# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Ю. Н. Горелов
*Институт проблем управления сложными системами РАН,*
*yungor07@mail.ru*

Рассматривается многомерная управляемая линейная система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \tag{1}$$

представленная прямой суммой парциальных объектов управления:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k u_k + \mathbf{f}_k(t),\ k = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = \mathrm{col}\,(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m) \in \mathbf{R}^n$ $\left(\sum_{k=1}^{m} n_k = n, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_k}\right)$, $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,\{\mathbf{A}_k\}_m$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}\,\{\mathbf{b}_k\}_m$, $\mathbf{u} = \mathrm{col}\,(u_1,...,u_m) \in \mathbf{R}^m$ − вектор управляющих параметров, пары $\{\mathbf{A}_k, \mathbf{b}_k\}$ − вполне управляемые для всех $k = \overline{1,m}$, а $\mathbf{f} = \mathrm{col}\,(\mathbf{f}_1,...,\mathbf{f}_m) \in \mathbf{R}^n$ $(\mathbf{f}_k \in \mathbf{R}^{n_k})$ − заданная вектор-функция, с помощью которой могут моделироваться перекрестные связи между объектами управления (2) в составе системы (1) [1]. Вообще говоря, при значениях $m$ и $n$ порядка нескольких единиц решение задач моделирования и управления (тем более оптимального управления) для системы (1), как правило, представляет существенные затруднения [2].

Итак, для заданных граничных условий:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \tag{3}$$

будем рассматривать задачу управления (1), (3) на заданном интервале $[t_0, t_f]$. Эта задача является двухточечной граничной задачей, которая сводится в общем случае к решению оптимальной проблемы моментов в $L_p$ при минимизации функционалов типа нормы в $L_q[t_0, t_f]$ $(q = 1, 2, \infty)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [3]. Очевидно, что моментные равенства здесь будут иметь вид

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{c},$$

где $\mathbf{\Phi}(t_f, \tau)$ − переходная матрица системы (1), а вектор $\mathbf{c}$ вычисляется так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}^f - \mathbf{\Phi}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0 - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

С помощью принципа максимума Н.Н. Красовского [3] сводится к последовательному решению следующих двух задач [4]:

$$\text{А}_0)\qquad \rho_0 = \min_{\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}=1} \| \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}(t_f, \cdot)\mathbf{B} \|_{L_p}^{(\nu)} = \| \mathbf{h}_0(\cdot) \|_{L_p}^{(\nu)}; \tag{4}$$

$$\text{Б}_0)\qquad \max_{\|\mathbf{u}(\cdot)\|_{L_q}^{(\mu)} = \frac{1}{\rho_0}} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}_0^{\mathrm{T}}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}_0^{\mathrm{T}}(\tau)\tilde{\mathbf{u}}(\tau)d\tau = 1, \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}(\tau)$ − оптимальное управление. В (4), (5) $\mathbf{l}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = 1$ и, соответственно, $\mathbf{h}_0^{\mathrm{T}}(\cdot) = \mathbf{l}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B} = [h_{10}(\tau)|\cdots|h_{m0}(\tau)]$, $\|\mathbf{h}(\cdot)\|_{L_p}^{(\nu)} = \left(\int_{t_0}^{t_f} (\|\mathbf{h}(\tau)\|_\nu)^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$,

$\| \mathbf{h}(\cdot) \|_{L_\infty}^{(\nu)} = \max\limits_{\tau \in [t_0, t_f]} \| \mathbf{h}(\tau) \|_\nu$, $\| \mathbf{h}(\tau) \|_\nu$ – векторная норма ($\nu = 1, 2, \infty$), $\dfrac{1}{\nu} + \dfrac{1}{\mu} = 1$.
Предполагается, что для граничных условий (3) выполняется условие $\| \mathbf{c} \|_\nu > 0$.

Соответственно, для граничных условий подсистем (2), задаваемых исходя из условий (3):

$$\mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{x}_k^0; \quad \mathbf{x}_k(t_f) = \mathbf{x}_k^f, \ (k = \overline{1, m}) \tag{6}$$

также можно рассматривать парциальные задачи оптимального управления для (2), (6) с функционалами типа нормы $J_k = \| u_k(\cdot) \|_{L_q}$ и, стало быть, тогда можно сформулировать соответствующие парциальные проблемы моментов в $L_p$, которые сводятся к решению следующих пар задач ($k = \overline{1, m}$) [4]:

$$\text{А}_k) \quad \pi_k = \min_{\xi_k^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_k = 1} \| \xi_k^{\mathrm{T}} \mathbf{\Phi}_k(t_f, \cdot) \mathbf{b}_k \|_{L_p} = \min_{\xi_k^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_k = 1} \| \xi_k^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_k(\cdot) \|_{L_p} = \| g_{k0}(\cdot) \|_{L_p}; \tag{7}$$

$$\text{Б}_k) \quad \max_{\| u_k(\cdot) \|_{L_q} = \frac{1}{\pi_k}} \int_{t_0}^{t_f} g_{k0}(\tau) u_k(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_f} g_{k0}(\tau) u_k^*(\tau) d\tau = 1, \tag{8}$$

где $u_k^*(\tau)$ – оптимальное управление, $\mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau)$ – переходные матрицы для объектов управления (2), а векторы $\mathbf{c}_k$ вычисляются по формулам: $\mathbf{c}_k = \mathbf{x}_k^f - \mathbf{\Phi}_k(t_f, t_0) \mathbf{x}_k^0 - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau) \mathbf{f}_k(\tau) d\tau$, $\| \mathbf{c}_k \|_\nu \ge 0$; если $\mathbf{c}_k = 0$, то управление $k$-м объектом (2) не требуется, то есть $u_k(\tau) = 0 \ \ \forall \tau \in [t_0, t_f]$, поскольку в этом случае граничные условия для него удовлетворяются автоматически. Отметим также, что $g_{k0}(\tau) = \xi_{k0}^{\mathrm{T}} \mathbf{g}_k(\tau)$, $\xi_{k0}^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_k = 1$, и по определению (1) и (2): $\mathbf{\Phi}(t_f, \tau) \mathbf{B} = \operatorname{diag}\{\mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau) \mathbf{b}_k\}_m = \operatorname{diag}\{\mathbf{g}_k(\tau)\}_m$.

В настоящем докладе рассматривается сведение проблемы моментов А$_0$), Б$_0$) (4), (5) к решению парциальных задач А$_k$), Б$_k$) (7), (8) ($k = \overline{1, m}$) и, соответственно, возможность синтеза на их основе решения общей задачи оптимального управления для (1), (3). Показано, что только в следующих случаях, когда $p, \nu = 2$ ($q, \mu = 2$), $p, \nu = 1$ ($q, \mu = \infty$) и $p, \nu = \infty$ ($q, \mu = 1$), решения задач (7), (8) суть парциальные компоненты решения для задачи (4), (5). В иных возможных вариантах постановок задач (4), (5), когда $p \neq \nu$, решения задач (7), (8), как правило, можно рассматривать только как соответствующие приближения к решению задачи оптимального управления (1), (3) с соответствующим функционалом типа нормы в рамках принципа Сандерса [2]. Общие результаты решения рассматриваемой задаче изложены в [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-08-97019 р_поволжье_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Тропкина Е.А. Об одном подходе к приближенному решению задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011, т.18, в.3. С.429-431.
2. Цурков В.И. Динамические задачи большой размерности. М.: Наука, 1088. 288 с.
3. Мороз А.И. Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
4. Горелов Ю.Н. О сводимости оптимальной проблемы моментов к парциальным в задачах управления многомерными линейными системами // Известия СНЦ РАН, 2012, № 6. С.177-181.