СПЛАЙНОВЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ И РАЗРЕЖЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

И. А. Блатов
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
blatow@mail.ru

Операторы с псевдоразреженными матрицами (ПРМ) были введены и изучены в [1]. Применение методов теории ПРМ позволило решить ряд нерешенных задач в области вычислительной линейной алгебры [2], теории метода конечных элементов для сингулярно возмущенных задач, гармонического анализа [1]. В основе теории ПРМ лежит изучение асимптотических оценок элементов матриц конечных и бесконечных порядков, которые сохраняются при переходе к обратным матрицам, LU и QR-факторизациям. Сохранение этих оценок позволяет аппроксимировать соответствующие матрицы разреженными и применять методы технологии разреженных матриц. Настоящий доклад посвящен применению методов ПРМ в сочетании с вейвлет-анализом к решению интегральных уравнений.

1. Построение сплайновых вейвлет на отрезке.

Пусть [a,b] – произвольный отрезок,m – натуральное число и n_0 - такое целое число,что $2^{n_0} < 2m-1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_{0,} n_0+1,...\}$ разбиений отрезка [a,b] $\Delta_n : a = x_0^n < x_1^n < ... x_{2^n}^n = b$ с постоянным шагом $h = h_n = (b-a)/2^n.$ На каждом из разбиений Δ_n рассмотрим пространство сплайнов степени m-1 дефекта 1 $L_n = S(\Delta_n, m-1,1).$ Тогда для каждого $k \ge n_0$ пространство $S(\Delta_к, m-1,1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_к = L_{n_0} \oplus W_{n_0} \oplus ... \oplus W_{k-1},$ где через W_n обозначено ортогональное дополнение пространства L_n до пространства L_{n+1}. Искомый вейвлет-базис будем строить как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \le n \le k-1.$

Вначале построим построим базис в W_n. Зафиксируем $n \ge n_0$. В случае необходимости будем считать, что разбиение Δ_n продолжено с тем же шагом на всю числовую ось узлами $x_i^n, -\infty < i < +\infty.$ Пусть $\psi_{i,n}(x)$ - полуортогональный сплайновый вейвлет m-го порядка. Известно, что $\operatorname{supp}\psi_{i,n} = (x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1})$, $\psi_{i,n}(x) \in W_n$, $\psi_{i,n}(x)$ $= \psi_{0,n_0}(2^{n-n_0}x - i(b-a)/2^{n_0-1}),$ и $\psi_{i,n}(x)-$ функция с минимальной длиной носителя, удовлетворяющая этим свойствам. Носители функций $\psi_{i,n}(x)$ $,0 \le i \le 2^{n-1}-2m+1$ целиком содержатся в [a,b] и они образуют группу базисных функций W_n. Однако $\dim W_n = 2^{n-1},$ т.е. до базиса в W_n не хватает 2(m –1) функций. Построим недостающие вейвлет-функции. Для этого рассмотрим функции $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m+2 \le i \le 2^{n-1}-1$ на расширенном разбиении Δ_n. Через $\varphi_{i,n}(x)$ обозначим нормализованный В-сплайн степени m-1 на разбиении Δ_n с носителем (x_i^n, x_{i+m}^n). Первую группу из m-1 недостающих базисных функций будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}, -m+1 \le j \le -1 \qquad (1)$$

из условий

$$(\tilde{\psi}_{i,n}(x), \varphi_{k,n}(x)) = 0, \; k = -m+1, -m+2, ..., -1, \qquad (2)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[a,b]$. Подставляя (1) в (2), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения α_j.

Решая систему (2), получаем, что функция (1) является искомой, так как ортогональность к В-сплайнам $\varphi_{k,n}(x)$ при $k \ge 0$ имеет место в силу ортогональности им всех вейвлет из линейной комбинации (1), а при $-m+1 \le i \le -1$ в силу условий (2). Остальные m-1 базисных функций определим в виде

$$\widetilde{\psi}_{i,n}(x) = \widetilde{\psi}_{i,2^{n-1}-2m-i+1}(x),\ 2^{n-1}-2m+2 \le i \le 2^{n-1}-m. \tag{3}$$

2. Метод вейвлет-Галеркина для интегральных уравнений.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x) \tag{4}$$

с заданной функцией f(x) и неизвестной функцией u(x). Предположим, что ядро удовлетворяет оценкам

$$\left|\frac{\partial^l K(x,y)}{\partial x^s \partial y^{l-s}}\right| \le C\frac{1}{|x-y|^l},\ 0 \le l \le m. \tag{5}$$

Рассмотрим для (4) метод Бубнова-Галеркина на базе построенных вейвлет-функций степени m-1. Зафиксируем некоторое $k > n_0$ и будем искать приближенное решение в виде $\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j}\varphi_{j,n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k-n_0-1}\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij}\psi_{j,n_0+i}(x)$ из условий ортогональности невязки базисным вейвлетам.

Из общей теории проекционных методов и аппроксимационных свойств пространств сплайнов вытекает

Теорема 1. Пусть уравнение (4) имеет единственное решение при любой непрерывной f(x). Тогда найдется такой номер $k_0 > n_0$, что для любого $k > k_0$ СЛАУ имеет единственное решение и справедливы оценки погрешности

$$\|u(x)-u_k(x)\|_{C[a,b]} \le C \inf_{v\in S(\Delta,m-1,1)} \|u(x)-v(x)\|_{C[a,b]}.$$

Отыскание коэффициентов разложения сводится к решению СЛАУ с квадратной матрицей порядка 2^k+m-1. Получим оценки элементов матрицы этой СЛАУ. Представим ее в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k-n_0+1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k-n_0+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{k-n_0+11} & A_{k-n_0+12} & \cdots & A_{k-n_0+1k-n_0+1} \end{bmatrix},\ A_{pq} = \{a_{ij}^{pq}\},\ 1 \le p,q \le k-n_0+1,$$

$$A_{11} = \{a_{ij}^{11}, -m+1 \le i,j \le 2^{n_0}-1\},\ A_{pp} = \{a_{ij}^{pp}, 2^{n_0+p-2} \le i,j \le 2^{n_0+p-1}-1\}.$$

Теорема 2. Справедливы оценки

$$|a_{ij}^{pp}| \le C2^{-p}(1+|i-j|)^{-m},\ 1 \le p \le k-n_0+1, i \ne j,$$

$$|a_{ij}^{pq}| \le C2^{-(q+(p-q)/2)}(1+|i-2^{p-q}j|)^{-m},\ p > q,$$

$$|a_{ij}^{pq}| \le C2^{-(p+(q-p)/2)}(1+|2^{q-p}i-j|)^{-m},\ p < q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блатов И.А.* Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский мат. журнал. 1996. Т. 37. N 1. С. 36-59.

2. *Блатов И.А., Китаева Е.В.* О сочетании методов неполной факторизации и быстрого преобразования Фурье решения краевых задач для уравнения Пуассона в областях с криволинейной границей // Журн. ВММФ. 2003. Т. 43. №5. С. 730-743.