# ОБ УСТАЛОСТНОМ РОСТЕ ТРЕЩИНЫ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ И СВЯЗАННОЙ С НЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

С. А. Игонин, Л. В. Степанова

*Самарский государственный университет*
*sergejigonin@yandex.ru, stepanovalv@samsu.ru*

Целью настоящего исследования являлось аналитическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из анализа полей напряжений, деформаций и сплошности у вершины усталостной трещины с учетом накопления повреждений. Оригинальная постановка задачи об усталостном подрастании трещины в среде с поврежденностью была предложена в [1]. Однако выполненный в [1] анализ собственных значений и соответствующих им собственных функций требует дополнительного обоснования и проверки, что и является предметом настоящей работы. Пусть в линейно упругой бесконечной плоскости распространяется полубесконечная трещина, рост которой обусловлен приложением периодической нагрузки. Параметр сплошности, характеризующий степень поврежденности, включен в определяющие соотношения материала. Кинетическое уравнение постулирует степенной закон накопления повреждений. В работе проведен асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния и параметра сплошности вблизи кончика растущей трещины в среде с поврежденностью как для плоского напряженного, так и плоского деформированного состояний. Анализ основан на введении функции напряжений Эри и использовании разложений по собственным функциям параметра сплошности и функции напряжений Эри в окрестности дефекта. Показано, что проблема отыскания полей напряжений и сплошности сводится к нелинейной задаче на собственные значения. Одним из перспективных методов решения нелинейной задачи на собственные значения является метод малого параметра. Был введен малый параметр, отражающий влияние нелинейности задачи (нелинейного закона накопления повреждений) и представляющий собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной «возмущенной» задаче, и собственным значением, соответствующим «невозмущенной» линейной задаче. Искомые величины (коэффициенты угловых распределений функции напряжений Эри и параметра сплошности) раскладывались в ряд по степеням малого параметра. Найдены трехчленные асимптотические разложения угловых распределений, что позволило найти аналитическое выражение для собственного значения и решение исходной задачи в замкнутой форме.

Метод возмущений, используемый в решении, базируется на введении малого параметра $\varepsilon = \mu - \mu_0$, где $\mu_0$ - собственное значение, отвечающее «невозмущенной» линейной задаче, для которой $n = 1, m = 1$, $\mu$ - собственное значение, соответствующее нелинейной «возмущенной» задаче. Угловые распределения функции напряжений Эри $\chi(r,\theta) = \alpha r^{\lambda+2} f(\theta)$ и параметра сплошности $\psi(r,\theta) = \beta r^{\mu} g(\theta)$ разыскиваются в форме

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\theta), \quad g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\theta), \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon, \; \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k, \; n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k n_k, \; m = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_k,$$

где $m, n$ - константы кинетического уравнения. Условие совместности и кинетическое уравнение накопления повреждений позволяют получить уравнения задачи нулевого порядка

$$(1-\nu)f_0^{IV}-2(1-\nu)E_0f_0'''+(1-\nu)G_0f_0''+b_1^0f_0''-2E_0b_2^0f_0'+e_1^0G_0f_0+b_3^0f_0=0,$$

$$g_0'\sin\theta-\mu_0\cos\theta=-\sigma_e^{(0)}/g_0,\quad \sigma_e^{(0)}=\sqrt{\left[f_0''-\lambda_0(\lambda_0+2)f_0\right]+4(\lambda_0+1)^2(f_0')^2}$$

где приняты следующие обозначения

$$E_0=g_0'(\theta)/g_0(\theta),\quad G_0=2E_0^2-g_0''/g_0,\quad b_1^0=7-9\nu,\quad b_2^0=5-9\nu,\quad b_3^0=0,\quad e_1^0=3-9\nu$$

Решение задачи нулевого порядка должно удовлетворять следующим краевым условиям

$$f_0'(0)=0,\ f_0'''(0)=0,\ g_0'(0)=0,\ g_0(0)=\left(\sigma_e^{(0)}(0)\right)^{1/2}$$

и краевым условиям на границе областей активного накопления повреждений и полностью разрушенного материала

$$f_0(\theta=\theta_d)=0,\quad f_0'(\theta=\theta_d)=0,\quad g_0(\theta=\theta_d)=0.$$

Решение задачи нулевого порядка имеет вид $f_0(\theta)=\dfrac{1}{6}\cos^3\theta,\ g_0(\theta)=\cos\theta,\ \mu_0=1,\ \theta_d=\dfrac{\pi}{2}$.

В работе были получены аналитические решения задач нулевого, первого, второго и третьего порядков, на основании которых получено асимптотическое разложение $n-m=-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+O(\varepsilon^4)$. Откуда легко найти, что $\lambda=\mu=1/(1+n-m)$.

Анализ асимптотических выражений для угловых распределений функции напряжений Эри и параметра сплошности позволяет найти решение в замкнутой форме

$$\chi(r,\theta)=r^{\lambda+2}\cos^{\mu+2}\theta/((\lambda+2)(\lambda+1)),\quad \psi(r,\theta)=r^{\mu}\cos^{\mu}\theta.$$

Процедура метода малого параметра позволяет найти аналитическую зависимость собственного значения задачи от параметров кинетического уравнения. Метод малого параметра в отличие от численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, одно из которых является сингулярно возмущенным, дает возможность нахождения аналитических выражений для собственных значений и соответствующих им собственных функций. В задачах нелинейной механики разрушения при использовании метода разложения по собственным функциям метод малого параметра, наряду с применением численных процедур, является эффективным подходом оценки собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения. Рассмотренная задача об усталостном росте трещины в среде с поврежденностью и найденное с помощью метода малого параметра решение демонстрирует эффективность подхода.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проект № 12-08-00390).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhao J., Zhang X.* The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics// Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. № 1. P. 131-141.