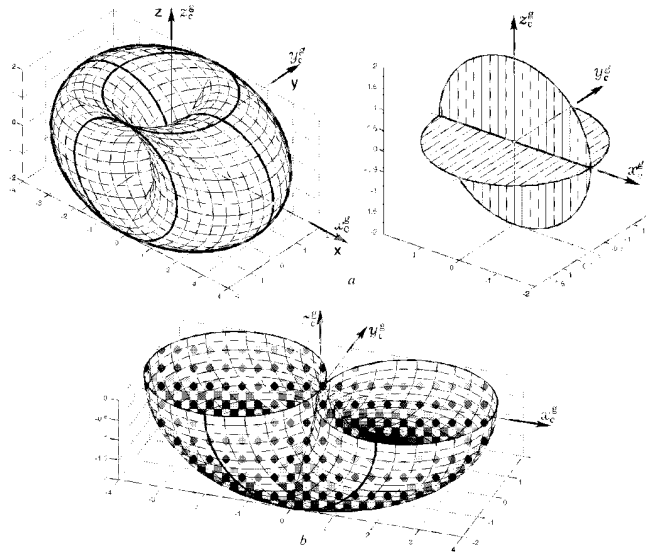


Рисунок 3 – Естественные сингулярные состояния схемы 2-SPE

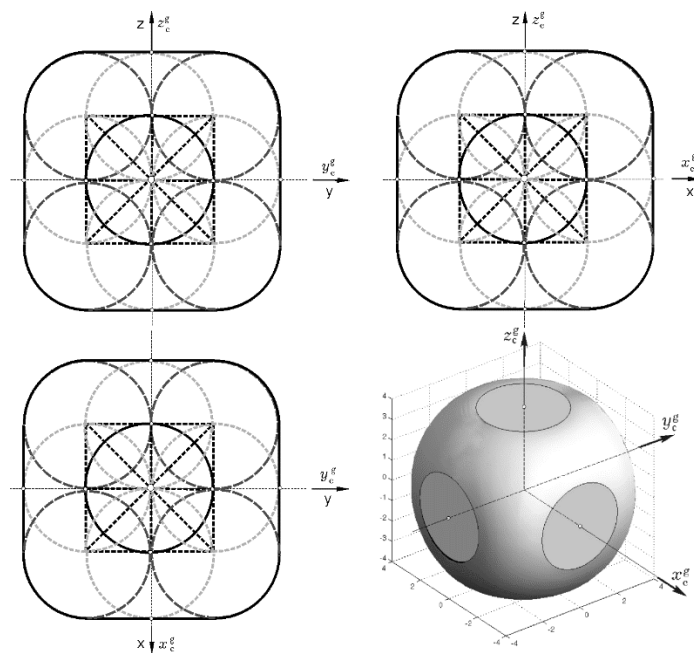


Рисунок 4 – Сингулярные состояния и оболочка области вариации КМ схемы 3-SPE

**Явные законы настройки СГК.** Вводятся обозначения

$$x_{12} = x_1 + x_2; \quad x_{34} = x_3 + x_4; \quad y_{12} = y_1 + y_2; \quad y_{56} = y_5 + y_6; \quad z_{34} = z_3 + z_4; \quad z_{56} = z_5 + z_6;$$

$$\tilde{x}_{12} = \frac{x_{12}}{\sqrt{4 - y_{12}^2}}; \quad \tilde{x}_{34} = \frac{x_{34}}{\sqrt{4 - z_{34}^2}}; \quad \tilde{y}_{12} = \frac{y_{12}}{\sqrt{4 - x_{12}^2}};$$

$$\tilde{y}_{56} = \frac{y_{56}}{\sqrt{4 - z_{56}^2}}; \quad \tilde{z}_{34} = \frac{z_{34}}{\sqrt{4 - x_{34}^2}}; \quad \tilde{z}_{56} = \frac{z_{56}}{\sqrt{4 - y_{56}^2}}.$$

Для схемы 2-SPE функция распределения КМ СГК между ГД с фиксированным параметром  $\rho$  принимается в виде  $f_{\rho 1}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34} + \rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34} - 1) = 0$ , где  $0 < \rho < 1$ . При этом в КГБ для любых значений  $\mathbf{h} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ , принадлежащих сфере  $\mathbf{S}_r^g \equiv \{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \leq r_g^2\}$  радиуса  $r_g < 2\rho$ , отсутствуют сингулярные состояния СГК. Для схемы 2-SPE глобальный максимум определителя матрицы Грамма  $\mathbf{G} = 64/27$  достигается при  $\rho = 2\sqrt{6}/5$  в трех точках ( $\mathbf{x} = \{0, \pm 4\sqrt{2}/3; \mathbf{y} = 0; \mathbf{z} = 0\}$ ). Такой выбор  $\rho$  оптимизирует радиус сферы  $\mathbf{S}_r^g$  с центром в начале КГБ, рекомендуется назначать рабочую область  $\mathbf{S}^g = \mathbf{S}_r^g$  в виде сферы радиусом  $r_g = 1,5$  [1].

Для схемы 3-SPE компоненты векторной функции  $\mathbf{f}_\rho(\boldsymbol{\beta}) = \{f_{\rho 1}, f_{\rho 2}, f_{\rho 3}\} = \mathbf{0}$  распределения КМ СГК между ГД принимаются в виде  $f_{\rho 1}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{x}_{12} - \tilde{x}_{34} + \rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34} - 1) = 0$ ;  $f_{\rho 2}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{y}_{56} - \tilde{y}_{12} + \rho(\tilde{y}_{56}\tilde{y}_{12} - 1) = 0$ ;  $f_{\rho 3}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{z}_{34} - \tilde{z}_{56} + \rho(\tilde{z}_{34}\tilde{z}_{56} - 1) = 0$ , где постоянный параметр  $\rho$  также удовлетворяет условию  $0 < \rho < 1$ . При этом гарантируется [1] отсутствие сингулярных состояний СГК по схеме 3-SPE для всех внутренних точек области  $\mathbf{S}$  вариации вектора его КМ. Здесь рациональным является выбор параметра  $\rho = 0,65$ , рекомендуется назначать рабочую область  $\mathbf{S}^g = \mathbf{S}_r^g$  в виде сферы радиусом  $r_g = 3$ .

Избыточность СГК исчезает в случае работоспособности только трех ГД. Если для определенности считать таковыми первые три ГД, то вектор нормированного КМ СГК  $\mathbf{h}$  и градиентная матрица Якоби  $\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$  представляются в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 \\ S_1 + S_2 \\ C_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & -S_3 \end{bmatrix}.$$

В этом случае по явным аналитическим соотношениям сначала определяются значения  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, z_3$ , а затем значения углов ГД в составе столбца  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$ . Здесь рекомендуется назначать рабочую область  $\mathbf{S}^g = \mathbf{S}_r^g$  в виде сферы радиусом  $r_g = 0,75$ .

**Бортовая диагностика состояния кластера ГД.** Диагностика выполняется в реальном времени с периодом цифрового управления на 2 уровнях: (i) сопоставлением команд  $u_i^g$ , поступающих на привод каждого ГД по оси его подвеса, с измеренным

приращением углов их поворота  $\delta\beta_i$  за этот период времени, а также проверкой выполнения требований к точности стабилизации скоростей вращения роторов ГД; (ii) сопоставлением измеренного приращения вектора угловой скорости КА с интегралом вектора командного момента СГК, вычисленном на периоде цифрового управления.

**Реконфигурация законов управления ГД.** Для обеспечения живучести СУО КА землеобзора при возникновении отказов любых двух ГД в СГК по схеме *3-SPE* с гарантированным решением целевых задач спутника, где требуется рабочая область вариации КМ в виде сферы радиусом  $H$  физической размерности (Нмс), выполняется реконфигурация указанных выше законов управления ГД с изменением номинальных значений их собственных КМ. Введем обозначения собственных КМ гиродинов  $h_g^{(s)}$ ,  $s = 6, 4, 3$  физической размерности для схем СГК на основе шести ГД (*3-SPE*), четырех ГД (*2-SPE*) и трех ГД соответственно. Тогда получаются следующие требуемые значения собственных КМ гиродинов:  $h_g^{(6)} = H/3$ ,  $h_g^{(4)} = 2H/3$  и  $h_g^{(3)} = 4H/3$ . Если собственные КМ ГД не изменять, то целевые задачи спутника будут выполняться только частично.

**Заключение.** В развитие [2] кратко представлены нелинейные законы управления кластером шести гиродинов кратной схемы, в том числе при отказах любых двух ГД в его составе, а также методы диагностики состояния и реконфигурации законов управления гиродинами для обеспечения живучести СУО маневрирующего КА землеобзора. При этом впервые предложено выполнять указанную реконфигурацию с изменением номинальных значений собственных кинетических моментов гиродинов.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-08-01091) и Отделением ЭММПУ РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

#### **Библиографический список**

1. Сомов, Е.И. Анализ сингулярных состояний и синтез явных законов настройки гирокомплексов кратных схем/ Е.И. Сомов [Текст] // Гироскопия и навигация. – 2013. – №1(80). – С. 134-148.
2. Somov, Ye., Butyrin, S., Makarov, V., Somov, S. Ensuring the survivability of the attitude control system for a land-survey mini-satellite at critical situations // Proceedings of 21 Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – 2014. – P. 28-31.