ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ГЛАДКОГО ШТАМПА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ В ЖЕСТКО - ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

И. А.Власова
Самарский государственный университет,
vlaira@yandex.ru

Соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности были получены Д.Д.Ивлевым [1] в предположении, что напряженное состояние соответствует ребру условия пластичности Треска. При решении задачи о вдавливании штампа в жестко-пластическое полупространство на контуре штампа возникает особенность. Решение плоской задачи о вдавливании штампа в пластическую полуплоскость было получено Прандтлем после введения особых точек, поэтому для решения пространственной задачи были введены особые линии [2]. Пусть на некоторой поверхности S задан вектор напряжений: $p_i=\sigma_{ij}N_j$, (1)
здесь N_j – единичный вектор нормали к поверхности S.
Задачу нахождения распределения напряжений в окрестности поверхности S, удовлетворяющих уравнениям равновесия : $\sigma_{ij}=\sigma_3\delta_{ij}\pm 2k(n_i n_{j,j}+n_{i,j}n_j)$, (2)
условиям полной пластичности: $\sigma_{ij}=\sigma_3\delta_{ij}\pm 2k(\delta_{ij} - n_i n_j)$ (3)
и краевым условиям (1) будем называть задачей Коши.

Рассмотрим задачу о вдавливании гладкого штампа в жестко-пластическое полупространство. Граница штампа задана некоторой выпуклой линией, а подошва плоская. Вне штампа граница деформируемого тела предполагается свободной от напряжений. Линия, ограничивающая контур штампа является особой. Она разделяет границу деформируемого тела на две части, одна из которых свободна от напряжений, а на другой задано граничное условие. В некоторой точке контура штампа введем локальную, затем полярную систему координат: $r=\sqrt{\left(y_2^2+y_3^2\right)}$; $tg\ \varphi = y_2/y_3$. На свободной поверхности при $\varphi = \pi/2$ выполняются краевые условия (4):

$$\sigma_0(\pi/2,y_1)=1,\quad n_i^0(\pi/2,y_1)N_i^0=0. \qquad (4)$$

Решение задачи по определению напряженного состояния у особой линии строится в виде разложений (5),(6) в трех зонах: $\sum_1$: $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$; $\sum_2$: $\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}$; $\sum_3$: $\frac{5\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$;

$$\sigma=\sigma^0(\varphi, y_1)+\sum_{mk=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\sigma^{(m)}(\varphi, y_1)\, r^m,\qquad \sigma^{(m)}(\varphi, y_1)=\partial^m\sigma/\partial r^m|_{r=0}; \qquad (5)$$

$$n_i= n_i^0(\varphi, y_1)+\sum_{mk=1}^{\infty}\frac{1}{m!}n_i^{(m)}(\varphi, y_1)\, r^m,\qquad n_i^{(m)}(\varphi, y_1)=\partial^m n_i/\partial r^m|_{r=0}; \qquad (6)$$

Выполняя краевые условия на свободной поверхности и под подошвой штампа, получаем решение для нулевого приближения:

$$\textstyle\sum_1:\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4};\qquad \sigma^0=1,\qquad n_i^0=-\mu_i; \qquad (7)$$

$$\textstyle\sum_2:\quad \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4};\qquad \sigma^0=1+\varphi-\frac{3\pi}{4},\qquad n_i^0=\frac{\sqrt{2}}{2}(p_i-l_i); \qquad (8)$$

$$\textstyle\sum_3:\quad \frac{5\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2};\qquad \sigma^0=1+\frac{\pi}{2},\qquad n_i^0=\nu_i, \qquad (9)$$

здесь $p_i=\mu_i\cdot\cos\varphi-\nu_i\cdot\sin\varphi$, $l_i=\mu_i\sin\varphi+\nu_i\cos\varphi$; μ_i, ν_i, τ_i – единичные векторы в направлении касательной, нормали и бинормали к особой линии. Полное решение краевой задачи будет сопрягаться из трех аналитических частей, каждая из которых представляется разложениями (5),(6). Поверхности, разделяющие эти аналитические решения, являются поверхностями разрыва производных напряжений, проходящими через особую линию (границу штампа). Исследуем поверхности разрывов производных напряжений. Уравнение особой линии служит начальным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Её решением является параметрическое уравнение поверхности разрыва производных напряжений и нормаль к ней. Применяя геометрические условия совместности для скачков производных 1-го,2-го и 3-го порядка, определим по три члена разложения в каждой зоне:

$\sum_1$: $\sigma^{(1)}(\varphi,y_1)$, $n_i^{(1)}(\varphi,y_1)$; $\sum_2$: $\sigma^{(2)}(\varphi,y_1)$, $n_i^{(2)}(\varphi,y_1)$; $\sum_3$: $\sigma^{(3)}(\varphi,y_1)$, $n_i^{(3)}(\varphi,y_1)$; $i=1,2,3$.

Рекуррентные соотношения, полученные в [3], позволяют отыскать члены разложений (5),(6) до k-го порядка включительно. Используя найденные приближения решений *0*-го, *1*-го,*2*-го и *3*-го порядка в зоне $\frac{5\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ можно записать:

$$\sigma=2+\pi+2\cdot(r/\rho)\cdot\sin\varphi-(1/(2!2^3))\cdot(r/\rho)^{2}\cdot(12+\pi)-(1/(2!2^5)\cdot(r/\rho)^3\cdot\{(8\cdot\{\partial^2\rho/\partial y_1{}^2-2\cdot(\partial\rho/\partial y_1)^2\}+$$

$$+(1/2)\cdot(12+\pi)\cdot\cos^3\varphi+(1/512)\cdot(-\pi\cdot(16793-12505\pi)-7424)\cdot\sin\varphi\cdot(2+\cos2\varphi)\}+\ldots \quad (10)$$

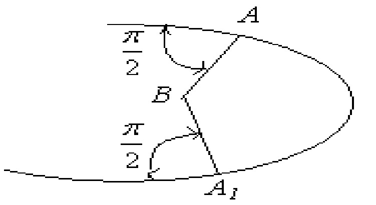

Рис.1.

Для определения σ_3 под штампом **($\varphi=\pi/2$)** проведем из некоторой точки A контура штампа нормаль к контуру, тогда в точке B, лежащей на нормали, σ_3 определяется по формуле:

$$\sigma_3\approx5{,}14+2\cdot(r/\rho)-0{,}95\cdot(r/\rho)^2+0{,}74\cdot(r/\rho)^3+\ldots \quad (11)$$

Здесь r- расстояние между точками A и B, ρ-радиус кривизны в точке A (рис.1). Точка B может быть точкой пересечения двух и более нормалей, поэтому напряжение σ_3 вдоль нормалей AB и A_1B, вообще говоря, будет различным. По принципу минимума предельной нагрузки на штамп [3] распределение давления под штампом определяется однозначно. Сравнение аналитического решения с численным показало, что для круглого штампа аналитический метод дает хорошее приближение численного решения.

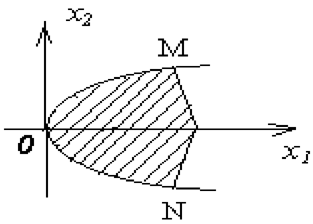

Рис.2.

Рассмотрим параболический в плане штамп (рис.2).Контур штампа является особой линией и записывается в виде: $x_1=p/2\cdot(1+\cos\varphi)/(1-\cos\varphi)$, $x_2=(p\cdot\sin\varphi)/(1-\cos\varphi)$ $(\varphi\neq k\pi)$. В силу симметрии параболы, линия, разделяющая решения (рис.2) будет линией $x_2=0$.

Давление под штампом определяется по формуле (11), а суммарное давление на штамп по формуле (12):

$$P=\iint \sigma_3 dx_1\, dx_2 \approx p^2\cdot\{0{,}84\cdot\varphi+0{,}14\cdot\sin\varphi+0{,}009\cdot\sin2\varphi+7{,}14\cdot\mathrm{ctg}(\varphi/2)+3{,}426\cdot\mathrm{ctg}^3(\varphi/2)\} \quad (12)$$

Линия, ограничивающая контур штампа, не замкнута, поэтому найдем величину давления на единицу площади. Ограничим параболу по нормали и найдем площадь сегмента *OMN*: $S=p^2\cdot(5-\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\,/[3\cdot(1-\cos\varphi)]$.Тогда величина давления на единицу площади вычисляется по формуле

$$\mathbf{p}=\lim_{\varphi\to2\pi} P/S$$

, где P- суммарное давление, S-площадь сегмента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Теория идеальной пластичности. М. «Наука», 1966.67-72.
2. Быковцев Г.И., Власова И.А.Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности. Межвузовский сб. «Механика деформируемых сред», вып. 2, 1977, Куйбышев.С.33-68
3. Жалнин В.А., Ивлев Д.Д., Мищенко О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство. ПМТФ,1961, №6.