ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ИДЕЕ ЖАДНОГО ВЫБОРА

В. М. Монтлевич, А. Н. Исмаилова

Самарский государственный университет,
vlmont@mail.ru,
ООО «Самара НИПИ нефть»,
ismailova.aynura@mail.ru

Известно, что решение практически значимых прикладных задач целочисленного программирования (ЦП) сталкивается с вычислительными трудностями принципиального характера. Большинство таких задач относится к классу NP-трудных, для решения которых не существует эффективных полиномиальных алгоритмов. Этот факт порождает интерес к разработке приближенных алгоритмов решения задач ЦП.

Жадные алгоритмы (гриди-алгоритмы) являются интуитивными эвристиками, в которых на каждом шаге принимается решение, являющееся наиболее выгодным для этого шага, без учета того, что происходит на последующих шагах поиска. Для некоторых задач дискретной оптимизации жадные алгоритмы позволяют получить оптимальное решение. Известными примерами применения жадного выбора являются алгоритмы Прима и Краскала для построения остовного дерева минимального веса, алгоритм Хаффмана оптимального префиксного кодирования алфавита с минимальной избыточностью. Изучалось также применение жадных алгоритмов для решения некоторых задач целочисленного программирования [1-3]. Однако, даже для простейшей задачи ЦП – задачи о рюкзаке, жадный алгоритм не дает точного решения.

В настоящей работе предлагаются эвристические алгоритмы ЦП, основанные на идее «жадного» выбора, приводятся результаты эмпирического изучения алгоритмов для задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП), пример использования алгоритмов для решения одной задачи календарного планирования.

Рассмотрим задачу ЦП в следующей форме

$$\begin{gathered} f(x) \to \max \\ x \in X \subseteq Z^n \end{gathered} \qquad (1)$$

где X – множество допустимых планов исходной задачи. Обозначим $X(x_j^*)$ – множество допустимых планов исходной задачи, для которых $x_j = x_j^*$

Схема алгоритма.

Начальная итерация.

0. Выбираем начальный допустимый план x^0. $J_0=\varnothing$, $X_0=X$. Для каждой из n переменных находим границы изменения $\bar{x}_j \le x_j \le \bar{\bar{x}}_j$ так, что $x=(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0,\dots,x_n^0) \in X_0$ для всех целочисленных x_j, $\bar{x}_j \le x_j \le \bar{\bar{x}}_j$. Границы могут задаваться приближенно. Полагаем $J=\{1, 2, \dots, n\}$ – множество индексов переменных, J_0– множество индексов переменных, получивших новые значения.

Общая итерация. Пусть сформированы множества J_k и $X_k \subseteq X$.

1. $J_k = J \Rightarrow$ все переменные получили новые значения. Конец работы алгоритма. Построенный допустимый вектор x принимается за приближенное решение. Иначе на 2.
2. Для $j \in J \setminus J_k$ находим $j_0 = \arg\min_{j \in J \setminus J_k} \{ \max_{\bar{x}_j \le x_j \le \bar{\bar{x}}_j} f(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{j-1}, x_j, \tilde{x}_{j+1}, ..., \tilde{x}_n) \}$,

где $\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k^0, k \in J \setminus J_k, k \ne j \\ x_k^*, k \in J_k \end{cases}$

Положим $x_{j_0}^* = \arg\max_{\bar{x}_{j_0} \le x_{j_0} \le \bar{\bar{x}}_{j_0}} f(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{j_0-1}, x_{j_0}, \tilde{x}_{j_0+1}, ..., \tilde{x}_n) \}$, $X_{k+1} = X_k(x_{j_0}^*)$, где $X_k(x_{j_0}^*)$ – множество тех $x \in X_k$, для которых, $J_{k+1} = J_k \cup \{j_0\}$. Переходим к шагу 1.

Алгоритм конкретизирован для решения задач ЦЛП, предложены процедуры улучшения решения, полученного жадным алгоритмом. На основе большого объема вычислительных экспериментов (решено порядка 750 задач различной размерности) получены следующие результаты.

Средняя погрешность задач с произвольными переменными не превышает 5% (для задач с булевыми переменными не превышает 1%). Распределение числа тестовых задач по интервалам относительной погрешности представлено на рисунке 1.

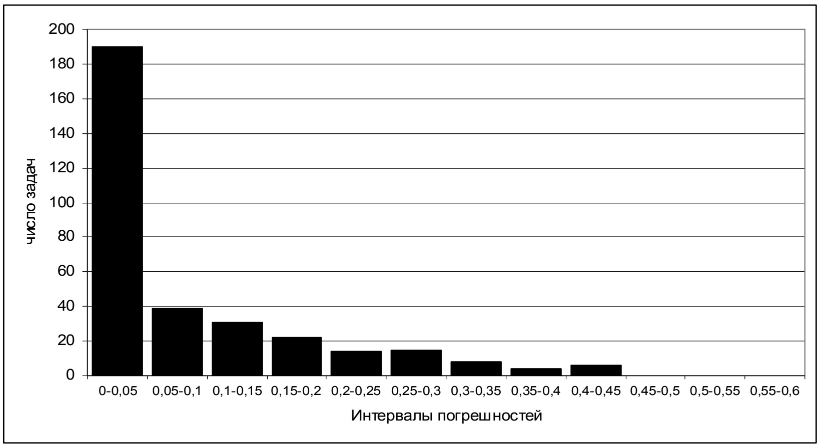

Рис.1. Распределение числа задач по интервалам погрешностей.

Разработанные алгоритмы применялись для решения задачи календарного планирования независимых работ при наличии ресурсного ограничения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глебов Н. И.* Об условиях разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом // Дискретный анализ и исследование операций. 2002. Серия 2. Том 9, № 2, с. 3-

2. 12*Глебов Н. И., Шенмайер В. В.* О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Серия 1. Том 7, № 4, с. 38-47

3. *Шенмайер В. В.* Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Серия 1. Том 6, № 4, с. 104-120

4. *Исмаилова А.Н.* Применение жадного алгоритма для решения задачи о многомерном рюкзаке. // Социально-экономические системы: вопросы развития и управления. Самара: Глагол, 2010, с. 219-220.